Władysław Gajowiec

KONSTRUKCJE FUNKCJI GREENA DLA PEWNYCH OBSZARÓW METODĄ SYMETRII

W pracy podamy konstrukcje funkcji GREENA w kilku przypadkach przy zastosowaniu odbić symetrycznych.

1. Konstrukcja funkcji GREENA dla obszaru D określonego nierównościami: $\xi > 0$, $\eta > 0$, ζ dowolne.

Niech punkt $X(x,y,z)$ będzie punktem stałym obszaru D, $Y(\xi,\eta,\zeta)$ punktem zmiennym $\overline{D}$.

Oznaczamy punkty: $X_{\xi}(-x,y,z)$, $X_{\eta}(x,-y,z)$, $X_{\xi\eta}(-x,-y,z)$.

Niech $\overline{XY} = r$, $\overline{X_{\xi}Y} = r_{\xi}$, $\overline{X_{\eta}Y} = r_{\eta}$, $\overline{X_{\xi\eta}Y} = r_{\xi\eta}$.

Twierdzenie

Funkcja

$$G(X,Y) = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{\xi}}\right) - \left(\frac{1}{r_{\eta}} - \frac{1}{r_{\xi\eta}}\right)$$

jest funkcją GREENA dla obszaru D z biegunem w punkcie X.

Dowód

$H(X,Y) = \frac{1}{r_{\xi}} + \frac{1}{r_{\eta}} - \frac{1}{r_{\xi\eta}}$ jest funkcją harmoniczną w D, biregularną w $\overline{D}$.

Jeżeli $Y \in (\xi = 0)$, to $r = r_\xi$, $r_\eta = r_{\xi\eta}$, czyli $G(X,Y) = 0$.

Jeżeli $Y \in (\eta = 0)$, to $r = r_\eta$, $r_\xi = r_{\xi\eta}$, czyli $G(X,Y) = 0$.

Jeżeli $Y \to \infty$, to $r \to \infty$, a stąd $r_\xi \to \infty$, $r_\eta \to \infty$, $r_{\xi\eta} \to \infty$, więc $G(X,Y) \to 0$.

c.n.d.

2. Konstrukcja funkcji GREENA dla obszaru D określonego nierównościami : $\xi > 0$, $\eta > 0$, $\zeta > 0$.

Niech punkt $X(x,y,z)$ będzie punktem stałym obszaru D, $Y(\xi, \eta, \zeta)$ punktem zmiennym $\bar{D}$.

Oznaczamy punkty: $X_\xi(-x,y,z)$, $X_\eta(x,-y,z)$, $X_\zeta(x,y,-z)$, $X_{\xi\eta}(-x,-y,z)$, $X_{\xi\zeta}(-x,y,-z)$, $X_{\eta\zeta}(x,-y,-z)$, $X_{\xi\eta\zeta}(-x,-y,-z)$.

Niech $\overline{XY} = r$, $\overline{X_\xi Y} = r_\xi$, ... $\overline{X_{\xi\eta\zeta}Y} = r_{\xi\eta\zeta}$.

T w i e r d z e n i e

Funkcja

$$G(X,Y) = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_\xi}\right) - \left(\frac{1}{r_\eta} - \frac{1}{r_{\xi\eta}}\right) - \left(\frac{1}{r_\zeta} - \frac{1}{r_{\xi\zeta}}\right) - \left(\frac{1}{r_{\xi\eta\zeta}} - \frac{1}{r_{\eta\zeta}}\right).$$

jest funkcją GREENA dla obszaru D z biegunem w punkcie X.

D o w ó d

$$H(X,Y) = \frac{1}{r_\xi} + \frac{1}{r_\eta} - \frac{1}{r_{\xi\eta}} + \frac{1}{r_\zeta} - \frac{1}{r_{\xi\zeta}} + \frac{1}{r_{\xi\eta\zeta}} - \frac{1}{r_{\eta\zeta}}$$

jest funkcją harmoniczną w D , biregularną w $\bar{D}$.

Jeżeli $Y \in (\xi = 0)$, to $r = r_\xi$, $r_\eta = r_{\xi\eta}$, $r_\zeta = r_{\xi\zeta}$, $r_{\eta\zeta} = r_{\xi\zeta\eta}$, czyli $G(X,Y) = 0$.

