Władysław Bach

WŁASNOŚCI POTENCJAŁÓW O JĄDRACH DWU LUB WIĘCEJ ZMIENNYCH I ICH ZASTOSOWANIE DO BADANIA FUNKCJI EKSTREMALNYCH

Wstęp. W teorii punktów ekstremalnych, rozwiniętej przez Prof. LEJĘ i Jego uczniów, najistotniejszą rolę odgrywa fakt, że pewne ciągi funkcyjne $\{a_n(p)\}$ spełniają nierówności $0 \leq a_{\mu+\nu} \leq a_\mu a_\nu$, $\mu, \nu = 0,1,2,\ldots,$ względnie nierówności podobne, a wskutek tego ciągi $\{a_n(p)^{\frac{1}{n}}\}$ są zbieżne (zob. [15]). Wykorzystując powyższy fakt, dowodzi się następnie w oparciu o wzór interpolacyjny LAGRANGE'a ·bieżności pewnych innych ciągów, zbudowanych przy pomocy punktów ekstremalnych. W pewnych bardziej ogólnych przypadkach (gdy nie można stosować wzoru interpolacyjnego LAGRANGE'a) dużym powodzeniem na tym polu cieszą się metody teorii potencjału (zob. [1,2,6,7,8,9,19,20]) . Okazuje się mianowicie, że wiele ciekawych własności potencjałów , zwłaszcza potencjałów równowagi, pozwala rozstrzygnąć szereg kwestii dotyczących zbieżności ciągów pewnych funkcji a następnie zbadać własności funkcji granicznej.

We wszystkich metodach teorii potencjału kluczowym punktem było stwierdzenie, że jeśli $q^{(n)} = \{q_1^{(n)}, \dots, q_n^{(n)}\}$ jest n-tym układem ekstremalnym zbioru E ze względu na funkcję tworzącą $\omega(p,q)$ (ciągłą, nieujemną i symetryczną), wówczas

$$\frac{1}{n(n+1)} \sum_{i \neq k} \log \frac{1}{\omega\left(q_i^{(n)}, q_k^{(n)}\right)}, \quad n = 2,3,\dots,$$

jest, z gruba mówiąc, ciągiem sum aproksymacyjnych dla całki

$$\int_E \int_E \log \frac{1}{\omega(p,q)} \, d\mu(p) \, d\mu(q)$$

gdzie μ jest miarą równowagi (zob. [5]). Ponieważ $\log \frac{1}{\omega(p,q)}$ jest funkcją ograniczoną od dołu, więc z własności punktów ekstremalnych i miary równowagi wynika, że ów ciąg jest zbieżny do tej całki. Własności zatem funkcji granicznej pewnych ciągów związanych z punktami ekstremalnymi, np. ciągu

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log \frac{1}{\omega(p, q_i^{(n)})}, \quad n = 2,3,\dots$$

wynikają z różnych własności miary równowagi. Z gruba mówiąc, wszystkie otrzymane dotychczas rezultaty wynikają z faktu, że granicznym rozkładem punktów ekstremalnych jest miara równowagi.

W niniejszej pracy zajmiemy się m.in. zagadnieniem w pewnym sensie odwrotnym. Mianowicie, mając dowolną miarę RADONA, znajdziemy ciąg układów punktów, których granicznym rozkładem jest owa miara oraz spełniających pewne dodatkowe i jeśli chodzi o zastosowania, bardzo istotne warunki. Uzyskane przez nas rezultaty dają bądź odpowiedzi, bądź wskazują drogę do rozwiązania pewnych problemów dotychczas nie rozwiązanych. Mamy tu przede wszystkim na myśli problemy postawione przez Prof. LEJĘ w [16] i [17]. Również szereg innych zagadnień, rozwiązanych w pewnych szczególnych przypadkach, można przy pomocy uzyskanych przez nas rezultatów, rozwiązać w przypadkach ogólniejszych oraz nadać otrzymanym rezultatom bardziej jednolity charakter.

Autorowi nie są znane wogóle publikacje na temat potencjałów o jądrach więcej niż dwóch zmiennych. Mimo to szeregu prostych własności, np. półciągłości z dołu itp., nie będziemy ani dowodzić ani też zaznaczać, że przenoszą się one z przypadku potencjałów o jądrach dwu na przypadek większej ilości zmiennych.

Wobec dość szerokiego tematu niniejszej pracy,nie można było podać wszystkich wniosków, niejednokrotnie natychmiastowych, wynikających z udowodnionych przez nas twierdzeń. Wiele wniosków wyciągnie Czytelnik sam, zapoznawszy się z dotychczasowymi publikacjami o podobnej tematyce.

W naszych rozważaniach ograniczymy się do przypadku przestrzeni C^m, m zmiennych zespolonych (2m zmiennych rzeczywistych). Założenie parzystości przestrzeni nie jest założeniem istotnym. Wprowadzamy je tylko dlatego, żeby nie zmieniać pewnych oznaczeń wprowadzonych przez Prof. Leję (w [17] jest rozważany tylko przypadek przestrzeni C^m).

Oznaczenia i streszczenie wyników pracy. Niech C^m będzie przestrzenią m zmiennych zespolonych i niech $\omega(p_1,\dots,p_\alpha)$ będzie funkcją nieujemną, ciągłą i symetryczną $\alpha \geqslant 2$ punktów przestrzeni C^m. Niech E będzie zbiorem kompaktycznym przestrzeni C^m oraz $p^{(n)} = \{p_1,\dots,p_n\}$ dowolnym układem n punktów zbioru E.

Wiadomo [13], że ciąg

$$(1)\qquad V_n(E,\omega) = \left[\sup_{p^{(n)}\subset E} \prod_{1\leqslant i_1<\dots<i_\alpha\leqslant n} \omega(p_{i_1},\dots,p_{i_\alpha})\right]^{1/\binom{n}{\alpha}}$$

$n = \alpha, \alpha+1, \dots$ jest niemalejący, a wskutek tego zbieżny do pewnej skończonej granicy $V(E,\omega)$, zwanej rozwartością zbioru E ze względu na ω. W pewnych szczególnych przypadkach FEKETE [4] nazwał $V(E,\omega)$ średnicą pozaskończoną zbioru E ze względu na ω. Układ n punktów realizujących kres górny (1) nazywa się [13] n-tym układem ekstremalnym zbioru E ze względu na ω.

Niech z będzie dowolnym punktem przestrzeni C^m i niech $p^{(n)}$ oznacza układ $n \geqslant \alpha$ punktów przestrzeni C^m, takich że $\omega(p_{i_1},\dots,p_{i_\alpha})$ jest różna od zera dla każdego układu α różnych punktów z $p^{(n)}$. Utwórzmy cztery następujące iloczyny

$$A\left(z;p^{(n)}\right) \overset{\mathrm{df}}{=} \prod_{j=1}^{n} \prod_{\substack{1\leqslant i_2<\dots<i_\alpha\leqslant n \\ (i_\nu\neq j)}} \frac{\omega(z,p_{i_\alpha},\dots,p_{i_\alpha})}{\omega(p_j,p_{i_2},\dots,p_{i_\alpha})}$$

$$B^{(j)}\left(z;p^{(n)}\right) \overset{\mathrm{df}}{=} \prod_{\substack{1\leqslant i_2<\dots<i_\alpha\leqslant n \\ (i\neq j)}} \frac{\omega(z,p_{i_2},\dots,p_{i_\alpha})}{\omega(p_j,p_{i_2},\dots,p_{i_\alpha})}$$

$$(2)\quad C^{(j)}\left(z;p^{(n)}\right) \overset{\mathrm{df}}{=} \prod_{\substack{k=1 \\ (k\neq j)}}^{n} \prod_{\substack{1\leqslant i_3<\dots<i_\alpha\leqslant n \\ i_\nu\neq j,k}} \frac{\omega(z,p_j,p_{i_3},\dots,p_{i_\alpha})}{\omega(p_k,p_j,p_{i_3},\dots,p_{i_\alpha})}$$

$$D^{(j)}\left(z;p^{(n)}\right) \overset{\mathrm{df}}{=} B^{(j)}\left(z;p^{(n)}\right) \cdot C^{(j)}\left(z;p^{(n)}\right)$$

$j = 1,2,\dots,n$. Liczby czynników występujących w iloczynach są odpowiednio równe

$$\alpha_n \overset{\mathrm{df}}{=} \alpha\binom{n}{\alpha},\quad \beta_n \overset{\mathrm{df}}{=} \binom{n-1}{\alpha-1},\quad \gamma_n \overset{\mathrm{df}}{=} (\alpha-1)\binom{n-1}{\alpha-1},$$

$$\delta_n \overset{\mathrm{df}}{=} \alpha\binom{n-1}{\alpha-1}.$$

Oznaczmy odpowiednio przez $A_n(z)$, $B_n(z)$, $C_n(z)$, $D_n(z)$ kresy dolne wyrażeń:

$$A\left(z;p^{(n)}\right),\ \max_{(j)} B^{(j)}\left(z;p^{(n)}\right),\ \max_{(j)} C^{(j)}\left(z;p^{(n)}\right),\ \max_{(j)} D^{(j)}\left(z;p^{(n)}\right),$$

jeśli z jest punktem ustalonym a układ $p^{(n)}$ zmienia się dowolnie w zbiorze E. Utwórzmy dalej następujące średnie

$$(3)\quad a_n(z) = A_n(z)^{1/\alpha_n},\qquad d_n(z) = D_n(z)^{1/\delta_n}$$

$$n = \alpha, \alpha+1,\dots$$

$$(4)\quad b_n(z) = B_n(z)^{1/\beta_n},\qquad c_n(z) = C_n(z)^{1/\gamma_n}$$

$$n = \alpha, \alpha+1,\dots$$

Wiadomo [16] , że jeśli rozwartość $V(E,\omega)$ jest dodatnia, wówczas w każdym punkcie $z \in C^m$ istnieją granice

$$\lim_{n\to\infty} a_n(z) = a(z), \qquad \lim_{n\to\infty} d_n(z) = d(z)$$

oraz, że

$$a(z) = d(z) .$$

Wiadomo również [12] ,że jeśli $\alpha = 2$ i $V(E,\omega) > 0$, wówczas istnieją także granice

(5) $$\lim_{n\to\infty} b_n(z) = b(z) , \qquad \lim_{n\to\infty} c_n(z) = c(z)$$

i [1] w przypadku gdy $n = 1$, $\alpha = 2$, $\omega(p,q)$ jest odległością punktów p i q, wówczas dla każdego punktu $p \in E$, regularnego ze względu na problem DIRICHLETA dla składowej uzupełnienia zbioru E, która zawiera ∞ ,istnieje otoczenie U_0 tego punktu takie, że

(6) $$b(z) = c(z)$$

oraz

(6′) $$a(z) < b(z)$$

dla $z \in CE \cap U_0$.

W związku z powyższymi rezultatami Prof.LEJA postawił w [16] i [17] szereg nowych zagadnień. Zaznaczymy tutaj, że pytania w [16] i [17] nie pokrywają się.Następne nasze rozważania będą miały między innymi na celu bądź danie odpowiedzi na powyższe pytania, bądź też wskazanie drogi prowadzącej do rozwiązania tych zagadnień.

Niech p^k będzie k-tą współrzędną punktu p. Możemy założyć, bez zmniejszenia ogólności rozważań, że $p^k \geq 0$, $k = 1,\ldots 2m$ dla $p \in E$. Niech L będzie stałą >1 i taką , że dla $p \in E$ mamy $0 \leq p^k \leq L-1$, $k = 1,2,\ldots,2m$.Niech l będzie dowolną liczbą naturalną.

