Feliks Barański, Adam Wachułka

O WIELOMIANACH JEDNORODNYCH TRZECH ZMIENNYCH NIEZALEŻNYCH QUASI-HARMONICZNYCH

1. W pracy udowodnimy twierdzenie o ilości liniowo niezależnych wielomianów jednorodnych stopnia m trzech zmiennych

(1) $$P_m(x,y,z) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{i,j,m-(i+j)} x^i y^j z^{m-(i+j)}$$

quasi-harmonicznych tzn. spełniających równanie

(2) $$L\,u\,(x,y,z) = 0\ ,$$

gdzie

(3) $$L\,u(x,y,z) = a_{11}u''_{xx} + a_{22}u''_{yy} + a_{33}u''_{zz} + a_{12}u''_{xy} + a_{21}u''_{yx} + a_{13}u''_{xz} + a_{31}u''_{zx} + a_{23}u''_{yz} + a_{32}u''_{zy}$$

$a_{ik} = a_{ki}$ stałe, zaś operator Lu jest eliptyczny.

2. Udowodnimy teraz

Lemat 1. Jeżeli 1°

(4) $$p_1\,(x,y,z)\ ,\ \ p_2\,(x,y,z),\dots,\ \ p_n\,(x,y,z)$$

jest układem wielomianów liniowo niezależnych,

2^o T jest transformacją środkowo afiniczną

$$
\begin{aligned}
x &= B_{11}s + B_{12}t + B_{13}v \\
y &= B_{21}s + B_{22}t + B_{23}v \\
z &= B_{31}s + B_{32}t + B_{33}v
\end{aligned}
\tag{5}
$$

3^o T^{-1} jest transformacją odwrotną do T

$$
\begin{aligned}
s &= C_{11}x + C_{12}y + C_{13}z \\
t &= C_{21}x + C_{22}y + C_{23}z \\
v &= C_{31}x + C_{32}y + C_{33}z
\end{aligned}
\tag{6}
$$

to układ wielomianów

$$
q_i(s,t,v) = p_i(B_{11}s+B_{12}t+B_{13}v\ ,\ B_{21}s+B_{22}t+B_{23}v\ ,\ B_{31}s+B_{32}t+B_{33}v) \tag{7}
$$

$$
i = 1,2,\ldots,n
$$

jest układem wielomianów liniowo niezależnych.

Dowód. Z tożsamości

$$
c_1p_1(x,y,z) + \ldots + c_np_n(x,y,z) = 0 \tag{8}
$$

wynika, że

$$
c_1 = \ldots = c_n = 0. \tag{9}
$$

Przypuśćmy, że z tożsamości

$$
C_1q_1(s,t,v) + \ldots + C_nq_n(s,t,v) = 0 \tag{10}
$$

wynika, że

$$(11) \qquad C_1^2 + \ldots\ldots + C_n^2 \neq 0 .$$

Stosując w tożsamości (10) transformację T^{-1} otrzymujemy tożsamość

$$(12) \qquad C_1 p_1(x,y,z) + \ldots\ldots + C_n p_n(x,y,z) = 0 .$$

Na podstawie (8) i (9) otrzymujemy

$$(13) \qquad C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$$

wbrew (11), a więc wielomiany (7) są liniowo niezależne.

3. Niech

$$q_1(s,t,v), \ \ldots\ldots\ldots, \ q_{2m+1}(s,t,v)$$

będą wielomianami harmonicznymi, jednorodnymi stopnia m liniowo niezależnymi. Jak wiadomo [1] istnieje dokładnie $2m+1$ takich wielomianów postaci

$$(14) \qquad q_m(s,t,v) = \sum_{i,j=1}^{m} b_{i,j,m-(i+j)}\, s^i t^j v^{m-(i+j)} .$$

Udowodnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. Istnieje dokładnie $2m+1$ wielomianów jednorodnych stopnia m postaci (1) quasi-harmonicznych liniowo niezależnych.

