Stanisław Midura

O PORÓWNANIU DEFINICJI STYCZNOŚCI ŁUKÓW PROSTYCH W OGÓLNYCH PRZESTRZENIACH METRYCZNYCH

W pracy S.GOŁĄBA i Z.MOSZNERA [2] podana jest definicja styczności łuków prostych w ogólnych przestrzeniach metrycznych. A.D.ALEKSANDROW w książce [1] str.36 przyjmuje pewne określenia kąta między łukami prostymi, pozwalające na sformułowanie poniżej innej definicji styczności łuków prostych w ogólnych przestrzeniach metrycznych. Definicje te nie są równoważne. W pracy niniejszej zajmiemy się ustaleniem pewnych związków między nimi oraz niektórymi własnościami styczności według tych definicji.x/

Niech E oznacza przestrzeń wyposażoną w metrykę odległościową spełniającą znane postulaty FRÉCHETA. Elementy przestrzeni E oznaczać będziemy małymi literami alfabetu łacińskiego. Dużymi literami łacińskimi oznaczać będziemy łuki proste /zwane krótko łukami/ w przestrzeni E. Przez $\varrho(p,q)$ oznaczamy odległość między punktami p i q. Łuki oznaczone literami C, C_1, C_2 i C_3 będą sparametryzowane odpowiednio parametrami r,s,t i u, przy czym każdy z parametrów zmienia się w przedziale domkniętym $[0,1]$. Przez $p_2/t/$ lub krótko p_2 oznaczamy punkt leżący na

x/ Problem porównania obu tych definicji postawił Z.Moszner.

krzywej C_2 odpowiadający parametrowi t /analogicznie oznaczamy przez $p/r/$, $p_1/s/$, $p_3/u/$ lub krótko p, p_1, p_3 punkty krzywych C, C_1 i C_3 odpowiadające odpowiednio parametrom r,s i u/.

Załóżmy, że dwa łuki C_1 i C_2 wychodzą z tego samego punktu po /tzn., że $p_0 \in C_1$ i $p_0 \in C_2$ oraz punkt p_0 odpowiada parametrowi 0 na obu tych łukach/.

A.D.ALEKSANDROW ([1] str.36) definiuje kąt między łukami C_1 i C_2 jako kąt z przedziału $\langle 0,\pi \rangle$ spełniający równość:

$$\cos\alpha = \lim_{s,t\to 0} \frac{\varrho^2(p_0,p_1(s))+\varrho^2(p_0,p_2(t))-\varrho^2(p_1(s),p_2(t))}{2\varrho(p_0,p_1(s))\varrho(p_0,p_2(t))},$$

jeżeli istnieje granica w powyższej równości.

W oparciu o podaną definicję kąta styczność łuków określamy następująco:

<u>Definicja 1.</u> Łuk prosty C_2 jest styczny w punkcie p_0 do łuku prostego C_1 jeśli spełniony jest związek:

$$\lim_{\substack{p_1\to p_0\\ p_2\to p_0}} \frac{\varrho^2(p_0,p_1)+\varrho^2(p_0,p_2)-\varrho^2(p_1,p_2)}{2\varrho(p_0,p_1)\varrho(p_0,p_2)} = 1.$$

Styczność łuku C_2 do łuku C_1 w punkcie p_0 będziemy oznaczali krótko $C_2 T_1 C_1$, a samą relację styczności przez T_1. Łuki styczne według definicji 1 będziemy nazywać T_1 stycznymi.

Podamy pewne własności relacji T_1. Z definicji 1 wynika, że <u>relacja T_1 jest symetryczna</u>. Przy końcu pracy [2] podany jest przykład łuku /łamana/, o którym łatwo udowodnić, że nie jest on T_1 styczny do siebie /zob. też tw.6/. Zatem relacja T_1 nie jest zwrotna. Udowodnimy w dalszej części pracy /tw.4/, że relacja T_1 jest przechodnia.

Przypomnimy (podane w pracy [2]) pojęcie rzutu punktu a na łuk prosty C. Rzutem a' punktu a na łuk C nazywamy punkt $p/\bar{r}/$ łuku C, który odpowiada najmniejszej wartości r parametru $\bar{r}$ $(r \in [\bar{0},1])$, spełniającego związek

$$\rho\,(a,\,p\,(r)) = \rho\,(a,\,C),$$

gdzie $\rho\,(a,C)$ oznacza odległość punktu a od łuku C.

S.GOŁĄB definiuje pojęcie styczności łuków w następujący sposób:

Definicja 2. Łuk prosty C_2 jest w punkcie po styczny do łuku prostego C_1, jeśli oznaczając przez p_2 bieżący punkt łuku C_2 różny od po a przez p'_2 jego rzut na łuk C_1, mamy

$$\lim_{p_2 \to p_0} \frac{\rho\,(p_2,\,p'_2)}{\rho\,(p_0,p_2)} = 0\,.$$

Styczność łuku C_2 do łuku C_1 w punkcie p_0 w sensie definicji 2 będziemy oznaczali krótko $C_2\,T_2\,C_1$ a samą relację styczności przez T_2. Łuki styczne według definicji 2 będziemy nazywać T_2 stycznymi. Bezpośrednio z definicji 2 wynika, że relacja T_2 jest zwrotna.