Rozważmy zbiory

$$E_{i_1 \dots i_{2m}} = \left(p \mid L\ \frac{i_k}{l} \leqslant p^k < L\ \frac{i_k + 1}{l}\ ,\right.$$

$$\left. i_k = 0,1,\dots,l-1,\quad k = 1,2,\dots,2m \right)$$

oraz zbiory

$$E_{i_1 \dots i_{2m}} = \left(p \mid p \in E,\ L\ \frac{i_k}{l} \leqslant p^k \leqslant L\ \frac{i_k + 1}{l} - \varepsilon_l\ ,\right.$$

$$\left. i_k = 0,1,\dots,l-1, \quad k = 1,2,\dots,2m \right)$$

gdzie ε_l jest dowolnie ustaloną liczbą spełniającą nierówność $0 < \varepsilon_l < \frac{1}{l}$. Połóżmy

$$E_l \overset{df}{=} \sum_{0 \leqslant i_1, \dots, i_{2m} \leqslant l-1} E^{\varepsilon_l}_{i_1 \dots i_{2m}}$$

Niech M oznacza klasę miar nieujemnych RADONA o nośnikach zawartych w E takich, że $v(E) = 1$ dla $v \in M$ oraz niech E^v będzie nośnikiem miary v. Niech dalej μ będzie pewną dowolnie ustaloną miarą klasy M a M^μ_l niech oznacza podklasę miar klasy M, o nośnikach zawartych w E_l oraz takich, że $E^v \subset E_l \cap E^\mu$,

$$v\left(E^{\varepsilon_l}_{i_1 \dots i_{2m}}\right) = \frac{\mu\left(E^{\varepsilon_l}_{i_1 \dots i_{2m}}\right)}{\mu(E_l)} \quad (v \in M^\mu_l)$$

dla każdego zbioru $E^{\varepsilon_l}_{i_1 \dots i_{2m}}$. Ponieważ

$$E^v \subset E = \sum_{0 \leqslant i_1, \dots, i_{2m} \leqslant l-1} E_{i_1 \dots i_{2m}}$$

dla $v \in M$ więc, dla ustalonej wyżej miary μ, możemy znaleźć ε_l takie, że

$$(7)\qquad \mu(E_l) > \mu(E) - \frac{1}{l}\,, \qquad l = 1,2,\dots\ .$$

Oznaczmy

$$(8)\quad U^{(j)}\left(p^{(n)}\right) \stackrel{df}{=} \frac{1}{\binom{n-1}{\alpha-1}} \sum_{\substack{1 \le i < \dots < i_\alpha \le n \\ (i_\nu \ne j)}} \log \frac{1}{\omega(p_j, p_{i_2}, \dots, p_{i_\alpha})}$$

$j = 1,2,\dots,n$.

$$U(v;p_1) \stackrel{df}{=} \int_E \dots \int_E \log \frac{1}{\omega(p_1,p_2,\dots,p_\alpha)}\, d\,v(p_2)\dots d\,v(p_\alpha)$$

$$I(v) \stackrel{df}{=} \int_E U(v;p_1)\, d\,v(p_1)$$

$$a(v;z) \stackrel{df}{=} \int_E \dots \int_E \log \frac{\omega(z,p_2,p_3,\dots,p_\alpha)}{\omega(p_1,p_2,p_3,\dots,p}\, d\,v(p_1)\dots d\,v(p_\alpha)$$

$$b(v;p_1,z) \stackrel{df}{=} \int_E \dots \int_E \log \frac{\omega(z,p_2,\dots,p_\alpha)}{\omega(p_1,p_2,\dots,p_\alpha)}\, d\,v(p_2)\dots d\,v(p_\alpha)$$

$$c(v;p_1,z) \stackrel{df}{=} \int_E \dots \int_E \log \frac{\omega(z,p_1,p_3,\dots,p_\alpha)}{\omega(p_2,p_1,p_3,\dots,p_\alpha)}\, dv(p_2)\dots dv(p_\alpha)$$

$$b(v;z) \stackrel{df}{=} \sup_{p_1 \in E^\nu} b(v;p_1,z)$$

$$c(v;z) \stackrel{df}{=} \sup_{p_1 \in E^\nu} c(v;p_1,z)$$

$$\bar{a}(z) \stackrel{df}{=} \inf_{v \in M} a(v;z)$$

$$\bar{b}(z) \stackrel{df}{=} \inf_{v \in M} b(v;z)$$

$$\bar{c}(z) \stackrel{df}{=} \inf_{v \in M} c(v;z)$$

Funkcję $U(v; p_1)$ będziemy nazywać potencjałem o jądrze $\alpha \geq 2$ zmiennych. Można udowodnić, drogą podobną jak w [5], że istnieje miara μ_1 taka, że

$$(9) \qquad I(\mu_1) = \inf_{v \in M_1^{\mu}} I(v)$$

Definicja 1. Liczbę $C^{(1)}(E_1, \omega) = 1/I(\mu_1)$ będziemy nazywać pojemnością nieswobodną zbioru E_1 względem funkcji ω i miary μ. Jeśli jeden ze zbiorów $E^{\varepsilon_1}_{i_1 \ldots i_{2m}}$ jest całym zbiorem E a pozostałe są zbiorami pustymi, wówczas liczbę tę będziemy nazywać pojemnością zbioru E względem ω. Jest to naturalne uogólnienie definicji pojemności, znanej w przypadku $\alpha = 2$.

Definicja 2. Miarę μ_1 określoną przez równość (9) nazywamy nieswobodną miarą równowagi zbioru E_1 względem funkcji ω i miary μ. Jeśli jeden ze zbiorów $E^{\varepsilon_1}_{i_1 \ldots i_{2m}}$ jest całym zbiorem E a pozostałe zbiorami pustymi, miarę tę nazywamy miarą równowagi zbioru E względem ω.

Definicja 3. Mówimy, że funkcja ω spełnia zasadę maksimum (zob. [5]), jeśli dla każdej miary $v \in M_1$

$$U(v; z) \leq \sup_{p_1 \in E^v} U(v; p_1)$$

dla każdego $z \in C^m$.

Definicja 4. Mówimy, że funkcja ω spełnia zasadę maksimum w sąsiedztwie zbioru E, jeśli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór otwarty $V(\varepsilon)$ zawierający E taki, że

$$U(v; p_1) \leq \sup_{p_1 \in E^v} U(v; p_1) + \varepsilon$$

dla $p_1 \in V(\varepsilon)$ oraz $v \in M$.

Definicja 4 jest pewną modyfikacją tak zwanej "vicinal domination principle" (zob. [18]).

Niech n będzie dowolną liczbą naturalną i niech μ będzie wyżej ustaloną miarą. Wybierzmy w każdym ze zbiorów $E^{\varepsilon_1}_{i_1 \dots i_{2m}}$, $\left[n\,\mu(E^{\varepsilon_1}_{i_1 \dots i_{2m}}) / \mu(E_1)\right]$ lub

$\left[n\,\mu(E^{\varepsilon_1}_{i_1 \dots i_{2m}}) / \mu(E_1)\right] + 1$ punktów ([a] oznacza największą z liczb całkowitych $\leqslant a$), w ten sposób, żeby suma wszystkich punktów była równa n i oznaczmy ten układ przez $p^{(n,1)} = \{p_1^{(n,1)}, \dots, p_n^{(n,1)}\}$. Niech $q^{(n,1)} = \{q_1^{(n,1)}, \dots, q_n^{(n,1)}\}$ będzie takim układem, że dla każdego $p^{(n,1)}$

$$\prod_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_\alpha \leqslant n} \omega(q_{i_1}^{(n,1)}, \dots, q_{i_\alpha}^{(n,1)}) \geqslant \prod_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_\alpha \leqslant n} \omega(p_{i_1}^{(n,1)}, \dots, p_{i_\alpha}^{(n,1)}) \tag{10}$$

Układ $q^{(n,1)}$ nazywa się [14] n-tym układem ekstremalnym nieswobodnym zbioru E_1 ze względu na funkcję ω oraz miarę μ.

Połóżmy

$$v_n^{(1)}(E_1,\omega) = \left[\prod_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_\alpha \leqslant n} \omega(q_{i_1}^{(n,1)}, \dots, q_{i_\alpha}^{(n,1)})\right]^{1/\binom{n}{\alpha}}.$$

Obecnie wypowiemy szereg twierdzeń, których dowody podamy w następnym rozdziale.

<u>Twierdzenie 1.</u> Jeżeli μ_1 jest pewną nieswobodną miarą równowagi, wówczas ciąg $\{v_n^{(1)}(E_1,\omega)\}$ jest zbieżny do $\exp\left[-I(\mu_1)\right]$.

<u>Uwaga 1.</u> Z twierdzenia 1 wynikają, jako szczególne wnioski, pewne rezultaty uzyskane na innej, nieco dłuższej, drodze w pracach [3,8,14].

Uwaga 2. Z twierdzenia 1 wynika również, jako szczególny wniosek, że pojemność zbioru E jest równa $1/\log 1/v(E,\omega)$.

W dalszym ciągu przez F^{μ} będziemy oznaczać część nośnika miary μ zawartą w F.

Twierdzenie 2. Jeżeli μ_1 jest nieswobodną miarą równowagi oraz $E^{\varepsilon_1}_{i_1 \dots i_{2m}}$ dowolnie ustalonym zbiorem, wówczas

$$(11) \qquad U(\mu_1;z) = \sup_{p_1 \in (E^{\varepsilon_1}_{i_1 \dots i_{2m}})} U^{\varepsilon_1}(\mu_1;p_1)_{\mu_1}$$

dla $z \in (E^{\varepsilon_1}_{i_1 \dots i_{2m}})^{\mu_1}$, poza co najwyżej zbiorem o μ_1 - mierze równej zeru.

Uwaga 1. Z twierdzenia 2 wynika w szczególności, że jeśli μ jest miarą równowagi (def.2), wówczas

$$(11') \qquad U(\mu;z) = \sup_{p_1 \in E^{\mu}} U(\mu;p_1)$$

dla $z \in E^{\mu}$, poza co najwyżej zbiorem o μ-mierze równej zeru.

Uwaga 2. Jeżeli funkcja ω spełnia zasadę maksimum (def.3) oraz μ jest miarą równowagi, wówczas na podstawie uwagi 1,

$$(11'') \qquad U(\mu;z) = \sup_{p_1 \in E} U(\mu;p_1)$$

poza co najwyżej zbiorem o μ-mierze równej zeru.

Uwaga 3. W przypadku $\alpha = 2$ wiadomo było wcześniej, że (11), (11') i (11'') zachodzą poza zbiorem o pojemności zero.

W dalszym ciągu wprowadzimy dla uproszczenia założenie, że jeśli μ_1 jest nieswobodną miarą równowagi, wówczas dla $z \in \left(E^{\varepsilon_1}_{i_1 \dots i_{2m}}\right)^{\mu_1}$, $U(\mu_1;z) = \sup_{p_1 \in \left(E^{\varepsilon_1}_{i_1 \dots i_{2m}}\right)^{\mu_1}} U(\mu_1 \dots p_1)$ x/

oraz, że

$\omega(p_1,\dots,p_\alpha) \leqslant 1$, $\omega(z,p_2,\dots,p_\alpha) / \omega(p_1,\dots,p_\alpha) \geqslant d(z) > 0$
dla $p_1,\dots,p \in E$.

Twierdzenie 3. Istnieje ciąg układów punktów $\{p^{(n,1)}\}$ taki, że jeśli

$$\bar{\mu}_n(e) \overset{df}{=} \frac{k}{n},$$

gdzie k oznacza ilość punktów układu $p^{(n,1)}$ zawartych w e, wówczas dowolny podciąg $\{\mu_{n_k}\}$ zbieżny słabo xx/, jest zbieżny do pewnej miary równowagi μ_1 oraz dla dowolnego ciągu punktów $\left\{p^{(n_k,1)}_{m_k}\right\}$ zbieżnego do pewnego punktu p_o,

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} U^{(m_k)}\left(p^{(n_k,1)}\right) \leqslant U(\mu_1;p_o)$$

Twierdzenie 4. Dla ustalonej miary μ klasy M istnieje ciąg układów punktów $\{p^{(n)}\}$ taki, że

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{\max_{(j)} U^{(j)}\left(p^{(n)}\right) \leqslant \sup_{p_1 \in E^{\mu}} U(\mu;p_1)\right.$$

W podobny sposób można udowodnić (zob. dowód twierdzenia 4)

---

x/ Zasadnicze rezultaty niniejszej pracy można otrzymać bez tego założenia.

xx/ Ciąg miar $\{v_n\}$ nazywamy zbieżnym słabo do miary v, jeśli dla każdej funkcji ciągłej f(p),

$$\int_E f(p)\, d\, v_n(p) \to \int_E f(p)\, d\, v(p)$$

gdy $n \to \infty$ (zob. [18]).