Jeżeli $Y \in (\eta = 0)$, to $r = r_\eta$, $r_\xi = r_{\xi\eta}$, $r_\zeta = r_{\eta\zeta}$,

$r_{\xi\zeta} = r_{\xi\eta\zeta}$, czyli $G(X,Y) = 0$.
Jeżeli $Y \in (\zeta = 0)$, to $r = r_{\zeta}$, $r_{\xi} = r_{\xi\zeta}$, $r_{\eta} = r_{\eta\zeta}$, $r_{\xi\eta} = r_{\xi\zeta\eta}$, czyli $G(X,Y) = 0$.
Jeżeli $Y \to \infty$, to $r \to \infty$, a stąd $r_{\xi} \to \infty$, $r_{\eta} \to \infty$, ... $r_{\xi\eta\zeta} \to \infty$, stąd zaś $G(X,Y) \to 0$ c.n.d.

3. Konstrukcja funkcji GREENA dla obszaru D określonego nierównościami: $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 < R^2$, $\xi > 0$, $\zeta > 0$.

Niech punkt $X(x,y,z)$ będzie punktem stałym obszaru D, $Y(\xi,\eta,\zeta)$ punktem zmiennym $\overline{D}$.
Oznaczmy punkty: $\overline{X}(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ taki, dla którego $\overline{OX} \cdot \overline{O\overline{X}} = R^2$, $\overline{OX} = \rho$, $\overline{O\overline{X}} = \overline{\rho}$, $X_{\xi}(-x,y,z)$, $\overline{X}_{\xi}(-\overline{x},\overline{y},\overline{z})$, $X_{\zeta}(x,y,-z)$, $\overline{X}_{\zeta}(\overline{x},\overline{y},-\overline{z})$, $X_{\xi\zeta}(-x,y,-z)$, $\overline{X}_{\xi\zeta}(-\overline{x},\overline{y},-\overline{z})$.
Niech $\overline{XY} = r$, $\overline{X_{\xi}Y} = r_{\xi}$, ... $\overline{X_{\xi\zeta}Y} = r_{\xi\zeta}$.

T w i e r d z e n i e

Funkcja

$$G(X,Y) = \left(\frac{1}{r} - \frac{R}{\rho}\;\frac{1}{\overline{r}}\right) - \left(\frac{1}{r_{\xi}} - \frac{R}{\rho}\;\frac{1}{\overline{r}_{\xi}}\right) - \left(\frac{1}{r} - \frac{R}{\rho}\;\frac{1}{\overline{r}_{\zeta}}\right) - \left(\frac{R}{\rho}\;\frac{1}{\overline{r}_{\xi\zeta}} - \frac{1}{r_{\xi\zeta}}\right)$$

jest funkcją GREENA dla obszaru D z biegunem w punkcie X.

D o w ó d

$H(X,Y)$ jest funkcją harmoniczną w D i biregularną w $\overline{D}$.
Dla $Y \in (\xi = 0)$, $r = r_{\xi}$, $\overline{r} = \overline{r}_{\xi}$, $r_{\zeta} = r_{\xi\zeta}$, $\overline{r}_{\zeta} = \overline{r}_{\xi\zeta}$
czyli $G(X,Y) = 0$.
Dla $Y \in (\zeta = 0)$, $r = r_{\zeta}$, $\overline{r} = \overline{r}_{\zeta}$, $r_{\xi} = r_{\xi\zeta}$, $\overline{r}_{\xi} = \overline{r}_{\xi\zeta}$,
czyli $G(X,Y) = 0$.
Jeżeli $Y \in (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2)$, to $\overline{r} = \frac{r \cdot R}{\rho}$, $\overline{r}_{\xi} = \frac{r_{\xi} R}{\rho}$ ...
... $\overline{r}_{\xi\zeta} = \frac{r_{\xi\zeta} R}{\rho}$, a stąd $G(X,Y) = 0$.

c.n.d.

4. Konstrukcja funkcji GREENA dla obszaru D określonego nierównościami: $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 < R^2$, $y_1 > 0$, $y_2 > 0, \ldots, y_n > 0$.

Niech $X(x_1, \ldots, x_n)$ będzie punktem stałym obszaru D, $Y(y_1, \ldots, y_n)$ punktem zmiennym $\bar{D}$.
Zaznaczamy punkt $\bar{X}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ symetryczny do punktu X, względem $(y_1^2 + \ldots + y_n^2 = R^2)$, punkt X_{y_1} symetryczny do punktu X względem hiperpłaszczyzny $(y_1 = 0)$, $\bar{X}_y$ symetryczny do punktu $\bar{X}$ względem $(y_1 = 0)$ i podobnie punkty: X_{y_2}, $\bar{X}_{y_2}$, ..., $X_{y_1 \ldots y_n}$, $\bar{X}_{y_1 \ldots y_n}$.