W pracy [2] udowodnione są następujące własności relacji T_2:

a/ Relacja T_2 ma własność przechodności /tw. 1 pracy 2/.

b/ Jeżeli $C_2\,T_2\,C_1$ i łuk C_1 ma w punkcie p_0 własność

Archimedesa[x/], to $C_1 T_2 C_2$ /tw.2 pracy [2] /.
c/ Jeżeli $C_2 T_2 C_1$, to

$$\lim_{p_2 \to p_0} \frac{\varrho(p_0, p_2')}{\varrho(p_0, p_2)} = 1$$

/lemat w pracy [2] /.
Udowodnimy obecnie następujące:
<u>Twierdzenie 1.</u> Jeżeli łuk C_2 jest T_1 styczny do łuku C_1, to łuk C_2 jest T_2 styczny do łuku C_1, czyli:

$$C_2 T_1 C_1 \Longrightarrow C_2 T_2 C_1 .$$

Przed podaniem dowodu twierdzenia udowodnimy następujący; lemat 1. Jeżeli $C_2 T_1 C_1$, to

$$(1) \qquad \lim_{p_2 \to p_0} \frac{\varrho(p_1^2, p_2)}{\varrho(p_0, p_2)} = 0$$

gdzie p_1^2 jest punktem łuku C_1 dla którego

$$(2) \qquad \varrho(p_0, p_2) = \varrho(p_0, p_1^2) .$$

Zauważmy, że dla każdego punktu p_2 łuku C_2 o odległości $\varrho(p_0, p_2)$ dostatecznie małej istnieje na łuku C_1 conajmniej jeden punkt p_1^2, dla którego zachodzi (2). Obierając bowiem na łuku prostym C_1 dowolny punkt $p_1(s_1)$ różny od punktu p_0, mamy $\varrho(p_0, p_1(s_1)) \neq 0$.

---

x/ Krzywa C ma własność ARCHIMEDESA w punkcie p_0 jeżeli stosunek długości łuku $p_0 p$ krzywej C do odległości $\varrho/p_0 p/$ dąży do 1 gdy $p \to p_0$ po krzywej C.

Ponieważ funkcja $\varrho(p_o, p_2)$ (gdzie $p_2 \in C_2$) jest ciągła ze względu na zmienną p_2 /t/, więc istnieje taki przedział $[0,t_1]$ niezerowy, że dla parametrów z tego przedziału spełniona jest nierówność:

$$\varrho(p_o,p_2(t)) \leq \varrho(p_o,p_1(s_1))\,(\text{dla } 0 \leq t \leq t_1)$$

W dalszych rozważaniach będziemy brali pod uwagę punkty na krzywej C_2 o parametrach z przedziału $[0,t_1]$. Funkcja $\varrho(p_o,p_1(s))$ zmiennej s jest funkcją ciągłą w przedziale domkniętym $[0, s_1]$ więc posiada własność DARBOUX w tym przedziale. Zatem dla dowolnego punktu p_2/t/ /$t < t_1$/ łuku C_2 istnieje na łuku C_1 punkt p_1 taki, że

(2') $$\varrho(p_o, p_1(s(t))) = \varrho(p_o, p_2(t))$$

Punkt $p_1(s(t))$ oznaczamy krótko przez p_1^2

Dowód lematu 1.

Z założenia $C_2\ T_1\ C_1$

$$\lim_{p_2 \to p_o} \frac{\varrho^2(p_o,p_1^2) + \varrho^2(p_o,p_2) - \varrho^2(p_1^2, p_2)}{2\varrho(p_o,p_1^2)\varrho(p_o,p_2)} = 1$$

Po uwzględnieniu równości /2/ otrzymujemy:

$$\lim_{p_2 \to p_o} \frac{\varrho^2(p_1^2, p_2)}{2\varrho^2(p_o,p_2)} = 0 \quad \text{więc}$$

$$\lim_{p_2 \to p_o} \frac{\varrho(p_1^2, p_o)}{\varrho(p_o, p_2)} = 0$$

a to jest /1/, czyli teza lematu.

Przystąpimy do dowodu twierdzenia 1.

Obierzmy na łuku C_2 dowolny punkt p_2 /t/ o parametrze t z przedziału $(0,t_1)$, który określiliśmy powyżej. Przez p_1^2 oznaczymy punkt łuku C_1 spełniający równość (2). Z określenia rzutu p_2' punktu p_2 na łuk C_1 otrzymujemy

$$\varrho(p_2', p_2) \leq \varrho(p_1^2, p_2)$$

skąd z lematu 1 wynika, że

$$\lim_{p_2 \to p_0} \frac{(p_2', p_2)}{(p_0, p_2)} = 0$$

Zatem łuk C_2 jest T_2 styczny do łuku C_1 w punkcie p_0 a tym samym dowód twierdzenia 1 został zakończony.

Ze względu na symetrię relacji T_1 i udowodnione twierdzenie 1 prawdziwe jest następujące twierdzenie: Jeżeli łuk C_2 jest T_1 styczny do łuku C_1, to łuk C_2 jest T_2 styczny do łuku C_1 i łuk C_1 jest T_2 styczny do łuku C_2 czyli:

$$C_2\, T_1\, C_1 \Longrightarrow (C_2\, T_2\, C_1 \text{ i } C_1\, T_2\, C_2).$$

Wyłania się teraz pytanie, czy relacja T_1 jest identyczna z relacją T_2 w zbiorze par łuków. Odpowiedź na to pytanie jest negatywna. Gdyby relacje T_1 i T_2 były identyczne, to ze względu na symetryczność relacji T_1 relacja T_2 byłaby także symetryczna. Relacja T_2 nie jest jednak symetryczna, o czym świadczy kontrprzykład podany przy końcu pracy [2] . Podany tam jest przykład dwu łuków prostych prostowalnych spełniających relację $C_2\, T_2\, C_1$ lecz nie spełniających relacji $C_1\, T_2\, C_2$, zatem także nie spełniających relacji $C_2\ T_1\ C_1$.

W dalszym ciągu zajmiemy się podaniem dodatkowych warunków, przy których z T_2 styczności wynika T_1 styczność łuków prostych.

Zauważmy najpierw, iż nie jest prawdą, że jeżeli łuk C_2 jest T_2 styczny do łuku C_1 i łuk C_1 jest T_2 styczny do łuku C_2, to łuk C_2 jest T_1 styczny do łuku C_1, ponieważ relacja T_1 nie jest zwrotna, a relacja T_2 jest zwrotna.