Twierdzenie 5. Dla każdej miary $\mu \in M$ istnieją dwa ciągi układów punktów: $\{\overline{p}^{(n)}\}$ i $\{\overline{\overline{p}}^{(n)}\}$ takie, że

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\max_{(j)} \frac{1}{\beta_n} \log B^{(j)}\left(z;\, p^{(n)}\right)\right\} \leq$$

$$\leq \sup_{p_1 \in E^{\mu}} b(\mu;\, p_1, z) = b(\mu;\, z)\,,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\max_{(j)} \frac{1}{\gamma_n} \log C^{(j)}\left(z;p^{(n)}\right)\right\} \leq \sup_{p_1 \in E^{\mu}} c_{\mu}(\mu;p_1,z) = c(\mu;z)\,.$$

Na podstawie twierdzenia 5 oraz definicji $b_n(z)$ i $c_n(z)$ mamy

Twierdzenie 6. Dla każdego ustalonego z oraz dla każdej miary $v \in M$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n(z) \leq b\,(v;\, z), \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, c_n(z) < c\,(v;\, z)\,.$$

Z twierdzenia 6 wynika od razu

Twierdzenie 6'. Dla każdego dowolnie ustalonego z,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n(z) \leq \overline{b}(z)\,, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, c_n(z) \leq \overline{c}(z)\,.$$

Ponieważ twierdzenia 6 i 6' są konsekwencją twierdzenia 5 i ponieważ dowód twierdzenia 5 jest podobny do dowodu twierdzenia 4 więc w celu otrzymania twierdzeń 4,5,6 i 6' wystarczy udowodnić twierdzenie 4.

Twierdzenie 7. Jeżeli dla jakiegoś ustalonego z,

$$\frac{\omega(z,\, p_2, \ldots, p_\alpha)}{\omega(p_1, p_2, \ldots, p_\alpha)}$$

jest funkcją ciągłą i dodatnią /ograniczoną lub nie/ dla $p_1, p_2, \ldots, p_\alpha \in E$ x/, wówczas

(12) $$\lim_{n\to\infty} \log a_n(z) = \bar{a}(z)$$

(13) $$\lim_{n\to\infty} \log b_n(z) = \bar{b}(z)$$

(14) $$\lim_{n\to\infty} \log c_n(z) = \bar{c}(z)$$

Uwaga 1. Twierdzenie 7 daje pewne odpowiedzi na pytania postawione przez Prof. LEJĘ w [16] i [17] dotyczące zbieżności ciągów $\{b_n(z)\}$ i $\{c_n(z)\}$.

Twierdzenie 8. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby istniał punkt $z_o \in E$ taki, że

(15) $$\bar{a}(z) < 0$$

w pewnym otoczeniu U_o punktu z_o, jest żeby istniała pewna miara $v \in M$ taka, że

(16) $$U(v; z) < \sup_{p_1 \in E} U(v; p_1)$$

w pewnym podzbiorze E_o zbioru E o v-mierze dodatniej.

Uwaga 1. Twierdzenie 8 mówi, że zawsze zachodzi nierówność (16), jeśli tylko istnieje chociaż jedna miara, która nie jest miarą równowagi. Otóż okazuje się, że w szczegól-

x/ Tzn. w punktach, w których nie jest określona, da się określić tak, że otrzymana funkcja będzie ciagła.

nie ważnych przypadkach miara równowagi jest tylko jedna . Jedna jest np. w przypadku $\alpha = 2$ i $\omega(p_1, p_2) = |p_1 p_2|$ dla $n = 2$ oraz $\omega(p_1, p_2) = \exp\left[-|p_1 p_2|^{2-n}\right]$ dla $n \geq 3$ /n oznacza tu wymiar przestrzeni rzeczywistej a $|pq|$ odległość punktów p i q/. Zatem w tych przypadkach zachodzi (16) a więc i (15).

Można również udowodnić, drogą podobną jak w przypadku $\alpha = 2$, że miara równowagi jest jedyna w przypadku

$$\omega(p_1, \ldots, p_\alpha) = \prod_{1 \leq j < k \leq \alpha} |p_j p_k|$$

dla $n = 2$ oraz

$$\omega(p_1, \ldots, p_\alpha) = \prod_{1 \leq j < k \leq \alpha} \exp\left[-|p_j p_k|^{2-n}\right]$$

dla $n \geq 3$.

Istnieją jednak funkcje, dla których każda miara klasy M jest miarą równowagi. Przykładem takiej funkcji jest

$$\omega(p_1, \ldots, p_\alpha) = \text{const} > 0 .$$

Twierdzenie 9. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, żeby

(17) $$\bar{b}(z_0) = 0$$

oraz

(18) $$\lim_{z \to z_0} \bar{b}(z) = \bar{b}(z_0)$$

dla każdego $z_0 \in E$, jest, żeby funkcja ω spełniała zasadę maksimum w sąsiedztwie zbioru E.

Uwaga 1. Twierdzenia 7 i 9 dają odpowiedź na pytanie 5° w [16] oraz na pytanie 5° w [17] .

Uwaga 2. Jeżeli $\omega(p_1, \ldots, p_\alpha) = \prod_{1 \leq j < k \leq \alpha} |p_j p_k|$, wówczas założenia twierdzeń 8 i 9 są spełnione, zatem istnieje punkt $z_o \in E$ oraz otoczenie U_o tego punktu takie, że $\bar{a}(z) < \bar{b}(z)$ dla $z \in U_o$ /zob. pytanie 3^o w [16] i pytanie 3^o w [17] /.

Uwaga 3. W szczególnym przypadku, gdy $\alpha = 2$, $m = 2$, nierówność (6′), jak już powiedzieliśmy, została udowodniona w mojej pracy [1], na zupełnie innej, nie prowadzącej w ogólnym przypadku do celu, drodze.

Uwaga 4. W szczególnie ważnym przypadku, gdy $\omega(p_1,\dots,p_\alpha) = \exp\left[-|p_j p_k|^{2-n}\right]$, założenia twierdzeń 8 i 9 są spełnione. Zatem w tym przypadku zachodzi równość (6).

Obecnie podamy jeszcze kilka uwag à propos równości (6) oraz pytania 4^o w [17].

Odpowiedź na pytanie 4^o jest negatywna. Podamy bowiem w następnym rozdziale przykład /przykład 1/ takiego zbioru i takiej funkcji ω, dla których równość, o jakiej mowa w pytaniu 4^o, nie zachodzi. Podamy również przykład /przykład 2/ takiego zbioru i takiej funkcji ω, dla których ciąg występujący w pytaniu 4^o w ogóle nie jest zbieżny.

Na podstawie rezultatów uzyskanych w niniejszej pracy oraz na podstawie mojej pracy [2] można podać pewne warunki, przy których odpowiedź na pytanie 4^o jest pozytywna oraz przy których zachodzi równość (6). Przypadek, gdy $\alpha = 2$ oraz $\omega(p_1,p_2) = |p_1 p_2|$ dla $n = 2$, $\omega(p_1,p_2) = \exp\left[-|p_1 p_2|^{2-n}\right]$ dla $n \geq 3$ /n wymiar przestrzeni rzeczywistej/ został rozważony w mojej pracy [2], Jeśli chodzi o samo pytanie 4^o, również pożyteczną może się okazać praca [20].

Aby jednak nie przedłużać naszej pracy, nie będziemy dokładnie formułować warunków, przy których zachodzi równość (6) oraz warunków, przy których odpowiedź na pytanie 4^o jest pozytywna.

<u>Dowody twierdzeń.</u> <u>Dowód twierdzenia 1.</u> Niech $q^{(n,l)}$ będzie n-tym układem ekstremalnym nieswobodnym. Na mocy (10) mamy

$$(19) \quad \sum_{1\le i_1<\dots<i_\alpha\le n} \log \frac{1}{\omega(p_{i_1},\dots,p_{i_\alpha})} \geqslant \sum_{1\le i_1<\dots<i_\alpha\le n} \log \frac{1}{\omega\left(q_{i_1}^{(n,l)},\dots,q_{i_\alpha}^{(n,l)}\right)}$$

dla każdego układu $p^{(n,l)} = \{p_1,\dots,p_n\}$ takiego, że w każdym ze zbiorów $E_{i_1\dots i_{2m}}^{\varepsilon_1}$ jest tyle punktów układu $p^{(n,l)}$ ile jest punktów układu $q^{(n,l)}$.

Niech p_k będzie pewnym punktem układu $p^{(n,l)}$. Jeśli $p_k \in E_{i_1(k)\dots i_{2m(k)}}^{\varepsilon_1}$, wówczas przez $\mu_l^{p_k}$ będziemy oznaczać zacieśnienie miary μ_l do $E_{i_1(k)\dots i_{2m(k)}}$ /tj. $\mu_l^{p_k}(e) \stackrel{df}{=} \mu_l\left(e \cap E_{i_1(k)\dots i_{2m(k)}}\right)$ /. Całkując obie strony nierówności (19) względem miary

$$\frac{\mu_l^{p_1}}{\mu_l^{p_1}(E)} \times \dots \times \frac{\mu_l^{p_n}}{\mu_l^{p_n}(E)}$$

otrzymamy

$$\sum_{1\le i_1<\dots<i_\alpha\le n} I_{i_1\dots i_\alpha} \geqslant \sum_{1\le i_1<\dots<i_\alpha\le n} \log \frac{1}{\omega\left(q_{i_1}^{(n,l)},\dots,q_{i_\alpha}^{(n,l)}\right)}$$

gdzie

$$I_{i_1\dots i_\alpha} \stackrel{df}{=}$$

$$= \frac{1}{\mu_l^{p_{i_1}}(E)\dots\mu_l^{p_{i_\alpha}}(E)} \int_E \dots \int_E \log \frac{1}{\omega(p_{i_1},\dots,p_{i_\alpha})} \, d\mu_l^{p_{i_1}}(p_{i_1}) \dots$$

$$\dots d\mu_l^{p_{i_\alpha}}(p_{i_\alpha})$$

czyli

$$\binom{n}{\alpha} I(\mu_1) \geqslant \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_\alpha \leqslant n} \log \frac{1}{\omega\left(q_{i_1}^{(n,1)}, \dots, q_{i_\alpha}^{(n,1)}\right)} + O(n^{\alpha-1}) =$$

$$= \binom{n}{\alpha} \log \frac{1}{v_n^{(1)}(E_1, \omega)} + O(n^{\alpha-1}) .$$

Dzieląc ostatnią nierówność przez $\binom{n}{\alpha}$ otrzymujemy

(20) $$I(\mu_1) \geqslant \log \frac{1}{v_n^{(1)}(E_1, \omega)} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Niech $\{n_k\}$ będzie ciągiem liczb naturalnych takich, że

(21) $$\varliminf_{n\to\infty} \log \frac{1}{v_n^{(1)}(E_1,\omega)} = \lim_{k\to\infty} \log \frac{1}{v_{n_k}^{(1)}(E_1,\omega)} ,$$

Połóżmy $v_n(e) \overset{df}{=} \frac{k}{n}$, gdzie k oznacza liczbę punktów układu $q^{(n,1)}$ zawartych w e. Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy założyć, że ciąg $\{v_{n_k}\}$, dla określonego wyżej n jest zbieżny słabo do pewnej miary μ_1^* /bo ciąg $\{v_n\}$ posiada podciąg zbieżny, zob. [5]/. Oczywiście $\mu_1^* \in M_1^{\mu}$.

Niech δ będzie dowolną liczbą dodatnią oraz

$$\omega(p_1, \dots, p_\alpha) \overset{df}{=} \begin{cases} \omega(p_1, \dots, p_\alpha), & \text{jeśli } \omega(p_1, \dots, p_\alpha) \geqslant \delta \\ \delta, & \text{jeśli } \omega(p_1, \dots, p_\alpha) < \delta \end{cases}$$

Na podstawie definicji całki, dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ możemy znaleźć $\delta(\varepsilon)$ takie, że

$$(22) \quad \int_E \cdots \int_E \log \frac{1}{\omega_\delta(p_1,\dots,p_\alpha)} \, d\mu_1^*(p_1)\dots d\mu_1^*(p_\alpha) >$$

$$> I(\mu_1^*) - \varepsilon$$

Ponieważ $v_{n_k} \to \mu_1^*$ i ponieważ $\log \frac{1}{\omega_\delta(p_1,\dots,p_\alpha)}$ jest

ciągła,więc na mocy (21) i (22) oraz definicji μ_1

$$\lim_{k\to\infty} \log \frac{1}{v_{n_k}^{(1)}(E_1,\omega)} \geqslant \underline{\lim}_{k\to\infty} \log \frac{1}{v_{n_k}^{(1)}(E_1,\omega_\delta)} \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{k\to\infty} \left[\frac{n_k^\alpha}{\alpha! \binom{n_k}{\alpha}} \int_E \cdots \int_E \log \frac{1}{\omega_\delta(p_1,\dots,p_\alpha)} \, dv_{n_k}(p_1)\dots dv_{n_k}(p_\alpha) - \right.$$

$$\left. - \frac{n_k^\alpha - \alpha!\binom{n_k}{\alpha}}{\alpha!\binom{n_k}{\alpha}} \log \frac{1}{\delta} \right] > I(\mu_1^*) - \varepsilon \geqslant I(\mu_1) - \varepsilon .$$

Ponieważ ε jest dowolną liczbą dodatnią,więc na mocy ostatniej nierówności oraz (21)

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \log \frac{1}{v_n^{(1)}(E_1,\omega)} \geqslant I(\mu_1)$$

Stąd oraz z (20) wynika teza twierdzenia 1.