Dowód. Zachodzi odpowiedniość jednojednoznaczna między wielomianami $q_m(s,t,v)$ postaci (14) oraz wielomianami quasi-harmonicznymi $p_m(x,y,z)$. Niech T_1 będzie transformacją typu (5) która przekształca formę kwadratową

$$(15) \qquad \sum_{ik=1}^{3} a_{ik}\, s_i s_k \quad \text{w formę} \quad \sum_{i=1}^{3} t_i^2$$

i niech T_1^{-1} będzie transformacją do niej odwrotną. Przez transformację T_1^{-1} każdemu wielomianowi $q_m^k(s,t,v)$ przyporządkowany jest jeden odpowiedni wielomian $P_m^k(x,y,z)$. Dwóm różnym wielomianom $q_m^i(s,t,v)$ oraz $q_m^n(s,t,v)$, $i \neq n$ poprzez transformację T_1^{-1} odpowiadają dwa różne wielomiany $P_m^i(x,y,z)$, $P_m^n(x,y,z)$. Gdyby bowiem $P_m^i(x,y,z) = P_m^n(x,y,z)$ to przez transformację T_1 otrzymujemy $q_m^i = q_m^n$ wbrew założeniu. Na odwrót przez transformację T_1 każdemu wielomianowi P_m^k przyporządkowany jest jeden i tylko jeden wielomian q_m^k.

Na podstawie lematu 1 każdemu układowi

$$q_m^1(s,t,v), \ldots, q_m^{2m+1}(s,t,v) \tag{16}$$

wielomianów liniowo niezależnych przez transformację T_1^{-1} jest przyporządkowany układ wielomianów

$$P_m^1(x,y,z), \ldots, P_m^{2m+1}(x,y,z) \tag{17}$$

liniowo niezależnych. Jest to maksymalna ilość wielomianów liniowo niezależnych ze względu na jednojednoznaczną odpowiedniość oraz lemat 1.

4. Podamy konstrukcję układu wielomianów jednorodnych stopnia m quasi-harmonicznych.

Niech $X_n(s)$ oznacza n-ty wielomian Legendre'a, $X_n^{(k)}(s)$ jego k-tą pochodną.

Niech

$$\varrho = \sqrt{s^2 + t^2 + v^2}$$

i niech

$$(18) \qquad F_k(s,t,v) = \varrho^{m-k} X_m^{(k)}\left(\frac{s}{\varrho}\right)(t+iv)^k .$$

Jak wiadomo [1] funkcje

$$(19) \qquad q_m^k(s,t,v) = \operatorname{re} F_k(s,t,v) = \varrho^{m-k} X_m^{(k)}\left(\frac{s}{\varrho}\right) \operatorname{re}(t+iv)^k$$

$$k=0,1,\ldots,m$$

oraz

$$(20) \qquad Q_m^k(s,t,v) = \operatorname{im} F_k(s,t,v) = \varrho^{m-k} X_m^{(k)}\left(\frac{s}{\varrho}\right) \operatorname{im}(t+iv)^k$$

$$k=1,\ldots,m$$

są wielomianami harmonicznymi jednorodnymi stopnia m liniowo niezależnymi.

Niech

$$(21) \qquad r^2 = \sum_{ik=1}^{3} a_{ik} x_i x_k , \quad x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z .$$

Stosując transformację T_1^{-1} z układu (19), (20) otrzymujemy układ $2m+1$ wielomianów jednorodnych stopnia m quasi harmonicznych liniowo niezależnych

$$(22) \qquad p_m^k(x,y,z) = r^{m-k} X_m^{(k)}\left(\frac{C_{11}x+C_{12}y+C_{13}z}{r}\right) W_k\left(C_{21}x+C_{22}y+C_{23}z,\ C_{31}x+C_{32}y+C_{33}z\right),$$

gdzie $w_k(t,v) = \operatorname{re}(t+iv)^k$, $k=0,1,\ldots,m$

oraz

$$(23)\quad P_m^k(x,y,z) = r^{m-k}\, X_m^{(k)}\left(\frac{C_{11}x+C_{12}y+C_{13}z}{r}\right) W_k\left(C_{21}x+C_{22}y+C_{23}z\right.$$

$$\left. C_{31}x+C_{32}y+C_{33}z\right),$$

gdzie $W_k(t,v) = \operatorname{im}(t+iv)^k$, $k = 1,\ldots, m$.

