Dobiesław Brydak

KILKA UWAG O FUNKCJACH POŁWYPUKŁYCH $\{f\}$.

Praca ta jest uzupełnieniem mojej pracy [2], w której podałem pewne twierdzenia ustalające związki pomiędzy pojęciem wypukłości i półwypukłości $\{f\}$. Na wstępie przypomnę definicję funkcji półwypukłej $\{f\}$ i półwklęsłej $\{f\}$ (por. [4]).

Niech $f(x)$ będzie funkcją rzeczywistą określoną w przedziale (a,b), spełniającą warunek

$$(1) \qquad f[(a,b)] \subset (a,b).$$

Przez $f^n(x)$ oznaczać będziemy n-tą iteratę funkcji $f(x)$:

$$(2) \qquad f^0(x) = x, \quad f^n(x) = f[f^n(x)], \quad n = 0,1,\ldots$$

Funkcję $\varphi(x)$ określoną w przedziale I zawartym w (a,b) nazywamy półwypukłą $\{f\}$ w I, jeżeli

$$(3) \qquad \varphi[f(x)] \leq \frac{\varphi(x) + \varphi[f^2(x)]}{2} \quad \text{dla } x \in I,$$

zaś półwklęsłą $\{f\}$ w I, jeżeli

$$(4) \qquad \varphi[f(x)] \geq \frac{\varphi(x) + \varphi[f^2(x)]}{2} \quad \text{dla } x \in I.$$

Jak już zauważyłem w pracy [2], pojęcia wypukłości i półwypukłości $\{f\}$ zachodzą na siebie, ale żadne z nich nie zawiera się w drugim. W tej pracy podam pewne dalsze twierdzenia dotyczące związku między tymi pojęciami.

Uogólnieniem twierdzenia 2 zawartego w pracy [2] jest następujące

Twierdzenie 1. Niech $\{f_n(x)\}$ będzie ciągiem malejącym funkcji określonych, ciągłych i rosnących w przedziale (a, ∞), spełniających w tym przedziale następujące warunki:

(5) $f_n(x) > x$ dla $n = 1,2,\ldots,\ x \in (a, \infty)$

(6) $f_n(x) \to x$ dla $x \in (a, \infty)$

i niech funkcja $f_n(x) - x$ będzie półrosnąca $\{f_n\}$[1] w (a, ∞).

Jeżeli $\varphi(x)$ jest funkcją określoną, półciągłą z góry malejącą i półwypukłą $\{f_n\}$ /dla każdego n naturalnego/ w pewnym przedziale $I \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n[(a,\infty)]$, to $\varphi(x)$ jest wypukła w I.

Dowód: Wobec tego, że ciąg funkcji $f_n(x)$ jest malejący i wobec założenia (6) ciąg $f_n[(a,\infty)]$ jest wstępujący skąd $f_1[(a,\infty)] = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n[(a,\infty)]$, a więc zbiór $\bigcap_{n=1}^{\infty} f_n[(a,\infty)]$ nie jest pusty. Zauważmy dalej, że z (6) wynika już, że $f_n(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} x$, $b < \infty$ /ponieważ x jest funkcją ciągłą/. Niech $x_0 \in I$. Stąd wynika, że x_0 należy do zapasu każdej

---

1/ Funkcję $g(x)$ określoną w przedziale (a,b) nazywamy półrosnącą $\{f\}$ w tym przedziale, gdy $g[f(x)] > g(x)$ dla $x \in (a,b)$.

z funkcji $f_n(x)$, a więc dla każdego n istnieje takie $t_n \in I$, że

$$f_n(t_n) = x_o. \tag{7}$$

Z nierówności (5) mamy więc $f_n(x) > x$ dla $x > a$, a zatem

$$t_n < x_o \quad \text{dla} \quad n = 1,2,\ldots \tag{8}$$

Ponieważ dalej ciąg $\{f_n(x)\}$ jest malejący, więc mamy na podstawie (8) :

$$x_o = f_n(t_n) = f_{n-1}(t_{n-1}) > f_n(t_{n-1}),$$

a stąd $t_{n-1} < t_n$, bo każda z funkcji $f_n(x)$ była rosnąca. Ciąg $\{t_n\}$ jest więc rosnący i ograniczony z góry /wobec (8)/, istnieje zatem jego granica. Połóżmy

$$t_o = \lim t_n . \tag{9}$$

Ponieważ ciąg $\{f_n(x)\}$ zmierza do x niemal jednostajnie w (a, ∞), więc zbieżność ta jest ciągła, tzn.