Dowód twierdzenia 2. W dowodzie posłużymy się metodą wariacyjną używaną w teorii potencjału /zob. [5] /.

Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy założyć,że $\omega(p_1,\dots,p_\alpha) \leqslant 1$ dla $p_1,\dots,p_\alpha \in E$. W razie potrzeby moglibyśmy rozważyć ω/K zamiast ω, gdzie K jest liczbą dodatnią $\geqslant \sup_{p_1,\dots,p_\alpha \in E} \omega$. Z równości bowiem

$$\int\limits_E \cdots \int\limits_E \log \frac{K}{\omega(p_1,\ldots,p_\alpha)}\, d\,v(p_2)\ldots d\,v(p_\alpha) =$$

$$= U(v;p_1) + \log K,$$

$$\int\limits_E \cdots \int\limits_E \log \frac{K}{\omega(p_1,p_2,\ldots,p_\alpha)}\, d\,v(p_1)\ldots d\,v(p_\alpha) =$$

$$= I(\mu) + \log K$$

wynika, że

$$\int\limits_E \cdots \int\limits_E \log \frac{K}{\omega(p_1,p_2,\ldots,p_\alpha)}\, d\,v(p_2)\ldots d\,v(p_\alpha) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_E \cdots \int\limits_E \log \frac{K}{\omega(p_1,\ldots,p_\alpha)}\, d\,v(p_1)\ldots d\,v(p_\alpha)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $U(v;p_1) \leqslant I(v)$.

W przypadku, gdy $C^{(1)}(E_1,\omega) = 0$, twierdzenie 2 jest oczywiste. Załóżmy więc, że $C^{(1)}(E_1,\omega)>0$. Oznaczmy dla krótkości zbiór $E^{\varepsilon_1}_{i_1\ldots i_{2m}}$ występujący w twierdzeniu 2 przez E_1 a sumę pozostałych zbiorów przez E_2. Przypuśćmy dla dowodu niewprost, że istnieje liczba $\varepsilon>0$ i zbiór domknięty E_1^o o μ_1-mierze dodatniej taki, że

$$U(\mu_1;z) < \sup_{p_1\in E_1^{\mu_1}} U(\mu_1;p_1) - 2\varepsilon \tag{23}$$

dla $z\in E_1^o$. Niech p_1^o będzie punktem zbioru $E_1^{\mu_1}$ takim, że

$$U(\mu_1;p_1^o) > \sup_{p_1\in E_1^{\mu_1}} U(\mu_1;p_1) - \varepsilon \quad .$$

Ponieważ funkcja $U(\mu_1;p_1)$ jest półciągła z dołu, więc istnieje otoczenie U_o punktu p_1^o takie, że

$$(24) \qquad U(\mu_1;z) > \sup_{p_1 \in E_1^{\mu_1}} U(\mu_1;p_1) - \varepsilon$$

dla $z \in U_o$.

Połóżmy

$$\bar{v}(e) \overset{df}{=} \begin{cases} \dfrac{m}{\mu_1(E^o_1)}\mu_1(e) & \text{dla } e \subset E_1^o \\ -\mu_1(e) & \text{dla } e \subset U_o \\ 0 & \text{poza } E_1^o \text{ i } U_o \end{cases}$$

gdzie $m \overset{df}{=} \mu_1\left(E_1^{\mu_1} \cap U_o\right)$. Ponieważ $\bar{v}(E_o) = 0$, więc dla każdego $0 < \lambda < 1$, $\mu_1 + \lambda v \in M_1^{\mu}$. Dalej mamy

$$I(\mu_1 + \lambda\bar{v}) - I(\mu_1) = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} \lambda^k I^{k,\alpha-k} -$$

$$- I(\mu_1) = \sum_{k=1} \binom{\alpha}{k} \lambda^k I^{k,\alpha-k}$$

gdzie

$$I^{k,\alpha-k} \overset{df}{=} \int_E \cdots \int_E \left[\int_E \cdots \int_E \log \frac{1}{\omega(p_1,\ldots,p_\alpha)} d\mu_1(p_1)\ldots \right.$$

$$\left. \ldots d\mu_1(p_k)\right] \ldots d\,v(p_{k+1}) \ldots d\,v(p_\alpha) =$$

$$= \sum^{\alpha-k} (-1)^j \binom{\alpha-k}{j} \left[\frac{m}{\mu_1(E_1^o)} \right]^j \int_{E_1^o} \cdots \int_{E_1^o} \left\{ \int_{U_o} \cdots \right.$$

$$\int_{U_o} \cdots \left[\int_E \cdots \int_E \log \frac{1}{\omega(p_1,\ldots,p_\alpha)} d\mu_1(p_1)\ldots \right.$$

$$\left. \ldots d\mu_1(p_k)\right] d\mu_1(p_{k+1})\ldots d\mu_1(p_{\alpha-j})\Big\} d\mu_1(p_{\alpha-j+1})\ldots$$

$$\ldots d\mu_1(p_\alpha)$$

Ponieważ $\omega \leq 1$, więc z ostatniej równości wynika, że istnieje stała $K_1 > 0$ taka, że $|I^{k,\alpha-k}| \leq K_1$ dla $k = 1,2,\ldots,\alpha$. Stąd

$$I(\mu_1 + \lambda v) - I(\mu_1) \leq \lambda \left[\binom{\alpha}{1} I^{1,\alpha-1} + \right.$$
$$\left. + \lambda \sum_{k=2}^{\alpha} \lambda^{k-2} \binom{\alpha}{k} K_1 \right] .$$

Dalej na mocy (23) i (24) mamy

$$I^{1,\alpha-1} = \left[\frac{m}{\mu_1(E^o_1)}\right] \int_{E_1^o} U(\mu_1;p_1)\, d\mu_1(p_1) -$$
$$- \int_{U_o} U(\mu_1;p_1)\, d\mu_1(p_1) <$$
$$< \frac{m}{\mu_1(E^o_1)} \int_{E_1^o} \left[\sup_{p_1 \in E_1} U_{\mu_1}(\mu_1;p_1) - 2\varepsilon\right] d\mu_1(p_1) -$$
$$- \int_{U_o} \left[\sup_{p_1 \in E} U_{\mu_1}(\mu_1;p_1) - \varepsilon\right] d\mu_1(p_1) =$$
$$= m\left[\sup_{p_1 \in E_1} U_{\mu_1}(\mu_1;p_1) - 2\varepsilon\right] -$$
$$- m\left[\sup_{p_1 \in E_1} U_{\mu_1}(\mu_1;p_1) - \varepsilon\right] = -m\varepsilon < 0$$

Zatem

$$I(\mu_1 + \lambda \bar{v}) - I(\mu_1) < \lambda \left[-\alpha m \varepsilon + \right.$$
$$\left. + \lambda \sum_{k=2} \lambda^{k-2} \binom{\alpha}{2} K_1 \right] < 0$$

dla dostatecznie małego λ, a więc μ_1 nie realizuje kresu dolnego $\inf\limits_{v\in M_1^\mu} I(v)$, wbrew założeniu. Twierdzenie 2 jest zatem udowodnione.

Dowód twierdzenia 3. Oznaczmy dla krótkości zbiory $E^{\varepsilon_1}_{i_1\ldots i_{2m}}$ przez $F_1,\ldots,F_p$, a liczby punktów układu ekstremalnego nieswobodnego $q^{(n,1)}$ zawartych w zbiorach $F_1,\ldots,F_p$, odpowiednio przez $n^1,\ldots,n^p$. Niech

$$A^i_n \overset{df}{=} \Big[\sum_{p_j\in F_i} U^{(j)}\big(q^{(n,1)}\big)\Big]/n^i \quad ,$$

gdy $n^i > 0$ oraz $A^i_n \overset{df}{=} 0$, gdy $n^i = 0$. Oznaczmy dalej przez $n(F_i,\varepsilon)$ ilość tych punktów układu $q^{(n,1)}$ zawartych w F_i, dla których

$$U^{(j)}\big(q^{(n,1)}\big) > A^i_n + \varepsilon$$

Najpierw udowodnimy następujący

Lemat. Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ i dla każdego zbioru F_i, $i=1,2,\ldots,p$, ciąg $\left\{\dfrac{n(F_i,\varepsilon)}{n}\right\}$ jest zbieżny do zera, gdy $n\to\infty$.

Dowód lematu. Gdyby lemat był fałszywy wówczas potrafilibyśmy dobrać liczbę $\varepsilon_o > 0$, zbioru F_{io} oraz ciąg $\{n_k\}$ taki, że

$$\text{(a)}\qquad \frac{n_k(F_{io},\varepsilon_o)}{n_k} \longrightarrow a > 0 \quad ,$$

gdy $k\to\infty$. Niech $\bar{v}_n(e) \overset{df}{=} \dfrac{\bar{k}}{n}$, $\bar{\bar{v}}_n(e) \overset{df}{=} \dfrac{\bar{\bar{k}}}{n}$, gdzie $\bar{k}$ i $\bar{\bar{k}}$ oznaczają ilość punktów odpowiednio układu $q^{(n,1)}$ zawartych w e oraz tych punktów $q_j^{(n,1)}$ układu $q^{(n,1)}$ zawartych w

zbiorze $e \cap F_{io}$, dla których $U^{(j)}\left(q^{(n,1)}\right) > A_n^{io} + \varepsilon_o$.
Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy założyć, że ciągi $\left\{\overline{V}_{n_k}\right\}$ i $\left\{\overline{\overline{V}}_{n_k}\right\}$ są zbieżne słabo odpowiednio do μ_1 i v^*. Ze względu na tw. 1, miara μ_1 jest nieswobodną miarą równowagi. Niech

$$A_o \overset{df}{=} \varliminf_{k\to\infty} A_{n_k}^{io}, \quad \log_k x \overset{df}{=} \min(\log x, \log k)$$

oraz

$$U^k(v,p_1) \overset{df}{=} \int_E \ldots \int_E \log_k \frac{1}{\omega(p_1,\ldots,p_\alpha)} dv(p_2)\ldots$$

$$\ldots dv(p_\alpha).$$

Oznaczmy dalej przez $F^n_{i,\varepsilon}$ zbiór tych punktów układu $q^{(n,1)}$ zawartych w F_i dla których $U^{(j)}\left(q^{(n,1)}\right) > A_n^i + \varepsilon$. Na mocy warunku (a) dla dowolnej liczby $K > 0$

$$\varliminf_{k\to\infty}\left\{\left[\sum_{p_j\in F^{n_k}_{i_o,\varepsilon_o}} U^{(j)}\left(q^{(n,1)}\right) + \sum_{p_j\in F_{i_o}-F^{n_k}_{i_o,\varepsilon_o}} U^{(j)}\left(q^{(n_k,1)}\right)\right]\Big/ n_k^{io}\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \varliminf_{k\to\infty}\left\{\left[\left(A^{i_o}_{n_k} + \varepsilon_o\right) n_k\left(F_{i_o,\varepsilon_o}\right) + \sum_{p_j\in F_{i_o}-F^{n_k}_{i_o,\varepsilon_o}} U^{(j)}\left(q^{(n_k,1)}\right)\right]\Big/ n_k^{i_o}\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \varliminf_{\to\infty} \frac{n_k}{n_k^{i_o}} \left[\left(A^{i_o}_{n_k} + \varepsilon_o\right)\frac{n_k\left(F_{i_o},\varepsilon_o\right)}{n_k} + \int_F U^k\left(\overline{v}_{n_k},p\right)\right.$$

$$\left. d\left\{\overline{v}_{n_k}(p) - \overline{\overline{v}}_{n_k}(p)\right\}\right] =$$

$$= \frac{1}{\mu_1\left(F_{i_o}\right)} \left[\left(A_o + \varepsilon_o\right) a + \int_{F_{i_o}} U^k(\mu_1;p)\, d\left\{\mu_1(p) - v^*(p)\right\}\right]$$

Wobec dowolności liczby $k > 0$ mamy stąd na podstawie twierdzenia 2

$$\text{(b)}\quad A_o\left[\mu_1(F_{i_o})-a\right] \geqslant \varepsilon_o\, a + \left[\mu_1(F_{i_o})-a\right] \sup_{p\in F_{i_o}} U(\mu_1;p)$$

gdzie $\varepsilon_o\, a > 0$. Z drugiej strony na podstawie twierdzeń 1 i 2 mamy

$$\lim_{k\to\infty} \log \frac{1}{V^{(I)}_{n_k}(E_1,\omega)} = I(\mu_1) = \sum_{i=1}^{p} \int_{F_i} U(\mu_1;p)\,d\mu_1(p) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \mu_1(F_i) \sup_{p\in F_i} U(\mu_1;p) ,$$

przy czym oczywiście

$$\lim_{k\to\infty} \log \frac{1}{V^{(I)}_{n_k}(E_1,\omega)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{p} n_k^i A^i_{n_k}}{n_k} , \quad \lim_{k\to\infty} \frac{n_k^i}{n_k} = \mu_1(F_i)$$

oraz

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} A^i_{n_k} \geqslant \sup_{p\in F_i} U(\mu_1;p)$$

Stąd jednak wynika, że $\lim_{k\to\infty} A^i_{n_k} = \sup_{p\in F_i} U(\mu_1;p)$

$i = 1,2,\ldots,p$. W szczególności mamy $A_o = \sup_{p\in F_i} U(\mu_1;p)$

czyli sprzeczność z nierównością (b). Lemat zatem został udowodniony.

