Stanisław Gołąb, Zenon Moszner

O PEWNEJ PRZESTRZENI METRYCZNEJ DWUWYMIAROWEJ

Przestrzeń topologiczna metryzowalna w sensie Frécheta, może być na ogół zmetryzowana na wiele sposobów [3]. Jednym ze sposobów zmiany metryki ϱ albo - jak mówi L.M. BLUMENTHAL [3] "distortion of the metric" - jest zdefiniowanie nowej metryki ϱ^* za pomocą związku

$$\varrho^*[p,q] = \Phi[\varrho(p,q)] ,$$

gdzie $\Phi(u)$ jest funkcją określoną dla $u \geq 0$, znikającą jedynie dla $u = 0$, rosnącą i spełniającą jeszcze pewne warunki. Ale nie każde "distortion" musi być tego typu.

W niniejszej nocie zajmiemy się pewną metryzacją płaszczyzny, która nie jest wynikiem Φ- metryzacji metryki euklidesowej, a która gra rolę w pewnym zastosowaniu [4].

Oznaczając przez x_i [$i=1,2$] prostokątne współrzędne Kartezjusza i oznaczając przez a_i, b_i współrzędne punktów a,b, mamy dla metryki euklidesowej wzór

$$\varrho[a,b] = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}(b_i-a_i)^2}$$

lub, oznaczając przez λ_i składowe wektora $\overrightarrow{ab}$, mamy

$$\varrho[a,b] = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} .$$

Przyjmijmy teraz pewną liczbę dodatnią p i zdefiniujmy nową metrykę ϱ^* w sposób następujący

(1) $$\varrho^*[a,b] = \sqrt{\lambda_1^2 + |\lambda_2|^{2p}} .$$

Powstaje pytanie czy i kiedy /dla jakich wartości parametru p/ metryka ϱ^* będzie spełniać postulaty Frécheta. Odpowiedź na to pytanie daje następujące

Twierdzenie. Warunek konieczny i dostateczny na to, by metryka ϱ^* określona wzorem (1) spełniała postulaty Frécheta polega na tym, by liczba dodatnia p spełniała nierówność

$$p \leq 1$$

Dowód. Nie trudno zauważyć, że jeżeli ϱ^* jest metryką w sensie Frécheta na płaszczyźnie, to $|\lambda_2|^p$ jest metryką na prostej. Stąd w szczególności mamy

(2) $$(\lambda_2 + \mu_2)^p \leq \lambda_2^p + \mu_2^p$$

dla każdego $\lambda_2 \geq 0$ oraz każdego $\mu_2 \geq 0$. Wiadomo jednak, że powyższa nierówność pociąga za sobą $0 < p \leq 1$.

Na odwrót, jeżeli $0 < p \leq 1$, to nierówność (2) jest spełniona przy wszelkich $\lambda_2 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0$, a więc $|\lambda_2|^p$ jest metryką na prostej, bowiem

$$|\lambda_2 + \mu_2|^p \leq (|\lambda_2| + |\mu_2|)^p \leq |\lambda_2|^p + |\mu_2|^p .$$

Ponieważ funkcja $|\lambda_1|$ jest oczywiście metryką na prostej, a płaszczyzna jest iloczynem kartezjańskim prostej przez siebie, więc $\varrho^* = \sqrt{|\lambda_1|^2 + (|\lambda_2|^p)^2}$ jest metryką na płaszczyźnie, c.n.o.

Uwaga 1. Metryka ϱ^* nie jest dla $p < 1$ wypukła w sensie Mengera ([1]).

Istotnie, weźmy np. dwa punkty a, b o współrzędnych Kartezjusza $a(0,1/2)$, $b(0,-1/2)$ i przypuśćmy, że istnieje taki trzeci punkt $c(c_1,c_2)$ różny od a i b, który "leży między a i b", tj. posiada własność

$$\varrho^*(a,c) + \varrho^*(c,b) = \varrho^*(a,b).$$

Mamy więc

$$\sqrt{c_1^2 + (c_2 + 1/2)^{2p}} + \sqrt{c_1^2 + (c_2 - 1/2)^{2p}} = 1. \tag{3}$$

Stąd $|c_1 + 1/2| \leq 1$ oraz $|c_2 - 1/2| \leq 1$, a więc

$$|c_2| \leq 1/2 . \tag{4}$$

Z równości (3) otrzymujemy

$$2\sqrt{c_1^2 + (c_2 + 1/2)^{2p}} = 1 + (c_2+1/2)^{2p} - (c_2-1/2)^{2p},$$

a ponieważ

$$\sqrt{c_1^2 + (c_2 + 1/2)^{2p}} \geq |c_2 + 1/2|^p$$

więc, uwzględniając, iż $c_2 + 1/2 \geq 0$ na podstawie (4), mamy

$$2(c_2 + 1/2)^p \leq 1 + (c_2 + 1/2)^{2p} - (c_2 - 1/2)^{2p} .$$

Stąd

$$(c_2 - 1/2)^{2p} \leq [1 - |c_2 + 1/2|^p]^2 ,$$

a więc, wobec (4)

$$(1/2 - c_2)^p \leq 1 - (c_2 + 1/2)^p . \tag{5}$$

Rozważmy funkcję pomocniczą

$$\text{ł}(x) \overset{df}{=} (1/2 - x)^p + (x + 1/2)^p,$$

dla $|x| \leq 1/2$.