5. Podamy zastosowanie wielomianów quasiharmonicznych do rozwijania rozwiązań analitycznych równania (2).

Udowodnimy

Twierdzenie 2. Jeżeli 1° $u(x,y,z)$ jest rozwiązaniem analitycznym równania (2) w kuli $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$,
2°

$$(24)\qquad u(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,y,z),$$

gdzie

$$(25)\qquad v_n(x,y,z) = \sum_{ij=1}^{m} c_{ij,m-(i+j)}\, x^i y^j z^{m-(i+j)}$$

to każdy z wielomianów $v_n(x,y,z)$ jest wielomianem quasi harmonicznym.

Dowód. Na podstawie założeń

$$(26)\qquad L\, u(x,y,z) = L \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty} L\, v_n(x,y,z) = 0.$$

Ponieważ $L\, v_n(x,y,z)$ jest wielomianem stopnia $n-2$ przeto z tożsamości (26) wynika, że

$$L\, v_n(x,y,z) = 0\,, \quad n=0,1,\ldots$$

Prace cytowane

|1| M.Picone, Appunti di Analisi Superiore, Vol.1,Napoli 1942

SUMMARY

On the homogeneons quasi - harmonic polynomials on the three variables.

The authors give the construction of $2m + 1$ linear independent polynomials

$$(1) \qquad P_m(x,y,z) = \sum_{i,j=0}^{m} a_{i,j,m-(i+j)} x^i y^j z^{m-(i+j)}$$

quasi-harmonic, satysfying the elliptic equation with constants coefficients

$$(2) \qquad \begin{aligned} Lu(x,y,z) &= a_{11}u''_{xx} + a_{22}u''_{yy} + a_{33}u''_{zz} + a_{12}u''_{xy} + \\ &+ a_{21}u''_{yx} + a_{13}u''_{xz} + a_{31}u''_{zx} + a_{23}u''_{yz} + a_{32}u''_{yz} = 0 \end{aligned}$$

They prove the following theorem:

Theorem. If the function

$$(3) \qquad u(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,y,z)$$

There is an analitic solution of the equation $Lu = 0$,

$$v_m(x,y) = \sum_{i,j=0} a_{i,j,m-(i+j)} x^i y^j z^{m-(i+j)}$$

then

$$L v_m(x, y, z) = 0, \quad m = 1,2,\ldots..$$

Резюме

об однородных квази-гармонических полиномах 3-х переменных.

Авторы дают конструкцию $2m + 1$ линейно независимых полинамов

(1) $$P_m(x,y,z) = \sum_{i,j=0}^{m} a_{i,j,m-(i+j)} x^i y^j z^{m-(i+j)}$$

удовлетворяющих эллиптическому уравнению

(2) $$Lu(x,y,z) = a_{11} u''_{xx} + a_{22} u''_{yy} + a_{33} u''_{zz} + a_{12} u''_{xy} + a_{13} u''_{xz} + a_{23} u''_{yz} + a_{21} u''_{yx} + a_{31} u''_{zy} + a_{32} u''_{zy} = 0$$

Авторы доказывают следующую теорему:

Теорема: Если функция

$$u(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,y,z)$$

является аналитическим решением уравнения (2),

$$v_m(x,y,z) = \sum_{i,j=0}^{m} a_{i,j,m-(i+j)} x^i y^j z^{m-(i+j)}$$

тогда

$$Lv_m(x,y,z) \equiv 0 \qquad m = 0,1,2,\ldots$$