Załóżmy obecnie, że łuk C_2 jest T_2 styczny do łuku C_1 i łuk C_1 ma własność Archimedesa w punkcie p_0, /wtedy także łuk C_1 jest T_2 styczny do łuku C_2 z własności b relacji T_2/ i zapytajmy, czy takie pary łuków spełniają relację T_1? Odpowiedź na ostatnie pytanie jest również negatywna, o czym świadczy niżej podany przykład krzywej C_1 x/, która w punkcie $p_0 = /0,0/$ma własność Archimedesa, ale nie jest T_1 styczna do siebie samej /wystarczy za parę C_1, C_2 przyjąć parę C_1, C_1/.

Rozważmy krzywą, której równanie w układzie biegunowym ma postać:

$$\varphi = \begin{cases} \pi \sin\sqrt{|\ln\varrho|} + 1, & \text{dla } 0 < \varrho \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{, dla } \varrho = 0. \end{cases}$$

Napiszmy równanie tej krzywej w kartezjańskim układzie prostokątnym:

$$\left.\begin{aligned} x(\varrho) &= \varrho\cos(\pi\sin\sqrt{|\ln\varrho|} + 1) \\ y(\varrho) &= \varrho\sin(\pi\sin\sqrt{|\ln\varrho|} + 1) \end{aligned}\right\}\text{dla } 0<\varrho<\frac{1}{2} \qquad \left.\begin{aligned} x(\varrho) &= 0 \\ y(\varrho) &= 0 \end{aligned}\right\}\text{dla } \varrho=0$$

Pokażemy, że krzywa ta ma własność ARCHIMEDESA w punkcie |0,0|.

x/ Przykład ten podał A.ZAJTZ.

Mamy dla ϱ z przedziału $\left(0, \frac{1}{2}\right]$:

$$x'(\varrho) = \cos\left(\pi \sin \sqrt{|\ln\varrho|} + 1\right) +$$

$$+ \varrho\left[\sin\left(\pi \sin \sqrt{|\ln\varrho|} + 1\right)\right] \cdot \pi \cos \sqrt{|\ln\varrho|} \cdot \frac{1}{2\sqrt{|\ln\varrho|}} \cdot \frac{1}{\varrho}$$

$$y'(\varrho) = \sin\left(\pi \sin\sqrt{|\ln\varrho|} + 1\right) - \varrho\left[\cos\left(\pi \sin \sqrt{|\ln\varrho|} + 1\right)\right] \cdot$$

$$\cdot \pi \cos \sqrt{|\ln\varrho|} \cdot \frac{1}{2\sqrt{|\ln\varrho|}} \cdot \frac{1}{\varrho}$$

$$[x'(\varrho)]^2 + [y'(\varrho)]^2 = 1 + \pi^2 \cos^2 \sqrt{|\ln\varrho|} \cdot \frac{1}{4|\ln\varrho|}$$

Z ostatniej równości wynika, że

(3) $$\lim_{\varrho \to 0+0} \left([x'(\varrho)]^2 + [y'(\varrho)]^2\right) = 1.$$

Całka

$$\int_0^{\varrho_0} \sqrt{1 + \pi \cos^2 \sqrt{|\ln\varrho|} \cdot \frac{1}{4|\ln\varrho|}}\, d\varrho, \text{ dla } 0 < \varrho \leqslant \frac{1}{2}.$$

istnieje, gdyż funkcja pod całką jest nieciągła tylko dla $\varrho = 0$ i ograniczona. Z (3) wynika, że nieciągłość funkcji podcałkowej dla $\varrho = 0$ jest usuwalna.

Z twierdzenia o wartości średniej dla całek otrzymujemy więc:

(4) $$\int_0^{\varrho_0} \sqrt{1 + \pi^2 \cos^2 \sqrt{|\ln\varrho|} \cdot \frac{1}{4|\ln\varrho|}}\, d\varrho =$$

$$= \varrho_0 \sqrt{1 + \pi^2 \cos^2 \sqrt{|\ln\bar{\varrho}|} \cdot \frac{1}{4|\ln\bar{\varrho}|}},$$

gdzie $\bar{\varrho}$ jest pewnym punktem przedziału $\left(0, \varrho_0\right]$.

Całka $\int_{\varrho_1}^{\varrho_0} \sqrt{1+\pi^2\cos^2\sqrt{|\ln\varrho|}\cdot\frac{1}{4\,|\ln\varrho|}}\,d\varrho$, gdzie $0<\varrho_1<\varrho_0$

równa się długości tego kawałka danej krzywej, dla którego parametr ϱ zmienia się w przedziale $[\varrho_1, \varrho_0]$.

Funkcja

$$F(\varrho_0, x) = \int_x^{\varrho_0} \sqrt{1+\pi^2\cos^2\sqrt{|\ln\varrho|}\cdot\frac{1}{4\,|\ln\varrho|}}$$

jest przy ustalonym ϱ_0 z przedziału $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ wartości ϱ, funkcją zmiennej x ciągłą w przedziale $[0, \varrho_0]$. Funkcja ta podaje długość kawałka danej krzywej odpowiadającego zmienności parametru w przedziale $[x, \varrho_0]$, gdzie $0 < x \leq \varrho_0$. Ponieważ długość krzywej jest funkcją ciągłą parametru, dlatego też $F/\varrho_0, 0/$ jest długością tego kawałka krzywej, który odpowiada zmienności parametru w przedziale $[0, \varrho_0]$. Z określenia funkcji $F/\varrho_0, x/$ oraz z (3) i (4) wynika, że

$$\lim_{\varrho_0\to 0}\frac{F(\varrho_0, 0)}{\varrho_0} = \lim_{\varrho_0\to 0+0}\frac{\varrho_0\sqrt{1+\pi^2\cos^2\sqrt{|\ln\bar{\varrho}|}\cdot\frac{1}{4\,|\ln\bar{\varrho}|}}}{\varrho_0} = 1,$$

więc dana krzywa ma własność ARCHIMEDESA w punkcie $p_0 = (0,0)$. Udowodnimy obecnie, że krzywa ta nie jest T_1 styczna do siebie. Weźmy na niej dwa ciągi punktów dążących do punktu (0,0) i odpowiadających ciągom parametrów:

$$\varrho_n^1 = \exp\left[-4n^2\pi^2\right]$$

$$\varrho_n^2 = \exp\left[-\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2\right]$$