$$f_n(t_n) \to t_o , \tag{10}$$

a więc na podstawie (7) mamy

$$t_o = x_o . \tag{11}$$

Skoro funkcja $\varphi(x)$ jest, na mocy założenia funkcją pół wypukłą $\{f_n\}$ dla każdego n, więc z nierówności (3) otrzymujemy

$$2\varphi[f_n(t_n)] \leq \varphi(t_n) + \varphi[f_n^2(t_n)] \quad \text{dla } n = 1,2,\ldots. \tag{12}$$

Połóżmy

(13) $$h_n = f_n(t_n) - t_n,\ n = 1,2,\ldots$$

Na podstawie (9) i (10) mamy:

(14) $$\lim h_n = 0.$$

Skoro funkcja $f_n(x) - x$ jest półrosnąca $\{f_n\}$, więc mamy przy pomocy nierówności (5) i (2)

$$f_n^2(t_n) - f_n(t_n) \geq f_n(t_n) - t_n,$$

skąd

$$f_n^2(t_n) \geq 2f_n(t_n) - t_n,$$

a stąd, z (12) oraz z tego, że funkcja $\varphi(x)$ jest malejąca mamy

$$2\ \varphi\left[f_n(t_n)\right] \leq \varphi(t_n) + \varphi[2f_n(t_n) - t_n],$$

skąd, zgodnie z (13) i (18), wynika:

$$2\varphi(x) \leq \varphi(x - h_n) + \varphi(x + h_n) \text{ dla } n = 1,2,\ldots$$

Ostatnia nierówność daje nam, razem z wzorem (13):

$$\limsup_{h \to 0} \frac{\varphi(x + h) + \varphi(x - h) - 2\varphi(x)}{h^2} \geq 0,$$

więc $\varphi(x)$ jest wypukła w (a, ∞)[3].

Analogicznie dowodzimy:

<u>Twierdzenie 2.</u> Niech $\{f_n(x)\}$ będzie ciągiem malejącym funkcji określonych, ciągłych i rosnących w przedziale (a, ∞), spełniających warunki (5) i (6) i niech funkcja $f_n(x) - x$ będzie półrosnąca $\{f_n\}$ w przedziale (a, ∞) dla każdego n.

Jeżeli $\varphi(x)$ jest określona, półciągła z dołu, rosnąca i półwklęsła $\{f_n\}$ dla $n = 1,2,\ldots$ w pewnym przedziale

$I \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n[(a,\infty)]$ to $\varphi(x)$ jest wklęsła w I.

Zauważmy, że założenie o monotoniczności $\varphi(x)$ jest istotne, czego dowodzi następujący przykład:

Niech $\varphi(x) = \ln x + c.x\ (c>0)$, $f_n(x) = \frac{n+1}{n}x, n=1,2,\ldots,$ $a=1$. Spełnione są w tym przypadku wszystkie założenia twierdzenia 1, ale funkcja $\varphi(x)$ nie jest wypukła w żadnym podprzedziale przedziału $(1,\infty)$.

Wniosek. Jeśli funkcja $\varphi(x)$, określona, półciągła z góry /z dołu/ w przedziale (α,∞) jest w tym przedziale półwypukła $\{f\}$ /półwklęsła $\{f\}$/ dla $f(x) = cx$, gdzie c jest dowolną liczbą rzeczywistą większą niż 1, to $\varphi(x)$ jest wypukła /wklęsła/ w każdym przedziale (α,∞), gdzie $\alpha > 1$.

Dowód. Rodzina funkcji $f_n(x) = (1 + \frac{1}{n})x$ dla $n > \frac{1}{\alpha-1}$, $x > 1$ spełnia założenia twierdzenia 1, więc $\varphi(x)$ jest wypukła w przedziale (α,∞), skoro przedział ten zawiera się w zapasie każdej z funkcji $f_n(x)$.