Na podstawie powyższego lematu istnieje ciąg liczb dodatnich $\{\varepsilon_n\}$ zbieżny do zera i taki, że

$$\text{(c)}\qquad \frac{n(F_i,\varepsilon_n)}{n} \longrightarrow 0$$

gdy $n\to\infty$ $(i = 1,2,\ldots,p)$. Odrzućmy teraz z układu

$q^{(n,1)}$ te punkty, które należą do zbiorów F^n_{i,ε_n}, $i = 1,2,\ldots,p$ /zob. definicję $F^n_{i\,\varepsilon}$ w dowodzie lematu/ i otrzymany układ oznaczamy przez $\bar{q}^{(m(n),1)} = \left\{\bar{q}_1^{(m(n),1)},\ldots \right.$ $\left.\ldots, q^{(m(n),1)}_{m(n)}\right\}$, $n = \alpha, \alpha+1,\ldots$. Niech $k_n \overset{df}{=} \min\{k \mid m(k) \geqslant n\}$.

Ponieważ $n - m(n) = n\left(F_1, \varepsilon_n\right) + \ldots + n\left(F_p, \varepsilon_n\right)$, więc na mocy warunku (c) mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{m(k_n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} = 1 .$$

Jeśli teraz przez $p^{(n,1)} = \left\{p_1^{(n,1)},\ldots,p_n^{(n,1)}\right\}$ oznaczymy układ n dowolnych punktów wybranych z układu $\bar{q}^{(m(k_n),1)}$, $n = \alpha, \alpha+1,\ldots$, wówczas ciąg układów $\left\{p^{(n,1)}\right\}$ będzie żądanym ciągiem występującym w tezie twierdzenia 3. Jeśli bowiem $\bar{\mu}_n(e) \overset{df}{=} \frac{k}{n}$ oraz $\bar{v}_{k_n}(e) \overset{df}{=} \frac{\bar{k}}{k_n}$, gdzie k i $\bar{k}$ oznaczają odpowiednio liczby punktów układów $p^{(n,1)}$ i $q^{(k_n,1)}$ zawartych w e, wówczas $\bar{\mu}_n(e) \leqslant \frac{\bar{k}}{n} = \frac{k_n}{n}\bar{v}_{k_n}(e)$, $\bar{\mu}_n(e) = \frac{k_n}{n}\,\frac{k}{k_n} \geqslant$

$$\geqslant \frac{k_n}{n}\,\frac{m(k_n) - n + \sum_{i=1}^{p} k_n\left(F_i, \varepsilon_{k_n}\right) - \bar{k}}{k_n} = \frac{k_n}{n}\bar{v}_{k_n}(e) - \frac{m(k_n) - \sum_{i=1}^{p} k_n\left(F_i, \varepsilon_{k_n}\right) - n}{k_n}$$

Zatem jeśli $\left\{\bar{\mu}_{n_s}\right\}$ jest pewnym podciągiem ciągu $\left\{\bar{\mu}_n\right\}$ zbieżnym do pewnej miary, wówczas do tej samej miary jest zbieżny ciąg $\left\{\bar{v}_{k_{n_s}}\right\}$. Oznaczmy tę wspólną miarę graniczną przez μ_1 /jest to oczywiście nieswobodna miara równowagi/. Przypuśćmy dalej, że $p_{t_s}^{(n_s,1)} \to p_o$, gdy $s \to \infty$ oraz, że punkt $p_{t_s}^{(n_s,1)}$ był oznaczony w układzie $q^{(k_{n_s},1)}$ przez $q_{\bar{t}_s}^{(k_{n_s},1)}$. Oczywiście $q_{\bar{t}_s}^{(k_{n_s},1)} \to p_o$, gdy $s \to \infty$ oraz dla dostatecznie dużego s.

$$\text{(d)} \qquad U^{(\bar{t}_s)}\left(q^{(k_{n_s},1)}\right) \leq \frac{\sum\limits_{p_i \in F_{i_o}} U^{(j)}\left(q^{(kn_s,1)}\right)}{n_s^{i_o}} + \varepsilon_{k_{n_s}}$$

gdzie F_{i_o} jest zbiorem zawierającym punkt p_o. Ponieważ

dalej $U^{(t_s)}\left(p^{(n_s,1)}\right) \leq \left(\frac{k_{n_s}}{n_s}\right)^{\alpha-1} U^{(\bar{t}_s)}\left(p^{(n_s,1)}\right)$

oraz $\bar{V}_{kn_s} \to \mu_1$, $\varepsilon_{kn_s} \to 0$, $\frac{k_{n_s}}{n_s} \to 1$, gdy $s \to \infty$

więc na podstawie nierówności (d) mamy

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\; U^{(t_s)}\left(p^{(n_s,1)}\right) \leq U\left(\mu_1; p_o\right)$$

Twierdzenie 3 jest zatem udowodnione.

<u>Dowód twierdzenia 4.</u> Niech $\{\mu_1\}$ będzie ciągiem nieswobodnych miar równowagi, przy czym zakładamy, że każda miara μ_1 jest granicą pewnego podciągu ciągu występującego w twierdzeniu Z konstrukcji miar wynika, że

$$\text{(25)} \qquad \mu_1 \to \mu$$

słabo, gdy $1 \to \infty$. Udowodnimy najpierw, że

$$\text{(26)} \qquad \lim_{1\to\infty} I(\mu_1) = I(\mu) .$$

Niech $\mu_1^*(e) \overset{df}{=} \mu(e \cap E_1) / \mu(E_1)$. Oczywiście $\mu_1^* \in M_1^{\mu}$, $I(\mu_1) \leq I(\mu_1^*)$ oraz $I(\mu_1^*) \to I(\mu)$, gdy $1 \to \infty$.

Stąd na mocy (25) oraz ograniczoności od dołu funkcji

$\log \dfrac{1}{\omega(p_1,\dots,p_\alpha)}$ wynika równość (26).

Rozważmy w dalszym ciągu zbiór

$$E_l^{\varepsilon} \overset{df}{=} \{ p_1 \mid U(\mu_l;p_1) > U(\mu;p_1) + \varepsilon \} .$$

Udowodnimy, że jeśli ε jest dowolną liczbą dodatnią, wówczas $\mu_l(E_l^{\varepsilon}) \to 0$, gdy $l \to \infty$. W przeciwnym bowiem przypadku istniałaby liczba $\varepsilon_o > 0$ oraz ciąg miar $\{\mu_{l_n}\}$ taki, że

$$(27) \qquad \mu_{l_n}(E_{l_n}^{\varepsilon_o}) \to a > 0$$

gdy $n \to \infty$. Niech $I^K(v) \overset{df}{=} \int_E U^K(v;p)\,d\,v(p)$ i niech K_o będzie liczbą dodatnią tak dużą, że

$$(28) \qquad I^{K_o}(\mu) > I(\mu) - \frac{\varepsilon_o a}{2}$$

Ponieważ

$$I(\mu_{l_n}) = \int_{E_{l_n}^{\varepsilon_o}} U(\mu_{l_n};p_1)\,d\mu_{l_n}(p_1) +$$

$$+ \int_{E_{l_n}^{\mu_{l_n}} - E_{l_n}^{\varepsilon_o}} U(\mu_{l_n};p_1)\,d\mu_{l_n}(p_1) \geq \varepsilon_o \mu_{l_n}(E_{l_n}^{\varepsilon_o}) +$$

$$+ \int_{E_{l_n}^{\varepsilon_o}} U(\mu;p_1)\,d\mu_{l_n}(p_1) + \int_{E_{l_n}^{\mu_{l_n}} - E_{l_n}^{\varepsilon_o}} U(\mu_{l_n};p_1)\,d\mu_{l_n}(p_1) \geq$$

$$\varepsilon_o \mu_{l_n}(E_{l_n}^{\varepsilon_o}) + \int_E U^{K_o}(\mu;p)\,d\mu_{l_n}(p) +$$

$$\int\limits_{E_{l_n}^{\mu_l}-E_{l_n}^{\varepsilon_o}} \left[U^{K_o}(\mu_{l_n},p_1) - U^{K_o}(\mu,p_1) \right] d\,\mu_{l_n}(p_1)$$

więc na mocy (25), (26),(27) i (28) mamy

$I(\mu) \geq I(\mu) + \frac{\varepsilon_o a}{2}$, co jest niemożliwe, bo $\varepsilon_o a > 0$.

Udowodniliśmy zatem, że jeśli ε jest dowolną liczbą dodatnią, wówczas $\mu_l(E_l^{\varepsilon}) \to 0$, gdy $l \to \infty$. Stąd dalej wynika, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\overline{N}(\varepsilon) > 0$ takie, że dla każdego $l \geq \overline{N}(\varepsilon)$ można znaleźć zbiór E_{μ_l} taki, że

(29) $\mu_l(E_{\mu_l}) > 1 - \varepsilon$ i $U(\mu_l;p_1) < U(\mu;p_1) + \varepsilon$

dla $p_1 \in E_l^{\mu_l} \cap E_{\mu_l}$

Oznaczmy przez $\overline{E}_{\mu_l}$ sumę wszystkich zbiorów $E_{i_1 \ldots i_{zm}}^{\varepsilon_l}$, które mają przynajmniej jeden punkt wspólny ze zbiorem E_{μ_l} . Rozważmy najpierw przypadek, gdy $U(\mu,p_1)$ jest funkcją ciągłą w zbiorze E^{μ} . Na mocy twierdzenia 2 oraz (29) istnieje $N(\varepsilon) \geq \overline{N}(\varepsilon)$ takie, że

(30) $U(\mu_l,p_1) < U(\mu;p_1) + 2\varepsilon$

dla $p_1 \in E_l \cap \overline{E}_{\mu_l}$, $l \geq N(\varepsilon)$. Ponieważ ilość wszystkich zbiorów $E_{i_1 \ldots i_{2m}}^{\varepsilon_M}$ jest skończona, więc istnieje tylko skończona liczba różnych zbiorów $\overline{E}_{\mu_N}$, Oznaczmy te zbiory przez $E_{\mu_N}^1, \ldots, E_{\mu_N}^q$, Podzielmy dalej miary μ_N odpowiadające ustalonej wyżej liczbie N na klasy (μ_N^r), $r = 1,\dots,q$, zaliczając do r-tej klasy wszystkie miary, dla których $\bar{E}_{\mu_N}$ pokrywają się. Rozważmy dalej klasy podciągów $\left(\{\mu_{N,n_k}^r\}\right)$, $r = 1,\dots,q$ ciągu $\{\bar{u}_n\}$ określonego w twierdzeniu 3 takich, że każdy podciąg $\{\mu_{N,n_k}^r\}$ zbieżny jest do pewnej miary klasy (μ_N^r) oraz żaden wyraz ciągu $\{\mu_n\}$ nie jest wyrazem dwóch ciągów różnych klas. Oznaczmy przez $\left(\{p^{(n_k,N,r)}\}\right)$ podciągi ciągu $\{p^{(n,N)}\}$ określonego w twierdzeniu 3, dla których zostały zbudowane ciągi miar $\{\mu_{N,n_k}\}$. Odrzuśmy teraz z każdego układu $p^{(n_k,N,r)}$ te punkty, które nie należą do zbioru $E_{\mu_N}^r$. Otrzymany w ten sposób ciąg układów oznaczmy przez $\{\bar{p}^{(n,N)}\} = \{\bar{p}_1^{(n,N)},\dots,\bar{p}^{(n,N)}\}$. Niech $r \overset{df}{=} \min\{s \mid k(s) \geq n\}$ i niech $p^{(n,N)} = \left(\bar{\bar{p}}_1^{(n,N)},\dots,\bar{\bar{p}}_n^{(n,N)}\right)$ oznacza układ n punktów wybranych dowolnie z układu $\bar{p}^{(r_n,N)} = \left(\bar{p}^{(r_n,N)},\dots,\bar{p}_{k(r_n)}^{(r_n,N)}\right)$. Ponieważ na podstawie (29), $\frac{k(n)}{n} \geq 1 - 2\varepsilon$ dla dostatecznie dużego n, więc $n \leq k(r_n) \leq \left(\left[\frac{n}{1-2\varepsilon}\right]\right) + 1 \leq \left[\frac{n}{1-2\varepsilon}\right] + 1$ oraz $\left[(1-2\varepsilon)\, r_n\right] \leq k(r_n) \leq r_n$ dla dostatecznie dużego n. Stąd

$$n \leq r_n \leq \frac{1}{1-2\varepsilon}\left[\frac{n}{1-2\varepsilon}\right] + \frac{1}{1-2\varepsilon} \tag{31}$$

dla dostatecznie dużego n.