Niech $p_n^i = \left(x(\varrho_n^i), y(\varrho_n^i)\right)$ dla $i = 1,2$, wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varrho^2(p_o, p_n^1) + \varrho^2(p_o, p_n^2) - \varrho^2(p_n^1, p_n^2)}{2\varrho(p_o, p_n^1)\,\varrho(p_o, p_n^2)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\exp\{-4n^2\pi\}\right]^2 + \left[\exp\{-(2n\pi + \frac{\pi}{2})^2\}\right]^2 - \left[\exp\{-4n^2\pi^2\} + \exp\{-(2n\pi + \frac{\pi}{2})^2\}\right]}{2\exp(-4n^2\pi^2).\,\exp\{-(2n\pi + \frac{\pi}{2})^2\}} = 1$$

Z ostatniej równości wynika, że dana krzywa nie jest do siebie T_1 styczna.

Podamy pewien warunek dostateczny symetrii relacji T_2 /w pracy [2] podany jest inny warunek dostateczny - własność /b/ relacji T_2/.

Twierdzenie 2.

Jeżeli łuk C_1 jest T_2 styczny do łuku C_2 i łuk C_2 jest T_1 styczny do siebie, to łuk C_2 jest T_2 styczny do łuku C_1, czyli:

$$C_1\,T_2\,C_2 \quad \text{i} \quad C_2\,T_1\,C_2 \implies C_2\,T_2\,C_1.$$

Przed podaniem dowodu twierdzenia udowodnimy następujący:

Lemat 2:

Jeżeli $C_1\,T_2\,C_2$ i $C_2\,T_1\,C_2$, to

$$(5) \qquad \lim_{p_2 \to p_o} \frac{\varrho(p_2, p_1^2)}{\varrho(p_o, p_2)} = 0,$$

gdzie p_1^2 oznacza punkt leżący na łuku C_1 i spełniający równość:

$$(6) \qquad \varrho/p_o, p_1^2/ = \varrho/p_o, p_2/.$$

Dowód lematu 2.

W uwadze po lemacie 1 pokazaliśmy, że dla każdego punktu p_2, dostatecznie bliskiego punktu p_o, istnieje punkt p_1^2, leżący na łuku C_1 i spełniający (6).
Przez $p_1^{2'}$ oznaczamy rzut punktu p_1^2 na łuk C_2.
Z założenia $C_1 \, T_2 \, C_2$ otrzymujemy:

$$(7) \qquad \lim_{p_2 \to p_o} \frac{\varrho / p_1^2, p_1^{2'} /}{\varrho / p_o, p_1^2} = 0 .$$

Z własności c/ relacji T_2 wynika, że

$$(8) \qquad \lim_{p_2 \to p_o} \frac{\varrho / p_o, p_1^2 /}{\varrho / p_o, p_1^{2'} /} = 1$$

onieważ $C_2 \, T_1 \, C_2$, więc:

$$(9) \quad \lim_{p_2 \to p_o} \frac{\varrho^2 / p_o, p_1^{2'} / + \varrho^2 / p_o, p_2 / - \varrho^2 / p_1^2, p_2 /}{2 \varrho / p_o, p_1^{2'} / \varrho / p_o, p_2 /} = 1$$

Z (6) (8) i (9) wynika, że

$$(10) \qquad \lim_{p_2 \to p_o} \frac{\varrho^2 / p_1^{2'}, p_2 /}{\varrho / p_o, p_1^{2'} / \varrho / p_o, p_2 /} = 0.$$

Stąd otrzymujemy:

$$(11) \qquad \lim_{p_2 \to p_o} \frac{\varrho^2 / p_1^{2'}, p_2 /}{\varrho^2 / p_o, p_2 /} \cdot \frac{\varrho / p_o, p_2 /}{\varrho / p_o, p_1^{2'} /} = 0$$

Na podstawie równości (6), (8) i (11)

$$(12) \qquad \lim_{p_2 \to p_0} \frac{\varrho\,(p_1^{2'}, p_2)}{\varrho\,(p_0, p_2)} = 0$$

Z nierówności trójkąta:

$$(13) \qquad 0 \leq \varrho\,/p_1^2, p_2/ \leq \varrho\,/p_1^2, p_1^{2'}/ + \varrho\,/p_1^{2'}, p_2/,$$

a więc z (6), (7), (12) i (13) otrzymujemy (5), to jest tezę lematu.

Przystępujemy do dowodu twierdzenia 2.

Obierzemy na łuku C_2 dowolny punkt p_2 /t/ o parametrze t z przedziału (o, t_1), który określiliśmy w rozważaniach po lemacie 1.

Przez p_1^2 oznaczamy punkt łuku C_1 spełniający równość (6).

Przez p_2' oznaczamy rzut punktu p_2 na łuk C_1.

Na podstawie definicji rzutu punktu p_2 na łuk C_1 spełniona jest nierówność:

$$0 \leq \varrho\,(p_2, p_2') \leq \varrho\,(p_2, p_1^2)$$

Stąd i z lematu 2 wynika, że

$$\lim_{p_2 \to p_0} \frac{\varrho\,(p_2, p_2')}{\varrho\,(p_0, p_2)} = 0$$

W myśl określenia relacji T_2 oznacza to, że łuk C_2 jest T_2 styczny do łuku C_1. Zatem twierdzenie zostało udowodnione.

Zauważmy, że alternatywa warunków:

$C_2 T_1 C_2$ lub łuk C_2 ma własność ARCHIMEDESA w punkcie p_o nie jest warunkiem koniecznym symetrii relacji T_2, bo dla dowolnego łuku C_2 zachodzi: $C_2 T_2 C_2$ i $C_2 T_2 C_2$, a C_2 ani nie musi być do siebie T_1 styczny ani nie musi mieć własności ARCHIMEDESA w punkcie p_o /np. łuk prosty C_1 podany na końcu pracy [2]/.