W przypadku, gdy funkcja $\varphi(x)$ jest półciągła z dołu i półwklęsła $\{f\}$ korzystamy w analogiczny sposób z twierdzenia 2.

Również prawdziwe jest, do pewnego stopnia odwrotne,

Twierdzenie 3. Jeśli każda funkcja postaci ax, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą, jest półwypukła $\{f\}$ /półwklęsła $\{f\}$/ w (α,∞) to $f(x) = x + h$ w (α,∞) gdzie h jest stałą.

Dowód. Biorąc $a = 1$ i $a = -1$ otrzymujemy z nierówności (3) odpowiednio

$$f^2(x) - f(x) \geq f(x) - x, \quad \text{dla } x \in (\alpha,\infty)$$

oraz

$$f^2(x) - f(x) \leq f(x) - x, \text{ dla } x \in (\alpha, \infty)$$

a więc funkcja $f(x)$ musi spełniać w przedziale (α, ∞) równanie $f^2(x) - f(x) = f(x) - x$, skąd wynika/patrz [1] i [2]/, że $f(x) \equiv x + h$ w (α, ∞), gdzie h jest stałą.

W przypadku, gdy funkcja $\varphi(x)$ jest półwklęsła $\{f\}$ posługujemy się analogicznie nierównością (4).

Prace cytowane

[1] C.KURATOWSKI, Sur une ēquation fonctionnelle, Sprawozdania z posiedzeń Tow.Nauk.Warszawskiego 22 (1929), Dział III, str.160-161.

[2] D.BRYDAK, O funkcjach półwypukłych $\{f\}$, Rocznik Naukowo-Dydaktyczny Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Krakowie "Matematyka". 13 (1962), str.67-77.

[3] M.BOURBAKI, Les Structures fondamentales de l Analyse; Fonctions d une Variable Réelle, Paris 1949.

[4] M.KUCZMA, Remarks on some functional equations, Ann. Polon.Math. 8 (1960), str.277-284.

SOMMAIRE

Quelques remarques sur les fonctions semi-convexes $\{f\}$

Cet article est une complementaire de mon article précédént [2]. Ici, je donne quelques théorèmes étabissant les rélations parmi la notion de convexité et la notion de semi-convexité $\{f\}$.

Pour définir la fonction semi-convexe $\{f\}$, prennons une fonction $f(x)$ définie dans un intervalle (a,b), qui satisfait à la condition

$$f\left[(a,b)\right] \subset (a,b).$$

Par $f^n(x)$ nous dēsignons la n-tième iterée de la fonction $f(x)$:

$$f^0(x) = x, \quad f^{n+1}(x) = f\left[f^n(x)\right], \quad n = 0,1,\ldots$$

Une fonction $\varphi(x)$, définie dans un intervalle I contenu dans (a,b) est dite semi-convexe $\{f\}$, si

$$\varphi\left[f(x)\right] \leqslant \frac{\varphi(x) + \varphi\left[f^2(x)\right]}{2} \text{ pour } x \in I.$$

Si la fonction $\varphi(x)$ satisfait à l'inégalité réciproque, cette fonction est dite semi-concave $\{f\}$.

Comme une généralisation du théorème 2 de l'article [2], je donne le suivant

Theoreme 1. Soit $\{f_n(x)\}$ une suite décroissante des fonctions définies, continues et croissantes dans un intervalle (a, ∞), qui satisfont aux conditions suivantes:

$$f_n(x) > x \qquad \text{pour } n = 1,2,\ldots, \qquad x > a,$$

et $f_n(x) > x$ pour $x > a$, $n = 1,2,\ldots$. Soit $f_n(x) - x$ la

fonction semi-croissante dans (a, ∞).

Si $\varphi(x)$ est une fonction définie, décroissante semi-continue superieurèment et semi-convexe $\{f_n\}$ /pour chaque n/ dans un intervalle $I \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n[(a,\infty)]$, alors $\varphi(x)$ est convexe dans I.

De même façon nous pouvons démontrer le suivant.

Théorème 2. Soit $\{f_n(x)\}$ une suite décroissante des fonctions définies, continues et croissantes dans un intervalle (α, ∞), qui satisfont aux conditions indentique à ces du théorème 1 et soit la fonction $f_n(x) - x$ semi-croissante $\{f_n\}$ dans (α, ∞) pour chaque n.