Niech $\overline{OX} = \varrho$, $\overline{XY} = r$, $\overline{\bar{X}Y} = \bar{r}$, $\overline{X_{y_1}Y} = r_y$, $\overline{\bar{X}_{y_1}Y} = \bar{r}_y$ ..... $\overline{X_{y_1 \ldots y_n}Y} = r_{y_1 \ldots y_n}$, $\overline{\bar{X}_{y_1 \ldots y_n}Y} = \bar{r}_{y_1 \ldots y_n}$.

Twierdzenie

Funkcja

$$G(X,Y) = \left[r^{-n+2} - \left(\frac{\varrho}{R}\bar{r}\right)^{-n+2}\right] - \sum_{i=1}^{n}\left[r_{y_i}^{-n+2} - \left(\frac{\varrho}{R}\bar{r}_{y_i}\right)^{-n+2}\right] +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n}\left[r_{y_i y_j}^{-n+2} - \left(\frac{\varrho}{R}\bar{r}_{y_i y_j}\right)^{-n+2}\right] - \sum_{i,j,k=1}^{n}\left[r_{y_i y_j y_k}^{-n+2} \left(-\frac{\varrho}{R}\bar{r}_{y_i y_j y_k}\right)^{-n+2}\right] +$$

$$+ \ldots + (-1)^p \sum_{i_1 i_2 \ldots i_p = 1}^{n}\left[r_{y_{i_1} \ldots y_{i_p}}^{-n+2}\left(-\frac{\varrho}{R}\bar{r}_{y_{i_1} \ldots y_{i_p}}\right)^{-n+2}\right] +$$

$$+ \ldots + (-1)^n\left[r_{y_1 \ldots y_n}^{-n+2} - \left(\frac{\varrho}{R}\bar{r}_{y_1 \ldots y_n}\right)^{-n+2}\right]$$

jest funkcją GREENA dla obszaru D z biegunem w punkcie X.

<u>Dowód</u>

$U(X,Y) = r^{-n+2}$ jest funkcją harmoniczną w D poza biegunem jako rozwiązanie podstawowe równania LAPLACE'a, a stąd wynika, że $H(X,Y)$ jest harmoniczna w D i biregularna w $\overline{D}$.

Pozostaje wykazać, że:

1. $G(X,Y) = 0$, gdy $Y \in (y_1^2 + \ldots + y_n^2 = R^2)$

2. $G(X,Y) = 0$, gdy $Y \in (y_1 = 0)$

....

....

n+1 $G(X,Y) = 0$, gdy $Y \in (y_n = 0)$,

Ad.1.

$$\overline{r} = \frac{R\,r}{\varrho}, \quad \overline{r}_{y_1} = \frac{R\,r}{\varrho}{}_{y_1}, \ldots, \overline{r}_{y_1 \ldots y_n} = \frac{R\,r_{y_1 \ldots y_n}}{\varrho},$$

czyli $G(X,Y) = 0$.

Ad.2.

$$r = r_{y_1}, \ \overline{r} = \overline{r}_{y_1}, \ r_{y_2} = r_{y_1 y_2}, \ \overline{r}_{y_2} = \overline{r}_{y_1 y_2} \ \ldots\ldots$$

$$r_{y_2 \ldots y_n} = r_{y_1 \ldots y_n}, \ \overline{r}_{y_2 \ldots y_n} = \overline{r}_{y_1 \ldots y_n},$$

czyli $G(X,Y) = 0$

....

....

Ad. n+1

$$r = r_{y_n}, \ \overline{r} = \overline{r}_{y_n}, \ r_{y_1} = r_{y_1 y_n}, \ \overline{r}_{y_1} = \overline{r}_{y_1 y_n} \ \ldots\ldots$$

$$r_{y_1 \ldots y_{n-1}} = r_{y_1 \ldots y_n}, \ \overline{r}_{y_1 \ldots y_{n-1}} = \overline{r}_{y_1 \ldots y_n},$$

czyli $G(X,Y) = 0.$

c.n.d.

Prace cytowane

[1]. M.KRZYŻAŃSKI, Równania różniczkowe cząstkowe, cz.I, Warszawa 1957.

[2]. M.KRZYŻAŃSKI, Zeszyty Naukowe U.J., nr 14, Kraków 1957.