Niech $\{\bar{\mu}_{r_{n_k}}\}$ będzie ciągiem miar zbieżnych do pewnej miary μ_N i niech $\left\{\bar{\bar{p}}_{s_k}^{(n_k,N)}\right\}$ będzie ciągiem punktów zbieżnym do pewnego punktu p_o. Oczywiście punkt p_o należy do zbioru $E_N^{\varepsilon} \cap \bar{E}_{\mu_N}$. Niech dalej $p_{\bar{s}_k}^{(n_k,N)}$ oznacza punkt $\bar{\bar{p}}_{s_k}^{(n_k,N)}$ w układzie $p^{(r_{n_k},N)}$. Ponieważ $r_{n_k} \geq n_k$ i ponieważ $\omega(p_1,\ldots,p_\alpha) \leq 1$ dla $p_1,\ldots,p_\alpha \in E$, więc

$$U^{(s_k)}\left(\bar{\bar{p}}^{(n_k,N)}\right) \leq \left[\binom{r_{n_k}-1}{\alpha-1} \Big/ \binom{n_k-1}{\alpha-1}\right] U^{(\bar{s}_k)}\left(p^{(r_{n_k},N)}\right) .$$

Ponieważ dalej $p_{\bar{s}_k}^{(r_{n_k},N)} \rightarrow p_o$ i $\bar{\mu}_{r_{n_k}} \rightarrow \mu_1$, gdy $k \rightarrow \infty$, więc na podstawie ostatniej nierówności, twierdzenia 3 oraz nierówności (31) mamy

$$(32) \quad \overline{\lim_{k\to\infty}}\, U^{(s_k)}\left(\bar{\bar{p}}^{(n_k,N)}\right) \leq (1-2\varepsilon)^{-2(\alpha-1)}\, U(\mu_N; p_o)$$

gdzie $p_o \in E_N^{\mu} \cap E_{\mu_N}$. Na podstawie (29) i (32) mamy

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, U^{(s_k)}\, \bar{\bar{p}}^{(n_k,N)} \leq \sup_{p_1 \in E^{\mu}} U_{\mu}(\mu; p_1) + k(\varepsilon)$$

gdzie $K(\varepsilon)$ zmierza do zera wraz z ε. Udowodniliśmy zatem, że jeśli $U(\mu;p_1)$ jest funkcją ciągłą, wówczas dla dowolnej liczby $\varepsilon^1 > 0$ istnieje ciąg układów $\bar{p}^{(n)} = \left\{\bar{p}_1^{(n)},\ldots,\bar{p}_n^{(n)}\right\}, n = \alpha, \alpha+1,\ldots$ taki, że

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \max_{(j)}\, U^{(j)}\left(\bar{p}^{(n)}\right) \leq \sup_{p_1 \in E^{\mu}} U_{\mu}(\mu; p_1) + \varepsilon^1 .$$

Stąd dalej wynika, że istnieje ciąg układów $\left\{p^{(n)}\right\} = \left\{\left(p_1^{(n)},\ldots,p_n^{(n)}\right)\right\}$ taki, że

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \max_{(j)} U^{(j)}\left(p^{(n)}\right) \leq \sup_{p_1 \in E^{\mu}} U(\mu;p_1)$$

Jeśli $U(\mu;p_1)$ nie jest funkcją ciągłą, wówczas (zob. rozważania w pracy: G.Anger, Sur le role des potentiels continus dans les fondements de la theorie du potentiel, Seminaire de theorie du potentiel, 1957/58 , dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje miara $\mu^* \in N$ taka, że $U(\mu^*;p_1)$ jest funkcją ciągłą oraz $U(\mu^*;p_1) < U(\mu;p_1) + \varepsilon$ dla $p_1 \in E^{\mu^*}$. Przeprowadzając teraz dla $U(\mu^*;p_1)$ te same rozważania co poprzednio dla $U(\mu;p_1)$, otrzymujemy tezę twierdzenia 4.

Uwaga: Podamy jeszcze szkic dowodu twierdzenia 5.

Jak już zaznaczyliśmy, dowód twierdzenia 5 jest zupełnie podobny do dowodu twierdzenia 4.

Niech K_o będzie liczbą dodatnią ≥ 1 oraz tak dużą, że

$$\frac{K_o}{\omega(z,p_2,\dots,p_\alpha)} \geq 1 \text{ dla } p_1,\dots,p_\alpha \in E.$$ Niech dalej

$$U^K_{K_o}(v;p_1,z) \overset{df}{=} \int_E \dots \int_E \log_K \frac{K_o}{\omega(z,p_2,\dots,p_\alpha)}\, dv(p_2)\dots dv(p_\alpha)$$

oraz

$$U_{K_o}(v;p_1,z) \overset{df}{=} \lim_{K\to\infty} U^K_{K_o}(v;p_1,z) \quad .$$

Załóżmy najpierw , że $U(\mu;p_1)$ i $U_1(\mu;p_1,z)$ są funkcjami ciągłymi ze względu na p_1 w zbiorze E^{μ}. Ponieważ $\mu_1 \to \mu$ i ponieważ $U_K(\mu;p_1,z)$ jest funkcją ciągłą punktu p_1, więc dla dowolnej liczby $\varepsilon_1 > 0$ istnieją liczby $K_1 >$ i $N_1 > 0$ takie, że

$$U^K_{K_o}(\mu_1,p_1,z) > U_{K_o}(\mu;p_1,z) - \varepsilon_1 \tag{33}$$

dla $K \geq K_1$, $1 \geq N_1, p_1 \in E^{\mu}$.

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią $\leq \varepsilon_1$ oraz tak małą, że

(34) $\quad 2^{\alpha-3}\left[1-(1-2\varepsilon)^2\right]\log K_1(1-2\varepsilon)^{-2\alpha}<\varepsilon_1$.

Możemy oczywiście założyć, że N_1 jest tak duże, że dla ciągu $\bar{\bar{p}}^{(n,N_1)}$ i wyżej określonego ε zachodzi nierówność (32).

Niech $v_{r_n}(e) \overset{df}{=} \frac{k}{r_n}$ i $\bar{\bar{v}}_n(e) \overset{df}{=} \frac{\bar{\bar{k}}}{n}$, gdzie k i $\bar{\bar{k}}$ oznaczają odpowiednio liczby punktów układów $p^{(r_n,N_1)}$ i $\bar{\bar{p}}^{(n,N_1)}$ zawartych w e i niech

$$U^{(j)}\left(\bar{\bar{p}}^{(n,N_1)},z\right) \overset{df}{=}$$

$$\overset{df}{=} \frac{1}{(\alpha-1)\binom{n-1}{\alpha-1}} \sum_{\substack{k=1\\(k\neq j)}}^{n} \overline{\sum_{\substack{1\leq i_3<\ldots<i_\alpha\leq n\\(i_\nu\neq j,k)}}} \log \frac{K_0}{\omega(z,p_j,p_{i_3},\ldots,p_{i_\alpha})}$$

Jeśli $\{n_k\}$ jest dowolnym ciągiem liczb naturalnych takim, że ciągi miar $\left\{v_{r_{n_k}}\right\}$ i $\left\{\bar{\bar{v}}_{n_k}\right\}$ są zbieżne do pewnych miar μ_1 i $\bar{\bar{v}}_0$, wówczas na podstawie (33) i (34) dla dowolnego ciągu punktów $\left\{p_{j_k}^{(n_k,N_1)}\right\}$ zbieżnego do pewnego punktu p_0,

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} U^{(j_k)}\left(p^{(n_k,N_1)},z\right) \geq U_{K_0}^{K_1}\left(\bar{\bar{v}}_0;p_0,z\right) =$$

$$= (1-2\varepsilon)^{-2(\alpha-2)}\, U_{K_0}^{K_1}\left((1-2\varepsilon)^2\,\bar{\bar{v}}_0,p_0,z\right) =$$

$$= (1-2\varepsilon)^{-2(\alpha-2)}\, U_{K_0}^{K_1}\left(\left((1-2\varepsilon)^2\,\bar{\bar{v}}_0-\mu_1\right)+\mu_1;p_0,z\right) \geq$$

$$\geq (1-2\varepsilon)^{-2(\alpha-2)}\Bigg\{U_{K_0}^{K_1}(\mu_1,p_0,z) -$$

$$- 2^{\alpha-3}\int_E\left[\int_E\ldots\int_E \log_K \frac{K_0}{\omega(z,p_0,p_3,\ldots,p_\alpha)}\,d\mu_1(p_4)\ldots d\mu_1(p_\alpha)\right]$$

$$d\left[\mu_1(p_3) - (1-2\varepsilon)^2\,\bar{\bar{v}}_o(p_3)\right]\Big\} \geqslant$$

$$\geqslant (1-2\varepsilon)^{-2(\alpha-2)}\,U_{K_o}^{K_1}(\mu;p_o,z) -$$

$$- 2^{\alpha-3}\left[1-(1-2\varepsilon)^2\right]\log K_1(1-2\varepsilon)^{-2\alpha} \geqslant$$

$$\geqslant (1-2\varepsilon)^{-2(\alpha-2)}\left[U_{K_o}(\mu,p_o,z) - \varepsilon_1\right] - \varepsilon_1 \ .$$

Stąd na podstawie (32) mamy

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\ \frac{1}{n_k}\log B^{(s_k)}\left(\bar{\bar{p}}^{(n_k,N_1)}\right) \leqslant b(\mu;p_o,z) + \bar{k}(\varepsilon_1)$$

gdzie $\bar{K}(\varepsilon_1)$ zmierza do zera wraz z ε_1 .

Ponieważ $\omega(z;p_2,\dots,p_\alpha)/\omega(p_1,\dots,p_\alpha) \geqslant d(z) > 0,$

więc (podobnie jak w dowodzie twierdzenia 4) dla dowolnej liczby $\varepsilon_1>0$ istnieje miara μ^* taka, że $U(\mu^*;p_1)$ i $U_1(\mu^*;p_1,z)$ są funkcjami ciągłymi ze względu na p_1 w zbiorze E^{μ^*} oraz

$$\sup_{p_1\in E^{\mu^*}} b(\mu^*;p_1,z) \leqslant \sup_{p_1\in E^{\mu}} b(\mu;p_1,z) + \varepsilon_1$$

Przeprowadzając teraz to samo rozumowanie odnośnie miary μ^*, co poprzednio dla μ, potrafimy dla dowolnej liczby $\varepsilon_2>0$ znaleźć ciąg układów $\bar{\bar{p}}^{(n)} = \left(\bar{\bar{p}}_1^{(n)},\dots,\bar{\bar{p}}_n^{(n)}\right)$, $n=\alpha,\alpha+1,\dots$ taki, że

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \max_{(j)} \frac{1}{\gamma_n}\log C^{(j)}\left(\bar{\bar{p}}^{(n)}\right) \leqslant \sup_{p_1\in E^{\mu}} C(\mu;p_1,z) + \varepsilon_2$$

Tą samą metodą można udowodnić, że dla $\varepsilon_2>0$ istnieje ciąg układów

$$\bar{p}^{(n)} = \left(\bar{p}_1^{(n)},\dots,\bar{\bar{p}}_n^{(n)}\right) \quad n=\alpha,\alpha+1,\dots,\ \text{taki że}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \max_{(j)} \frac{1}{\beta_n} \log B^{(j)}\left(\bar{p}^{(n)}\right) \leq \sup_{p_1\in E^{\mu}} b(\mu;p_1,z) + \varepsilon_2$$

Udowodniliśmy zatem, że dla dowolnej liczby $\varepsilon_2 > 0$ potrafimy znaleźć dwa ciągi układów: $\left\{\bar{\bar{p}}^{(n)}\right\} = \left\{\left(\bar{\bar{p}}_1^{(n)},\dots,\bar{\bar{p}}_n^{(n)}\right)\right\}$ oraz $\left\{\bar{p}^{(n)}\right\} = \left\{\left(\bar{p}_1^{(n)}, \bar{p}_2^{(n)},\dots,\bar{p}_n^{(n)}\right)\right\}$, dla których odpowiednio są spełnione dwie ostatnie nierówności. Stąd już wynika łatwo istnienie ciągów układów występujących w tezie twierdzenia 5.