Si $\varphi(x)$ est une fonction définie, semi-continue inferièurement semi-consave $\{f_n\}$ pour chaque n et croissante dans un intervalle

$$I \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n[(\alpha, \infty)],$$

alors $\varphi(x)$ est concave dans I.

Corollaire. Si une fonction $\varphi(x)$, définie, semi-continue suporieurèment /inferieurèment/ dans un intervalle (α, ∞) est semi-convexe $\{f\}$ /semi-concave $\{f\}$/ dans cet intervalle pour chaque $f(x) \equiv ax$, où a est un nombre réelle arbitraire, plus grand que 1, alors $\varphi(x)$ est convexe /concave/ dans chaque intervalle (α, ∞), où $\alpha > 1$.

Le théorème suivant est partiellement réciproque à ce corollaire:

Théorème 5. Si chaque fonction ax /où a est une constante arbitraire/ est semi-convexe $\{f\}$ /semi-concave $\{f\}$/ dans un intervalle (α, ∞), alors $f(x) \equiv x + h$ dans cet intervalle, où h est une constante.

J'ai aussi donné les examples pour démontrer que la condition que $\varphi(x)$ est monotone dans le théorème 3, est essentielle.

Резюме

Некоторые замечания о функциях, полувыпуклых $\{f\}$

Эта статья пополняет мою работу [2]. В ней устанавливаются связи выпуклостью и полувыпуклостью $\{f\}$.

Для определения функчии полувыпуклой $\{f\}$, возьмем функцию $f(x)$, $x \in (a,b)$ для которой

$$f\left[(a, b)\right] \subset (a, b).$$

Пусть f^n обозначает её n-тую итерату:

$$f^0(x) \equiv x, \quad f^{n+1}(x) = f\left[f^n(x)\right], \quad n = 0,1,\ldots$$

Функцию $\varphi(x)$, определённую в интервале (a,b), назовем полувыпуклой $\{f\}$ в интервале $I \subset (a,b)$, если

$$\varphi[f(x)] \leqslant \frac{\varphi(x) + \varphi[f^2(x)]}{2} \quad (x \in J).$$

Удовлетворяет ли φ противоположному неравенству, назовём её полувогнутой $\{f\}$.

Теорема 2. из [2] допускает следующее обобжение:

Теорема 1. Пусть $\{f_n(x)\}$ является убывающей последовательностью функции возрастающих и непрерывних в интервале $(a,-\infty)$ таких что $f_n(x) > x$ $(n = 1,2,\ldots)$,

и $f_n(x) \to x$ $(x > a)$.

Пусть $f_n(x)-x$ является полувозрастающей $\{f_n(x)\}$ в (a,∞).

Если $\varphi(x)$ является функцией убывающей, полунепрерывной сверху и полувыпуклой $\{f_n\}$ для всех n в интервале $I \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n(a,\infty)$, то $\varphi(x)$ выпукла в I.

Метод довода пригоден и для получения

Теоремы 2. Пусть $\{f_n\}$ удовлетворяет условиями теоремы если $\varphi(x)$ является полунерпрерывной снизу, полувогнутой $\{f_n\}$ для всех n и возрастающей в интервале $I \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n(a,\infty)$, то $\varphi(x)$ вогнута в I.

Следствие. Если функция $\varphi(x)$ является полунепрерывной сверху /снизу/ в интервале (a,∞) и полувыпуклой $\{f\}$ полувогнутой в этом интервале при всех $f(x) = \alpha x$ (- произвольное вещественное число болше 1), то $\varphi(x)$ выпукла /вогнута/ во всяком интервале (a,∞), где $\alpha > 1$.

Имеется и теорема, частично обратка этому следствию:

Теорема 3. Если всякая функция вида ax (a - произвольная постоянная является полувыпуклой $\{f\}$ полувогнутой $\{f\}$) в интервале (a,∞), то $f(x) = x + h$ в этом интервале (h постоянное).

Приводятся, к пополнению, примери доказывающие, что условие монотонности $\varphi(x)$ в теореме 1 существенное.