Udowodnimy twierdzenie, które mówi przy jakich dodatkowych założeniach o łukach C_1 i C_2 takich, że $C_1 T_2 C_2$, łuki te są T_1 styczne.

Twierdzenie 3. Jeżeli łuk C_1 jest T_2 styczny do łuku C_2 oraz łuki C_1 i C_2 są T_1 styczne do siebie samych, to łuk C_1 jest T_1 styczny do łuku C_2, czyli:

$$/C_1 T_2 C_2 \text{ i } C_1 T_1 C_1 \text{ i } C_2 T_1 C_2/ \Rightarrow C_1 T_1 C_2 .$$

Dowód. Obierzmy na łukach C_1 i C_2 dwa dowolne punkty p_1 i p_2 różne od punktu p_o.

Przypuśćmy, że spełniona jest nierówność:

$$\varrho(p_o, p_1) \leq \varrho(p_o, p_2) \tag{14}$$

Wówczas na łuku C_2 istnieje taki punkt p_2^1 $/t_2/t_1/$, że

$$\varrho(p_o, p_1) = \varrho(p_o, p_2^1) \tag{15}$$

Korzystając z twierdzenia 2 i lematu 2 otrzymujemy:

$$\lim_{p_1 \to p_o} \frac{\varrho(p_1, p_2^1)}{\varrho(p_o, p_1)} = 0. \tag{16}$$

Z (14) i (16) wynika, że

$$(17) \qquad \lim_{\substack{p_1 \to p_o \\ p_2 \to p_o}} \frac{\varrho(p_1, p_2^1)}{\varrho(p_o, p_2)} = 0,$$

Przejście graniczne w ostatniej równości dotyczyło tych par punktów p_1, p_2 na łukach odpowiednio C_1 i C_2, które spełniają nierówność (14). Uwaga ta odnosi się także do przejść granicznych w (18), (22) i (23).

Z (15) i (16) otrzymujemy

$$(18) \qquad \lim_{p_2, p_1 \to p_o} \frac{\varrho(p_1, p_2^1)}{\varrho(p_o, p_2^1)} = 0.$$

Z założenia $C_2 \, T_1 \, C_2$ wynika, że

$$(19) \qquad \lim_{\substack{p_1 \to p_o \\ p_2 \to p_o}} \frac{\varrho^2(p_o, p_2) + \varrho^2(p_o, p_2^1) - \varrho^2(p_2, p_2^1)}{2\varrho(p_o, p_2)\varrho(p_o, p_2^1)} = 1,$$

Zatem dla punktów p_1, p_2 dostatecznie bliskich p_o zachodzi

$$\varrho^2 /p_o, p_2/ + \varrho^2 /p_o, p_2^1/ - \varrho^2 /p_2, p_2^1/ > 0.$$

Stąd po uwzględnieniu (14) i (15) mamy

$$2\varrho^2 /p_o, p_2/ - \varrho^2 /p_2, p_2^1/ > 0$$

Z ostatniej nierówności wynika

$$(20) \qquad \frac{\varrho(p_2, p_2^1)}{\varrho(p_o, p_2)} < \sqrt{2} \; .$$

Z nierówności trójkąta mamy:

$$\left|\varrho(p_1, \overset{1}{p}_2) - \varrho(\overset{1}{p}_2, p_2)\right| \leq \varrho(p_1, p_2) \leq \varrho(p_1, \overset{1}{p}_2) + \varrho(\overset{1}{p}_2, p_2)$$

Po podniesieniu stronami ostatnich nierówności do kwadratu otrzymujemy:

$$(21)\quad \varrho^2(p_1, \overset{1}{p}_2) + \varrho^2(\overset{1}{p}_2, p_2) - 2\varrho(p_1, \overset{1}{p}_2)\,\varrho(\overset{1}{p}_2, p_2) \leq \varrho^2(p_1, p_2) \leq$$

$$\leq \varrho^2(p_1, \overset{1}{p}_2) + \varrho^2(\overset{1}{p}_2, p_2) + 2\varrho(p_1, \overset{1}{p}_2)\,\varrho(\overset{1}{p}_2, p_2)\,.$$

Korzystając z (15), (16), (17), (18), (19), (20) i (21) otrzymujemy:

$$\left\{\begin{aligned}
1 = \lim_{\substack{p_1 \to p_0 \\ p_2 \to p_0}} & \frac{\varrho^2(p_0, p_2) + \varrho^2(p_0, \overset{1}{p}_2) - \varrho^2(p_1, \overset{1}{p}_2) - \varrho^2(\overset{1}{p}_2, p_2) - 2\varrho(p_1, \overset{1}{p}_2)\,\varrho(\overset{1}{p}_2, p_2)}{2\varrho(p_0, p_2)\,\varrho(p_0, \overset{1}{p}_2)} \leq \\
\leq \lim_{\substack{p_1 \to p_0 \\ p_2 \to p_0}} & \frac{\varrho^2(p_0, p_1) + \varrho^2(p_0, p_2) - \varrho^2(p_1, p_2)}{2\varrho(p_0, p_1)\,\varrho(p_0, p_2)} \leq \\
\leq \lim_{\substack{p_1 \to p_0 \\ p_2 \to p_0}} & \frac{\varrho^2(p_0, p_2) + \varrho^2(p_0, \overset{1}{p}_2) - \varrho^2(p_1, \overset{1}{p}_2) - \varrho^2(\overset{1}{p}_2, p_2) + 2\varrho(p_1, \overset{1}{p}_2)\,\varrho(\overset{1}{p}_2, p_2)}{2\varrho(p_0, p_2)\,\varrho(p_0, \overset{1}{p}_2)} =
\end{aligned}\right.$$

Zatem

$$(23)\quad \lim_{\substack{p_1 \to p_0 \\ p_2 \to p_0}} \frac{\varrho^2(p_0, p_1) + \varrho^2(p_0, p_2) - \varrho^2(p_1, p_2)}{2\varrho(p_0, p_1)\,\varrho(p_0, p_2)} = 1$$