Jak już zaznaczyliśmy, twierdzenia 6 i 6' są konsekwencją twierdzenia 5.

Dowód twierdzenia 7. Najpierw udowodnimy równość (12). Niech z będzie takim punktem, że

$$\frac{\omega(z,p_2,\dots,p_\alpha)}{\omega(p_1,p_2,\dots,p_\alpha)}$$

dla $p_1,\dots,p_\alpha \in E$ jest funkcją ciągłą i dodatnią. Zatem istnieje liczba $a > 0$ taka, że

$$\frac{\omega(z,p_2,\dots,p_\alpha)}{\omega(p_1,p_2,\dots,p_\alpha)} \geq a > 0 \tag{35}$$

dla $p_1,\dots,p_\alpha \in E$. Ponieważ

$$A\left(z;p^{(n)}\right) = \prod_{j=1}^{n} \prod_{\substack{1\leq i_2<\dots<i_\alpha\leq n \\ i_v\neq j}} \frac{\omega(z,p_{i_2},\dots,p_{i_\alpha})}{\omega(p_j,p_{i_2},\dots,p_{i_\alpha})} =$$

$$= \frac{1}{\prod\limits_{1\leq i_1<\dots<i_\alpha\leq n} \omega_1(z;p_{i_1},\dots,p_{i_\alpha})^{\alpha}}$$

gdzie

$$\omega_1(z;p_1,\dots,p_\alpha) \overset{df}{=} \frac{\omega(p_1,\dots,p_\alpha)}{\left[\omega(z,p_2,\dots,p_\alpha)\cdot\omega(p_1,z,p_3,\dots,p_\alpha)\cdots\omega(p_1,p_2,\dots,p_{\alpha-1},z)\right]^{1/\alpha}}$$

jest na mocy (35) funkcją symetryczną punktów $p_1,\dots,p_\alpha$, więc na podstawie twierdzenia 1

$$\lim_{n\to\infty} \log a_n(z) = \lim_{n\to\infty} \log \left[\inf_{p^{(n)}\subset E} A\left(z;p^{(n)}\right)^{1/\alpha\binom{n}{\alpha}} \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \log \frac{1}{\sup\limits_{p^{(n)}\subset E} \prod\limits_{1\le i_1<\dots<i_\alpha\le n} \omega_1\left(z;p_{i_1},\dots,p_{i_\alpha}\right)^{1/n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \log \frac{1}{V_n(E,\omega_1)} =$$

$$= \inf_{v\in M} \left\{ \frac{1}{\alpha} \int_E \dots \int_E \left[\log\omega\left(z,p_2,\dots,p_\alpha\right) + \log\omega\left(p_1,z,p_3,\dots,p_\alpha\right) + \right.\right.$$

$$\left. + \dots + \log\omega\left(p_1,\dots,p_{\alpha-1},z\right)\right] d\,v(p_1)\dots d\,v(p_\alpha) -$$

$$- \int_E \dots \int_E \log\omega(p_1,\dots,p_\alpha)\, d\,v(p_1)\dots d\,v(p_\alpha) =$$

$$= \inf_{v\in M} \int_E \dots \int_E \left[\log\omega\left(z,p_2,\dots,p_\alpha\right) - \log\omega\left(p_1,p_2,\dots,p_\alpha\right)\right]$$

$$d\,v(p_1)\dots d\,v(p_\alpha) = \inf a\left(v;z\right) = \bar{a}(z)$$

Równość (12) jest zatem udowodniona.

Następne nasze rozważania będą miały na celu udowodnienie równości (14). Dowód równości (13) jest analogiczny.

Na mocy twierdzenia 6 wystarczy udowodnić, że

$$(36) \qquad \underline{\lim}_{n\to\infty} \log c_n(z) \geq \bar{c}(z)$$

Niech $C^*(z) \stackrel{df}{=} \underline{\lim}_{n\to\infty} c_n(z)$ i niech $p^{(n_k)} = \left\{p_1^{(n_k)},\dots,p_{n_k}^{(n_k)}\right\}$

będzie ciągiem układów punktów zbioru E takich, że

$$\max_{(j)} C^{(j)}\left(z;\, p^{(n_k)}\right)^{1/\gamma_{n_k}} \longrightarrow C^*(z)$$

jeśli $k \to \infty$. Zmieniając w razie potrzeby numerację punktów $p_1^{(n_k)}, \ldots, p_{n_k}^{(n_k)}$, możemy założyć, że

$$(37) \qquad C^{(1)}\left(z\,;\, p^{(n_k)}\right)^{1/\gamma_{n_k}} \longrightarrow C^*(z)$$

gdy $k \to \infty$.

Niech $\bar{\bar{v}}_{n_k}(e) = \frac{l}{n_k}$, gdzie l oznacza liczbę punktów układu $p^{(n_k)}$ należących do e. Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy założyć, że ciąg $\left\{\bar{\bar{v}}_{n_k}\right\}$ jest zbieżny słabo do pewnej miary $\bar{\bar{v}}_o$. Oczywiście

$$(38) \quad c\left(\bar{\bar{v}}_o; z\right) = \sup_{p_1 \in E} c\left(\bar{\bar{v}}_o; p_1, z\right) \geqslant \bar{C}(z)$$

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią i niech p_1^o będzie punktem zbioru E takim, że

$$(39) \qquad c\left(\bar{\bar{v}}_o; p_1^o, z\right) > c\left(\bar{\bar{v}}_o; z\right) - \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

Wybierzmy z każdego układu $p^{(n_k)}$, $k = 1,2,\ldots$, punkt $p_{l(k)}^{(n_k)}$ w ten sposób, żeby $p_{l(k)}^{(n_k)} \to p_1^o$, gdy $k \to \infty$. Niech K_o będzie liczbą dodatnią tak dużą, że jeśli położymy

$$\log_K x \overset{df}{=} \min\left(\log x\,,\, \log K\right)$$

$$C^K\left(\bar{\bar{v}}_o; p_1^o, z\right) \overset{df}{=} \int_E \cdots \int_E \log_K \frac{\omega\left(z, p_1, p_3, \ldots, p_\alpha\right)}{\omega\left(p_2, p_1, p_3, \ldots, p_\alpha\right)} \, d\bar{\bar{v}}_o(p_2) \cdots d\bar{\bar{v}}_o(p_\alpha) \, ,$$

wówczas

$$(40) \qquad c^K\left(\bar{\bar{v}}_o; p_1^o, z\right) > c\left(\bar{\bar{v}}_o; p_1^o, z\right) - \frac{\varepsilon}{2}$$

dla $K \geqslant K_o$. Na podstawie (37)

$$\log c^{*}(z) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\gamma_{n_k}} \log c^{(1)}\left(z;p^{(n_k)}\right) \geq$$

$$\geq \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{\gamma_{n_k}} \log c^{(l(k))}\left(z;p^{(n_k)}\right) \geq$$

$$\geq \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{\gamma_{n_k}} \log_K c^{(l(k))}\left(z;p^{(n_k)}\right) = c^K(\overline{\overline{v}}_o;p_1^o, z)$$

Stąd na podstawie (38),(39) i (40) mamy $\log c(z) \geq \overline{c}(z) - \varepsilon$. Nierówność (36) jest zatem udowodniona, ponieważ ε było dowolną liczbą dodatnią. Z (36) i twierdzenia 6 wynika równość (14).

Analogicznie dowodzi się równości (13). Twierdzenie 7 jest więc udowodnione.

Dowód twierdzenia 8. A. Dowód konieczności. Jeżeli istnieje punkt $z_o \in E$ oraz otoczenie U_o tego punktu takie, że

$$\inf_{v\in M} a(v;z) = \overline{a}(z) < 0$$

dla $z \in U_o$ wówczas, na mocy półciągłości z góry funkcji $a(v;z)$, istnieje miara μ i otoczenie $\overline{U}_o$ punktu z_o takie, że

(41) $$a(\mu;z) < 0$$

dla $z \in \overline{U}_o$. Ponieważ

$$a(\mu;z) = \int_E \cdots \int_E \log \frac{\omega(z,p_2,\ldots,p_\alpha)}{\omega(p_1,p_2,\ldots,p_\alpha)} \, d\mu(p_1)\ldots d\mu(p_\alpha) =$$

$$= I(\mu) - U(\mu;z)$$

więc na mocy (41)

(42) $$U(\mu;z) > I(\mu) \qquad \text{dla } z \in \overline{U}_o.$$

Stąd już wynika, że

$$\sup_{z\in E} U(\mu;z) > U(\mu;z)$$

w pewnym podzbiorze E_0 zbioru E o μ-mierze dodatniej. W przeciwnym bowiem razie mielibyśmy

$$\sup_{z\in E} U(\mu;z) \leq U(\mu;z)$$

poza zbiorem o μ-mierze równej zeru. Całkując ostatnią nierówność stronami względem μ mielibyśmy

$$\sup_{z\in E} U(\mu;z) \leq I(\mu)$$

czyli nierówność sprzeczną z nierównością (42). Nierówność (16) jest więc udowodniona.

B. Dowód dostateczności. Jeżeli istnieje miara $\mu \in M$ taka, że nierówność (16) zachodzi w pewnym podzbiorze zbioru E o μ-mierze dodatniej, wówczas całkując tę nierówność stronami względem μ otrzymamy

$$\sup_{z\in E} U(\mu;z) > I(\mu)$$

Istnieje zatem punkt $z_0 \in E$ taki, że $U(\mu;z_0) > I(\mu)$. Ponieważ $U(\mu;z)$ jest funkcją półciągłą z dołu, więc istnieje otoczenie U_0 punktu z_0 takie, że

$$U(\mu;z) > I(\mu)$$

dla $z \in U_0$. Zatem

$$a(\mu;z) = I(\mu) - U(\mu;z) < 0$$

dla $z \in U_0$. Stąd

$$\overline{a}(z) = \inf_{v\in M} a(v;z)$$

dla $z \in U_0$, czyli nierówność (15) jest udowodniona.

Dowód twierdzenia 9. A. Dowód konieczności. Załóżmy, że warunki (17) i (18) są spełnione oraz załóżmy dla dowodu niewprost, że funkcja ω nie spełnia zasady maksimum w sąsiedztwie zbioru E. Istnieje zatem miara μ, liczba ε_o oraz ciąg punktów $\{z_n\}$ zbieżny do pewnego punktu $z_o \in E$ taki, że

$$(43) \qquad \underline{\lim}_{n\to\infty} U(\mu;z_n) > \sup_{z\in E} U(\mu;p_1) + \varepsilon_o$$

Ponieważ $b(v;p_1,z) = U(v;p_1) - U(v;z)$, więc na mocy (43) mamy

$$b(\mu;z_n) = \sup_{p_1\in E} b(\mu;p_1,z_n) = \sup_{p_1\in E} U(\mu;p_1) - U(\mu;z_n) < -\varepsilon_o$$

dla $n \geqslant N$. Stąd

$$\bar{b}(z_n) = \inf_{v\in M} b(v;z_n) < -\varepsilon_o$$

dla $n \geqslant N$, czyli oba warunki (17) i (18) nie mogą być razem spełnione, wbrew założeniu. Zatem konieczność twierdzenia 9 została udowodniona.

B. Dowód dostateczności. Niech v będzie dowolną miarą klasy M. Na mocy założenia definicji 4 oraz równości

$$b(v;z) = \sup_{p_1\in E^v} b(v;p_1,z) = \sup_{p_1\in E^v} U(v;p_1) - U(v;z)$$

dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje otoczenie $V(\varepsilon)$ zbioru E takie, że

$$b(v;z) \geqslant -\varepsilon$$

dla $z \in V(\varepsilon)$ oraz $v \in M$. Stąd

$$\bar{b}(z) \geqslant -\varepsilon$$

dla $z \in V(\varepsilon)$. Ponieważ ε było dowolną liczbą dodatnią, więc z ostatniej nierówności wynika, że

$$(44) \qquad \underline{\lim}_{z' \to z \in E} \bar{b}(z') \geqslant 0$$

Ponieważ dalej $b(v;z)$ jest funkcją półciągłą z góry, zatem

$$\overline{\lim}_{z' \to z \in E} b(v;z') \leqslant b(v;z)$$

dla każdej miary $v \in M$. Stąd, na mocy nierówności $\bar{b}(z) \leqslant b(v;z)$ dla $v \in M$, mamy

$$\overline{\lim}_{z' \to z \in E} b(z') \leqslant b(v;z)$$

dla każdej miary $v \in M$. Zatem

$$\overline{\lim}_{z' \to z \in E} \bar{b}(z') \leqslant \inf_{v \quad M} b(v;z) = \bar{b}(z)$$

Ponieważ oczywiście $\bar{b}(z) \leqslant 0$ dla $z \in E$ *), więc na mocy ostatniej nierówności oraz (44) mamy

$$\lim_{z' \to z \in E} \bar{b}(z') = \bar{b}(z) = 0$$

czyli równości (17) i (18).