Резюме

Конструкции функции Грина для некоторых областей методом симметрии.

В работе даны конструкции функции Грина для следующих областей:

1) для области D определенной неравенствами $\xi > 0$, $\eta > 0$, ζ произвольные,
2) $\xi > 0$, $\eta > 0$, $\zeta > 0$,
3) $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 < R^2$, $\xi > 0$, $\zeta > 0$,
4) $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 < R^2$, $y_1 > 0, y_2 > 0, \ldots, y_n > 0$,

Например для конструкции 2 пусть точка $X(x, y, z)$ будет постоянной точкой области D, $y(\xi\eta\zeta)$ переменной точкой $\overline{D}$.

Обозначим точки : $X_\xi(-x,y,z)$, $X_\eta(x,-y,z)$, $X_\zeta(x,y,-z)$, $X_{\xi\eta}(-x,-y,z)$, $X_{\xi\zeta}(-x,y,-z)$, $X_{\eta\zeta}(x,-y,-z)$, $X_{\xi\eta\zeta}(-x,-y,-z)$.
Пусть $\overline{XY} = r$, $\overline{X_\xi Y} = r_\xi$, ..., $\overline{X_{\xi\eta\zeta} Y} = r_{\xi\eta\zeta}$.

Т е о р е м а.

функция

$$G(X,Y)=\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_\xi}\right)-\left(\frac{1}{r_\eta}-\frac{1}{r_{\xi\eta}}\right)-\left(\frac{1}{r_\zeta}-\frac{1}{r_{\xi\zeta}}\right)-\left(\frac{1}{r_{\xi\eta\zeta}}-\frac{1}{r_{\eta\zeta}}\right)$$

является функцией Грина для области с полюсом в точке X.

Для 4.

Пусть точка $X(x_1\ldots x_n)$ будет постоянной точкой области D , $Y(y_1\ldots y_n)$ точкой переменной. $\overline{D}$.
Обозначаем точку $\overline{X}(\overline{x}_1\ldots\overline{x}_n)$, которая является симметричной к точке X относительно $(y_1^2 + \ldots\ldots y_n^2) = R^2$, точку $\overline{X}_{y_1}$ симметричной к точке $\overline{X}$ относительно гиперплоскости $(y_1 = 0)$ точку $\overline{X}_{y_1}$ симметричной к точке $\overline{X}$ относительно $(y_1 = 0)$ и аналогично точки: X_{y_2}, $\overline{X}_{y_2}$ ..... $X_{y_1\ldots y_n}$, $\overline{X}_{y_1\ldots y_n}$.
Пусть $\overline{OX} = \rho$, $\overline{XY} = r$, $\overline{\overline{X}Y} = \overline{r}$, $\overline{X_{y1}\ Y} = r_{y1}$, $\overline{\overline{X}_{y1}\ Y} = \overline{r}_{y1}$, ... $\overline{X_{y_1\ldots y_n}\ Y} = r_{y_1\ldots y_n}$, $\overline{\overline{X}_{y_1\ldots y_n}\ Y} = \overline{r}_{y_1\ldots y_n}$.

Т е о р е м а.

функция

$$G\ /X,Y/ = \left[r^{-n+2} - \left(\frac{\varrho}{R}\ \bar{r}\right)^{-n+2}\right] - \sum_{i=1}^{n}\left[r_{y_i}^{-n+2} - \left(\frac{\varrho}{R}\ \bar{r}_{y_i}\right)^{-n+2}\right] +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n}\left[r_{y_i y_j}^{-n+2} - \left(\frac{\varrho}{R}\ \bar{r}_{y_i y_j}\right)^{-n+2}\right] - \sum_{i,j,k=1}^{n}\left[r_{y_i y_j y_k}^{-n+2} - \left(\frac{\varrho}{R}\ r_{y_i y_j y_k}\right)^{-n+2}\right]$$

$$+ \ldots\ldots + /-1/^{p} \sum_{i_1, i_2 \ldots i_p = 1}^{n}\left[r_{y_{i_1} \ldots y_{i_p}}^{-n+2} - \left(\frac{\varrho}{R}\ \bar{r}_{y_{i_1} \ldots y_{i_p}}\right)^{-n+2}\right] +$$

$$+ \ldots\ldots + /-1/^{p}\left[r_{y_1 \ldots y_n}^{-n+2} - \left(\frac{\varrho}{R}\ \bar{r}_{y_1 \ldots y_n}\right)^{-n+2}\right]$$

является функцией Грина для области с полюсом в точке X.