Jeżeli spełniona jest nierówność

$$(14') \qquad \varrho /p_o, p_2/ < \varrho /p_o, p_1/,$$

to wówczas na łuku prostym C_1 istnieje punkt $(p_1^2\ t_1/t_2/)$ taki, że

$$(15') \qquad \varrho /p_o, p_2/ = \varrho /p_o, p_1^2 /.$$

Dalej rozumowanie przebiega zupełnie analogicznie jak w przypadku zachodzenia nierówności (14). Ponieważ każda para punktów p_1, p_2 leżących odpowiednio na łukach C_1 i C_2 spełnia jedną z nierówności (14) i (14') więc

$$\lim_{\substack{p_1 \to p_o \\ p_2 \to p_o}} \frac{\varrho^2(p_o, p_1) + \varrho^2(p_o, p_2) - \varrho^2(p_1, p_2)}{2\varrho(p_o, p_1)\varrho(p_o, p_2)} = 1$$

bez żadnych zastrzeżeń odnośnie punktów p_1 i p_2 w przejściu granicznym, co należało udowodnić.

Udowodnimy zapowiedzianą własność relacji T_1, a mianowicie pokażemy, że relacja ta jest przechodnia.

Twierdzenie 4.

$$C_1\ T_1\ C_2 \quad i \quad C_2\ T_1\ C_3 \Longrightarrow C_1\ T_1\ C_3.$$

Dowód[x/]. Obierzmy na łuku prostym C_2 dowolny punkt $\overline{p}_2 \neq p_o$. Ponieważ odległość punktów jest funkcją ciągłą, zatem istnieje taki niezerowy przedział $[0, s_1)$ $/s_1 \neq 0/$, że dla punktów p_1 należących do C_1 i p_3 należących do C_3 o parametrach z tego przedziału spełnione są związki.

(24) $$\varrho/p_o, p_1/ \leq \varrho/p_o, \overline{p}_2/$$

(25) $$\varrho/p_o, p_3/ \leq \varrho/p_o, \overline{p}_2/.$$

Niech teraz p_1 i p_3 będą dowolnymi punktami na łukach C_1 i C_3 o parametrach z przedziału (o,s). Dla punktu p_3 na łuku C_3, wobec (25), istnieje punkt p_2^3 na łuku C_2 taki, że

(26) $$\varrho/p_o, p_3/ = \varrho/p_o, p_2^3/.$$

Podobnie dla punktu p_1 na łuku C_1 wobec (24) istnieje punkt p_2^1 na łuku C_2 taki, że

(26′) $$\varrho(p_o, p_1) = \varrho(p_o, p_2^1)$$

---

x/ A.D. ALEKSANDRÓW w książce [1] str.116 podaje następujący lemat: Jeżeli trzy łuki C_1, C_2 i C_3 wychodzą z jednego punktu p_o, to

$$\overline{\lim_{s,u\to 0}}\ \gamma_{13}(s,u) \leq \overline{\lim_{s,t\to 0}}\ \gamma_{12}(s,t) + \overline{\lim_{t,u\to 0}}\ \gamma_{23}(t,u)$$

gdzie $\gamma_{13}(s,u)$ oznacza kąt trójkąta /na płaszczyźnie euklidesowej/, którego boki są odpowiednio równe $\varrho/p_o,p_1/s/$. $\varrho/p_o,p_3(u)/$ i $\varrho/p_1/s/, p_3(u)//$, leżący naprzeciw boku o odległości $\varrho/p_1/s/, p_3/u//$. Analogiczne znaczenie mają symbole $\gamma_{12}/s,t/$ i $\gamma_{23}/t,u/$.
Z lematu tego wynika przechodność relacji T_1. Podajemy bezpośredni dowód symetrii relacji T_1, który jest prostszy od dowodu lematu A.D.ALEKSANDROWA.

Przypuśćmy, że jest spełniona nierówność

(27) $$\varrho\,/p_0,\, p_3/ \leq \varrho\,/p_0,\, p_1/.$$

Z założenia $C_2'\ T_1\ C_3$ (26) i z lematu 1 mamy

(28) $$\lim_{p_3 \to p_0} \frac{\varrho\,(p_3,\, p_2^3)}{\varrho\,(p_0,\, p_2^3)} = 0$$

Z ostatniej równości (26) i (27) wynika, że

(29) $$\lim_{\substack{p_1 \to p_0 \\ p_3 \to p_0}} \frac{\varrho\,(p_3,\, p_2^3)}{\varrho\,(p_0,\, p_1)} = 0$$

Ostatnie przejście graniczne dotyczyło tych par punktów p_1, p_3, które spełniają nierówność (27). Uwaga ta odnosi się także do przejść granicznych w (30), (33) i (34) Ponieważ $C_1\ T_1\ C_2$ więc

(30) $$\lim_{\substack{p_1 \to p_0 \\ p_3 \to p_0}} \frac{\varrho^2(p_0,p_1) + \varrho^2(p_0,p_2^3) - \varrho^2(p_1,p_2^3)}{2\,\varrho\,(p_0,p_1)\,\varrho\,(p_0,p_2^3)} = 1$$

Z ostatniej równości wynika, że dla punktów p_1 i p_3 dostatecznie bliskich punktu p_0 jest spełniona równość.

$$\varrho^2\,/p_0,\, p_1/ + \varrho^2\,/p_0,\, p_2^3\,/ - \varrho^2\,/p_1,\, p_2^3\,/ > 0$$

Ze względu na ostatnią nierówność (26) i (27) mamy

$$2\,\varrho^2\,/p_0,p_1/ - \varrho^2\,/p_1,p_2^3\,/ > 0$$

Stąd

$$\frac{\rho(p_1, p_2^3)}{\rho(p_0, p_1)} = < \sqrt{2} \tag{31}$$

z nierówności trójkąta

$$|\rho/p_1, p_2^3/ - \rho/p_2^3, p_3/| \leq \rho/p_1, p_3/ \leq \rho/p_1, p_2^3/ + \rho/p_2^3, p_3/$$