Twierdzenie 9 jest zatem udowodnione.

Przykład 1. Rozważmy w przypadku $\alpha = 2$, $m=1$ zbiór E będący sumą dwóch zbiorów E_1 i E_2 takich, że $E_1 = \left(z \mid -2 \leqslant \text{re } z \leqslant -1, \text{ im } z=0\right)$, $E_2 = \left(z \mid 1 \leqslant \text{re } z \leqslant 2, \text{ im } z = 0\right)$. Niech $\omega(p,q) = |pq|$ dla $p,q \in E$ oraz $\omega(1,p) = 1$ dla $p \in E_1$, $\omega(i,p) = 25$ dla $p \in E_2$. Ponieważ w tym przypadku n-ty układ ekstremalny zbioru ze względu na ω; $q^{(n)} = \{q_1,\ldots,q^{(n)}\}$ jest n-tym układem ekstremalnym zbioru płaskiego ze względu na odległość, więc (zob. rozważania w [15]).

$$(45) \qquad \left[\min_{(j)} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}} \omega(q_i,q_n)\right]^{1/(n-1)} \longrightarrow V(E,\omega)$$

---

*) Kładziemy bowiem $\omega(p_1,\ldots,p_\alpha) / \omega(p_1,\ldots,p_\alpha) = 1$ dla dowolnych $p_1,\ldots,p_\alpha$.

gdy $n \to \infty$, gdzie rozwartość $V(E,\omega)$ spełnia nierówność $\frac{1}{2} < V(E,\omega) < 1$. Oprócz tego wiadomo (zob. rozważania w [15]), że jeśli $\mu_n(e) = \frac{k}{n}$, gdzie k oznacza liczbę punktów układu ekstremalnego $q^{(n)}$ zawartych w e, wówczas $\lim_{n\to\infty} \bar{\mu}_n(E_1) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(E_2) = \frac{1}{2}$. Zatem na podstawie (45)

$$\max_{(j)} B^{(j)}\left(i;q^{(n)}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \frac{1^{\mu_n(E_1)}\ 25^{\mu_n(E_2)}}{\left[\min\limits_{(j)} \prod\limits_{\substack{n=1\\ k\neq j}}^{n} \omega(q_j,q_k)\right]^{1/(n-1)}}$$

$$\to \frac{5}{V(E,\omega)} > 5$$

gdy $n \to \infty$.

Niech teraz $\bar{q}^{(n)} = (\bar{q}_1,\dots,\bar{q}_n)$ będzie n-tym układem ekstremalnym zbioru E_1. Otóż

$$b_n(i) = \inf_{p^{(n)}\in E}\left\{\max_{(j)} B^{(j)}\left(i;p^{(n)}\right)\right\}^{1/(n-1)} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{(j)} B^{(j)}\left(i;\bar{q}^{(n)}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \frac{1}{\left[\min\limits_{(j)} \prod\limits_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n} \omega(q_j,q_k)\right]^{1/(n-1)}}$$

Prawa strona ostatniej nierówności zmierza do 4. Stąd

$$\lim_{n\to\infty} b_n(i) \leqslant 4 < 5 < \lim_{n\to\infty} \max_{(j)} B^{(j)}\left(i;q^{(n)}\right)^{1/(n-1)}$$

czyli odpowiedź na pytanie 4° w [17] jest negatywna.

Przykład 2. Niech $\alpha = 2$, $m = 1$ oraz $E = E_1 \cup E_2$, gdzie E_1 i E_2 są zbiorami określonymi w przykładzie 1. Niech dalej $\omega(p,q) = \big||p| - |q|\big|$ dla $p, q \in E$ oraz

$\omega(i,p) = 1$ dla $p \in E_1$, $\omega(i,p) = 4$ dla $p \in E_2$. Każdy układ ekstremalny zbioru E_1 jak również każdy układ ekstremalny zbioru E_2 są w naszym przypadku układami ekstremalnymi zbioru E.

Rozważmy teraz ciąg układów $q^{(n)}$, $n = 2,3,\ldots$ taki, że $q^{(2k-1)}$, $k = 2,3,\ldots$ jest $(2k-1)$-szym układem ekstremalnym zbioru E_1 oraz $q^{(2k)}$, $k = 1,2,\ldots$ jest 2k-tym układem ekstremalnym zbioru E_2. Tak określony ciąg układów jest ciągiem układów ekstremalnych zbioru E. Oprócz tego

$$\max_{(j)} B^{(j)}\left(i;q^{(2k-1)}\right)^{1/(2k-2)} \longrightarrow 4$$

gdy $k \to \infty$ oraz

$$\max_{(j)} B^{(j)}\left(i;q^{(2k)}\right)^{1/(2k-1)} \longrightarrow 16,$$

gdy $k \to \infty$. Zatem ciąg

$$\left\{\max_{(j)} B^{(j)}\left(i;q^{(n)}\right)\right\}$$

nie jest zbieżny.

SUMMARY

Potentials with kernels of $\alpha \geq 2$ variables and their applications to investigations of extremal functions.

Let R^n be n-dismensional Euclidean space and $\omega(p_1,p_2,\ldots,p_\alpha)$ a nonnegative, continous and symetric function of $\alpha \geq 2$ points $p_1,p_2,\ldots,p_\alpha$ of R^n. Let E be a compact set in R^n and M the class of all Radon measures with supports contained in E such that $v(E) = 1$. The function

$$U(v;p_1) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int_E \cdots \int_E \log \frac{1}{\omega(p_1,p_2,\ldots,p_\alpha)} \, dv(p_2)\ldots dv(p_\alpha)$$

will be called the potential with kernel of α variables. Let $E_1,\dots,E_k$ be compact subsets of E such that $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$ and μ a measure of M. Denote by M_k^{μ} the subclass of M such that $E^v \subset E^{\mu} \cap [E_1 \cup \dots \cup E_k]$,

$$v(E_i) = \frac{\mu(E_i)}{\mu(E_1 \cup \dots \cup E_k)}$$

for $i=1,\dots,k$. Let us set

$$I(v) \overset{df}{=} \int_E U(v;p_1)\, dv(p_1)$$

A measure v_o such that

$$I(v_o) = \inf_{v \in M_k^{\mu}} I(v)$$

will be called non-free equilibrium measure of $E_1 \cup \dots \cup E_k$ with respect to ω and μ.

In the methods of potential theory used /up to now/ in theory of extremal points /see [1,2,6,7,8,9,19,20]/ only the case of the equilibrium measure /see [5] and only for $\alpha = 2$ was considered. Author using the potential with the kernels of $\alpha \geq 2$ variables and non-free equilibrium measure either solves or gives a way of solving preblems hitherto insolved /see e.g. the problems in [16] and [17]/.

Резюме

Потенциалы ядра которых зависят от переменных и их применение к исследованию экстремальных функций.

Пусть R^n n-мерное евклидово пространство, пусть E компактное подмножество R^n и пусть $\omega(p_1,\dots,p_\alpha)$ непрерывная положительная, симметрическая функция α точек $p_1,\dots,p_\alpha \in R^n$. Через M обозначает класс положительных нормированных мер Радона ν на множестве E, $(\nu(E)=1)$. Носитель меры обозначает E^ν. Потенциалом от ядра α- переменных называем интеграл

$$u(\nu;p_1) \overset{df}{=} \int_E \int_E \log \frac{1}{\omega(p_1,\dots,p_\alpha)} d\nu(p_2)\dots d\nu(p_\alpha)$$

Пусть $E_1\dots E_p$ компактные подмножества E, $E_i \cap E_j = \emptyset (i \neq j)$ и пусть $\mu \in M$ мера исполняющая условие $\mu(E_1 \cup \dots \cup E_p) > 0$. Через M_p^μ обозначаем множество мер принадлежащих классу, таких что E

$$E^\nu \subset E^\mu \cap [E_1 \cup \dots \cup E_p],$$

$$\nu(E_i) = \frac{\mu(E_i)}{\mu(E_1 \cup \dots \cup E_p)} \qquad i=1,2,\dots$$

Полагаем

$$I(\nu) \overset{df}{=} \int_E u(\nu;p_1)\, d\nu(p_1) .$$

Мера $\nu_0 \in M_p^\mu$ такая что

$$I(\nu_0) = \inf_{\nu \in M_p^\mu} I(\nu)$$

называется несвободной мерой равновесия множества $E_1 \cup \ldots \cup E_p$ относительно функции ω и меры μ.

До сих пор в методах теории потенциала применянных к теории экстремальных точек ([1 ,2,6, 7,8,9,19,20]) был исследован случай обыкновеннрй меры равновесия ([5]) и только для $\alpha = 2$.

Автор определяя потенциал ядра α-переменных и несвободную меру равновесия, представляет новый метод исследования экстремальных функций. Автор решает, иди указывает пуст к решений некоторых задач еще не решенных ([16] , [17]) .

B I B L I O G R A F I A

1 W.Bach, A solution of the problem of four limits, Ann. Pol. Math. 15 /1964/, str. 57-76 .

2 W.Bach, On some extremal functions of Leja in the space, Coll. Math. 11 /1964/, str. 251-255.

3 F.Bierski, L`écart restreint des ensembles et son application, Ann. Pol. Math. 9 /1960/, str. 65-77.

4 M.Fekete, On generalized transfinite diameter, Bull. Amer. Math. Soc. Abstract 53-7-288.

5 O.Frostmann, Potentiel d`équilibre et capacité des ensembles, These, Lund, 1935.

6 J.Górski, Méthode des points extremaux de résolution du probléme de Dirichlet dans l´espace, Ann. Pol. Math. 1 /1955/, str. 418-429.

7 J.Górski, Sur certaines proriétés de points extremaux liés à un domaine plan, Ann. Pol. Math. 3 /1956/, str. 32-36.

8 J.Górski, Distributions restreintes des points extremaux liés aux ensembles dans l´espace, Ann. Pol. Math. 4 /1958/, str. 325-339.

9 J.Górski, The method of extremal points and Dirichlet problem in the space of two complex variables, Arch. Rat. Mech. Anal. 4 /1960/, str. 412-427.

10 F.Leja, Sur certaines limites aux polynomes de Lagrange et aux ensembles fermés, Bull. de l´Acad. Pol. des Sc. et des Letters, Sc. Math. 1933, str. 281-289.

11 F.Leja, Sur les suites de polynomes, les ensembles fermes et la fonction de Green, Ann. Soc. Pol. Math. 12 /1933/, str. 57-71.

12 F.Leja, Sur une suite de fonctions liées aux ensembles plans fermés, Ann. Soc. Pol. Math. 13 /1935/, str. 53-58.

13 F.Leja, Une généralisation de l´écart et du diamétre transfini d´un ensemble, Ann, Soc, Pol, Math, 22 /1949/, str. 35-42.

[14] F.Leja, Distributions libres et restreintes des points extrémaux dans les ensembles plan, Ann. Pol. Math. 1 /1956/, str. 146-156.

[15] F.Leja, Teoria funkcji analitycznych, Warszawa 1957.

[16] F.Leja, Sur certaines suites de fonctions extrémales de plusieurs variables complexes, Ann. Pol. Math. /1962/, str. 105-114.

[17] F.Leja, Quelques problemés concernant certaines fonctions extremales de plusieurs variables complexes, Proceedings of the Conference, Kraków 30 VIII - 4.IX.1962, str. 29-32.

[18] M.Ohtsuka, On potentials in locally compact spaces, Jour. Sc. Mirosh. Univ. 25 /1961/, str. 135-352.

[19] A.Szybiak, Investigation of some measures and sequences related to the extremal points, Ann. Pol. Math. 10 /1961/, str. 279-291.

[20] А.Шубяк, Об одной постановке главной задачи в теории обобщённых потенциалов, Анн.Поль. Мат.13 /1963/, стоп.57-65.