Mamy dla $|x| \leq 1/2$:

$$ł'(x) = -p(1/2 - x)^{p-1} + p(x + 1/2)^{p-1} =$$

$$= p\left[(x + 1/2)^{p-1} - (1/2 - x)^{p-1}\right].$$

Dla $0 < x < 1/2$ mamy $x + 1/2 > 1/2 - x > 0$, a więc $(0<p<1)$

$$ł'(x) < 0,$$

stąd dla $0 < x < 1/2$ funkcja $ł(x)$ maleje.

Dla $-1/2 < x < 0$ mamy $0 < x + 1/2 < 1/2 - x$, a więc $(0<p<1)$

$$ł'(x) > 0,$$

stąd dla $-1/2 < x < 0$ funkcja $ł(x)$ rośnie.

Ponieważ $ł(x)$ jest funkcją ciągłą dla $0 < p$ oraz $ł(1/2) = ł(-1/2) = 1$, więc dla $|x| \leq 1/2$ mamy $ł(x) \geq 0$, przy czym

$$ł(x) = 1 \quad \text{jedynie dla} \quad |x| = 1/2 .$$

Stąd nierówność (5), czyli $ł(c_2) \leq 1$, pociąga za sobą $ł(c_2) = 1$, czyli $|c_2| = 1/2$, a więc na podstawie (3) otrzymujemy

$$|c_1| + \sqrt{c_1^2 + 1} = 1,$$

co jest możliwe tylko wtedy, gdy $c_1 = 0$. Mamy więc $c=a$ lub $c=b$, wbrew założeniu.

Można wykazać więcej, a mianowicie, że jeśli $a_2 \neq b_2$, to jakikolwiek łuk łączący a z b jest nieprostowalny według metryki ϱ^*.

Uwaga 2. Metryka ϱ^* określona wzorem (1) nie jest ϕ-metryką ([2]), otrzymaną z metryki euklidesowej (dla $p<1$).

Dowód. Dla dowodu niewprost przypuśćmy na chwilę, że jest

$$\varrho^* = \phi(\varrho)$$

czyli

$$\sqrt{\lambda_1^2 + |\lambda_2|^{2p}} = \Phi\left(\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}\right). \tag{6}$$

Kładąc tu $\lambda_1 = 0$ otrzymalibyśmy

$$|\lambda_2|^p = \Phi(|\lambda_2|)$$

czyli

$$\Phi(u) = u^p .$$

Wstawiając to do (6) mielibyśmy

$$\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right)^{p/2} = \left(\lambda_1^2 + |\lambda_2|^{2p}\right)^{1/2}.$$

Kładąc tu $\lambda_2 = 0$ otrzymalibyśmy

$$|\lambda_1|^p = |\lambda_1|,$$

co, jeśli ma zachodzić dla wszelkich λ_1, jest możliwe tylko, gdy $p = 1$ wbrew założeniu.

Prace cytowane

[1] K.MENGER, Untersuchungen über allgemeine Metrik, Math. Ann. 100 (1928), 75-163.

[2] K.MENGER, Über die Φ-Metrik und Φ-Bogenlänge, Erg. eines math. Koll. /Wien/, Heft 7 /1936/, 13-14.

[3] L.M.BLUMENTHAL, Distance Geometries, Missouri Studies, Vol.8 /1938/.

[4] S.GOŁĄB, Kilka uwag o porównaniu teorii z doświadczeniem, Geodezja i Kartografia, Nr 2 /1963/ 141-151.

RÉSUMÉ

Sur un espace métrique à deux dimensions

On démontre que la métrique ρ^*, définie sur un plan par la formule (1), où (λ_1, λ_2) sont les composantes cartésiennes du vecteur ab et p est un nombre positif, satisfait aux axiomes de M.Fréchet si et seulement si le nombre p remplit l'inégalité $p \leq 1$. Pour $p < 1$, la métrique (1) n'est pas convexe au sens de M.Menger et elle n'est pas une ϕ-métrique au sens de M.Menger, obtenue de la métrique euclidienne.

Резюме

О некотором двумерном метрическом пространстве

В работе доказывается, что метрика ρ^* на плоскости, определение которой дано соотношением /1/, где $/\lambda_1, \lambda_2/$ являются картезианскими координатами вектора $\vec{ab}$, а p - положительное число, выполняет акциомы Фрешета тогда и только тогда, когда $p \leq 1$. Для $p < 1$ метрика /1/ не является выпуклой в смысле Менгера и не является ϕ - метрикой в смысле Менгера для эвклидовой метрики.