Po podniesieniu stronami ostatnich nierówności do kwadratu otrzymujemy:

$$(32) \begin{cases} \rho^2(p_1, p_2^3) + \rho^2(p_2^3, p_3) - 2\rho(p_1, p_2^3)\rho(p_2^3, p_3) \leq \rho^2(p_1, p_3) \leq \\ \rho^2(p_1, p_2^3) + \rho^2(p_2^3, p_3) + 2\rho(p_1, p_2^3)\rho(p_2^3, p_3) \end{cases}$$

Z (26), (28), (29), (30), (31) i (32) wynika, że

$$(33) \begin{cases} 1 = \lim\limits_{\substack{p_1 \to p_0 \\ p_3 \to p_0}} \dfrac{\rho^2(p_0, p_1) + \rho^2(p_0, p_2^3) - \rho^2(p_1, p_2^3) - \rho^2(p_2^3, p_3) - 2\rho(p_1, p_2^3)\rho(p_2^3, p_3)}{2\rho(p_0, p_1)\,\rho(p_0, p_2^3)} \\ \leq \lim\limits_{\substack{p_1 \to p_0 \\ p_3 \to p_0}} \dfrac{\rho^2(p_0, p_1) + \rho^2(p_0, p_3) - \rho^2(p_1, p_3)}{2\rho(p_0, p_1)\rho(p_0, p_3)} \leq \\ \leq \lim\limits_{\substack{p_1 \to p_0 \\ p_3 \to p_0}} \dfrac{\rho^2(p_0, p_1) + \rho^2(p_0, p_2^3) - \rho^2(p_1, p_2^3) - \rho^2(p_2^3, p_3) - 2\rho(p_1, p_2^3)\rho(p_2^3, p_3)}{2\rho(p_0, p_1)\,\rho(p_0, p_2^3)} = 1 \end{cases}$$

Zatem

$$(34)\qquad \lim_{\substack{p_1\to p_0\\ p_3\to p_0}} \frac{\varrho^2(p_0,p_1)+\varrho^2(p_0,p_3)-\varrho^2(p_1,p_3)}{2\,\varrho(p_0,p_1).\varrho(p_0,p_3)} = 1$$

Jeżeli zachodzi nierówność

$$(27')\qquad /p_0,p_3/ > \varrho\,/p_0,p_1/$$

to wówczas do punktu p_1 dobieramy punkt p_2^1 na łuku C_2 taki, który spełnia /2?/ i dalej rozumowanie przebiega zupełnie analogicznie, jak przy spełnieniu nierówności /27/. Ponieważ każda para punktów p_1,p_3 $/p_1 \varepsilon C_1,\ p_3 \varepsilon C_3/$ spełnia jedną z nierówności /27/ i /27'/, więc bez dodatkowych zastrzeżeń co do punktów p_1 i p_3.

$$\lim_{\substack{p_1\to p_0\\ p_3\to p_0}} \frac{\varrho^2(p_0,p_1)+\varrho^2(p_0,p_3)-\varrho^2(p_1,p_3)}{2\,\varrho(p_0,p_1)\,\varrho(p_0,p_3)} = 1$$

Tym samym twierdzenie 4 zostało udowodnione.

<u>Twierdzenie 5.</u>

$$C_1\,T_1\,C_2 \Longrightarrow /C_1T_1C_1 \quad \text{i} \quad C_2T_1C_2/$$

<u>Dowód.</u> Na podstawie symetrii relacji T_1 oraz twierdzenia 4 $/C_1\,T_1\,C_2$ i $C_2\,T_1\,C_1/ \Longrightarrow C_1\,T_1\,C_1$.

Podobnie dowodzimy, że $C_2\,T_1\,C_2$, a zatem twierdzenie 5 zostało udowodnione.

Z twierdzeń 1, 3 i 5 wynika, że zachodzi następująca równoważność:

$$C_1\,T_1\,C_2 \equiv \left[C_1\,T_2\,C_2 \ \text{ i } \ C_1\,T_1\,C_1 \ \text{ i } \ C_2\,T_1\,C_2\right]$$

Załóżmy, że przestrzeń E jest przestrzenią kartezjańską n wymiarową ze zwykłą metryką. W geometrii różniczkowej takiej przestrzeni umawiamy się, że krzywa ma styczną w punkcie końcowym p_o, jeśli kontingens BOULIGANDA tej krzywej w punkcie p_o składa się z jednej półprostej.

Udowodnimy twierdzenie podające związek między relacją T_1 a posiadaniem stycznej przez łuk w jego punkcie końcowym.

Twierdzenie 6. Łuk C_1 w przestrzeni kartezjańskiej n-wymiarowej jest T_1 styczny do siebie w punkcie końcowym p_o wtedy i tylko wtedy, gdy łuk ten posiada styczną w punkcie p_o.

Oznaczając przez $\overline{L}_1$ odcinek o końcu p_o leżący na stycznej L_1 do łuku C_1, mamy w tym przypadku $C_1\ T_1\ \overline{L}_1$.

Dowód. Załóżmy, że $C_1\ T_1\ C_1$. Przypuśćmy, że kontingens BOULIGANDA łuku C_1 składa się conajmniej z dwu półprostych L_1 i L_2 tworzących kąt $\alpha \neq 0$.

Wtedy możemy na łuku C_1 wybrać dwa ciągi punktów p_n^1 i p_n^2 takie, że $p_n^i \xrightarrow[n\to\infty]{} p_o$ oraz półproste wyznaczone przez punkty p_o, p_n^i dążą do półprostej L_i dla $i = 1,2$.

Dla tych ciągów

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varrho^2(p_o,p_n^1)+\varrho^2(p_o,p_n^2)-\varrho^2(p_n^1,p_n^2)}{2\varrho(p_o,p_n^1)\varrho(p_o,p_n^2)} = \cos\alpha \neq 0.$$

co jest sprzeczne z założeniem $C_1\ T_1\ C_1$. Zatem łuk C_1 posiada styczną w punkcie końcowym p_o. Załóżmy, że łuk C_1 ma styczną w punkcie p_o.