SUMMARY

Green's function constructions for some domains by the symetry method.

The author gives some constructions of the Green's function for the following domains:

1/ for the domain D, which is defined by the inequalities $\xi > 0$, $\eta > 0$, ζ facultative,

2/ $\xi > 0$, $\eta > 0, \zeta > 0$,

3/ $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 < R^2$, $\xi > 0$, $\zeta > 0$,

4/ $y_1^2 + y_2^2 + \ldots\ldots + y_n^2 < R^2$, $y_1 \quad 0$, $y_2 > 0$, $\ldots$, $y_n > 0$,

For example, for construction 2; let $X\,/x,y,z/$ be the constant point of D, and $Y\,/\xi,\eta,\zeta/$ the variable point of $\overline{D}$. We denote the points: $X_\xi\,/-x,y,z/$, $X_\eta/x,-y,z/$, $X_\zeta/x,y,-z/$, $X_{\xi\eta}/-x,-y,z/$, $X_{\xi\zeta}\,/-x,y,-z/$, $X_{\eta\zeta}\,/x,-y,z/$, $X_{\xi\eta\zeta}/-x,-y,-z/$. Let $\overline{XY} = r$, $\overline{X_\xi Y} = r_\xi$, $\ldots\ldots$, $\overline{X_{\xi\eta\zeta} Y} = r_{\xi\eta\zeta}$.

T h e o r e m

Function

$$G\,/X,Y/ = /\frac{1}{r} - \frac{1}{r_\xi}\;/ - /\frac{1}{r_\eta} - \frac{1}{r_{\xi\eta}}\;/ - /\frac{1}{r_\zeta} - \frac{1}{r_{\xi\zeta}}\;/ - /\,\frac{1}{r_{\xi\eta\zeta}} - \frac{1}{r_{\eta\zeta}}\,/$$

is Green's function for D with the pole in point X.

For 4.

Let point $X\,/x_1 \ldots x_n/$ be the constant point of D, and $Y\,/y_1 \ldots y_n/$ be the variable point of $\overline{D}$.
We denote the point $\overline{X}\,/\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_n/$, which is a point symetrical to point X towards $/y_1^2 + \ldots + y_n^2 = R^2/$, the point X_{y_1}, which is a point symetrical to the point X towards the hyperplane $/y_1 = 0/$, the point $\overline{X}_{y_1}$, which is a symetrical point to point $\overline{X}$ towards $/y_1 = 0/$, and analogically the points:

X_{y_2}, $\overline{X}_{y_2} \ldots X_{y_1 \ldots y_n}$, $\overline{X}_{y_1 \ldots y_n}$. Let $\overline{OX} = \varrho$, $\overline{XY} = r$,

$\overline{XY} = \overline{r}$, $\overline{X_{y_1} Y} = r_{y_1}$, $\overline{\overline{X}_{y_1} Y} = \overline{r}_{y_1}$, ... $\overline{X_{y_1 \dots y_n} Y} = r_{y_1 \dots y_n}$,

$\overline{\overline{X}_{y_1 \dots y_n} Y} = \overline{r}_{y_1 \dots y_n}$.

T h e o r e m

The function

$$G\,/X,Y/ = \left[r^{-n+2} - \left(\frac{\varrho}{R} r \right)^{-n+2} \right] - \sum_{i=1}^{n} \left[r_{y_i}^{-n+2} - \left(\frac{\varrho}{R} r_{y_i} \right)^{-n+2} \right] +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \left[r_{y_i y_j}^{-n+2} - \left(\frac{\varrho}{R} r_{y_i y_j} \right)^{-n+2} \right] - \sum_{i,j,k=1}^{n} \left[r_{y_i y_j y_k}^{-n+2} - \left(\frac{\varrho}{R} r_{y_i y_j y_k} \right)^{-n+2} \right]$$

$$+ \dots\dots + /-1/^{p} \sum_{i_1 i_2 \dots i_p = 1}^{n} \left[r_{y_{i_1} \dots y_{i_p}}^{-n+2} - \left(\frac{\varrho}{R} r_{y_{i_1} \dots y_{i_p}} \right)^{-n+2} \right] +$$

$$+ \dots\dots + /-1/^{n} \left[r_{y_1 \dots y_n}^{-n+2} - \left(\frac{\varrho}{R} r_{y_1 \dots y_n} \right)^{-n+2} \right]$$

is the Green function for D with the pole in point X.