Ponieważ $\overline{L}_1$ jest częścią stycznej do łuku C_1 zatem kąt w sensie A.D.ALEKSANDROWA między tymi łukami jest równy ze-ro, więc $C_1\ T_1\ \overline{L}_1$. Na podstawie twierdzenia 5 jest $C_1\ T_1\ C_1$, co należało okazać.

Udowodnimy w przypadku, gdy E jest przestrzenią kartezjańską R n - wymiarową ze zwykłą metryką twierdzenia 3 przy słabszych założeniach.

Twierdzenie 7. Jeżeli E jest przestrzenią kartezjańską n - wymiarową ze zwykłą metryką oraz $C_1\ T_2\ C_2$ i $C_2\ T_1\ C_2$, to $C_1\ T_1\ C_2$.

Dowód.

Na mocy twierdzenia 3 wystarczy wykazać, że $C_1\ T_1\ C_1$. Z założenia $C_2\ T_1\ C_2$ i twierdzenia 6 istnieje styczna L_2 do łuku C_2 w punkcie końcowym p_o. Przez $\overline{L}_2$ oznaczamy odcinek o końcu p_o leżący na półprostej L_2, mamy wówczas

$$C_2\ T_1\ \overline{L}_2 .$$

Stąd i z twierdzenia 1 wynika, że

$$C_2\ T_2\ \overline{L}_2.$$

Na podstawie założenia, faktu że $C_2\ T_2\ \overline{L}_2$ i własności a relacji T_2 otrzymujemy:

$$[C_1\ T_2\ C_2\ ,\ C_2\ T_2\ \overline{L}_2] \Longrightarrow C_1\ T_2\ \overline{L}_2\ ,$$

a to oznacza, że łuk C_1 ma styczną. Zatem z twierdzenia 6 wynika, że $C_1\ T_1\ C_1$, a to kończy dowód twierdzenia 7.

Z udowodnionego twierdzenia 7 wynika, że założenie $C_1\ T_1\ C_1$ w twierdzeniu 3 jest w przestrzeni kartezjańskiej o dowolnej ilości wymiarów zależne od pozostałych założeń tego twierdzenia. Wyłania się pytanie, czy założenie to jest także zależne od pozostałych założeń twierdzenia 3

w dowolnej przestrzeni metrycznej ?
Analiza dowodów twierdzeń 6 i 7 prowadzi do uwag następujących. Rozważmy rodzinę α łuków prostych w dowolnej przestrzeni metrycznej o własnościach następujących[x/].

/a/
$$\prod_{C}\left[\left(C\, T_1 C = \sum_{L\in\alpha}\left(C\, T_1 L\right)\right]\right.$$

/b/
$$\prod_{C}\prod_{L\in\alpha}\left(C\, \dot{T}_2 L \Longrightarrow C\, T_1\, L\right).$$

Udowodnimy, że istnienie w przestrzeni E rodziny α łuków prostych o własnościach /a/ i /b/ jest równoważne zależności założenia $C_1\, T_1\, C_1$ w twierdzeniu 3 od pozostałych założeń tego twierdzenia. Przypuśćmy, że w przestrzeni E istnieje rodzina α. Z własności /a/ rodziny α wynika, że

$$(35)\qquad C_2\, T_1\, C_2 = \sum_{L_2\in\alpha} /C_2\, T_1\, L_2/$$

Na podstawie twierdzenia 1, założenia twierdzenia 3 i (35) otrzymujemy:

$$(36)\qquad C_2\, T_2\, L_2.$$

Z założenia twierdzenia 3 ($C_1\, T_2\, C_2$), (36) i własności a/ relacji T_2 mamy:

$$[C_1\, T_2\, C_2 \text{ i } C_2\, T_1\, L_2] \Longrightarrow C_1\, T_2\, L_2$$

Z ostatniej implikacji i własności /b/ rodziny α wynika, że

$$C_1\, T_2\, L_2 \longrightarrow C_1\, T_1\, L_2.$$

---

x/ Określenie rodziny α i jej własności podał Z.MOSZNER.

Na mocy ostatniej implikacji i twierdzenia 5 jest $C_1 T_1 C_1$. a zatem wykazaliśmy zależność założenia $C_1 T_1 C_1$ od pozostałych założeń w twierdzeniu 3.

Przypuśćmy, że założenie $C_1 T_1 C_1$ jest zależne od pozostałych założeń twierdzenia 3. Wykażemy, że wówczas istnieje rodzina α łuków prostych o własnościach /a/ i /b/.

Niech

$$\alpha_0 = (\hat{C})\,(C\ T_1\ C)$$

Pokażemy, że rodzina α_0 łuków prostych T_1 stycznych do siebie ma własności /a/ i /b/. Dla dowolnego łuku C jest

$$C\ T_1\ C \equiv \sum_{L \in \alpha_0} (C\ T_1\ L)$$

a więc rodzina łuków α_0 ma własność /a/.

Z założenia $[C_1\ T_2\ C_2$ i $C_2\ T_1\ C_2] \Longrightarrow C_1\ T_1\ C_1$ i określenia rodziny α_0 łuków otrzymujemy:

$$\prod \prod_{\in \alpha_0} (C\ T_2\ L \Longrightarrow C\ T_1\ L).$$

to znaczy, że rodzina α_0 łuków ma także własność /b/. Zatem równoważność została udowodniona.

Wykażemy, że warunki /a/ i /b/ w definicji rodziny α są od siebie niezależne w przypadku przestrzeni kartezjańskiej R ze zwykłą metryką.

Jeśli za rodzinę α weźmiemy zbiór wszystkich łuków przestrzeni R, to warunek /a/ jest spełniony, lecz nie jest spełniony warunek /b/, bowiem w przestrzeni R istnieją łuki T_2 styczne do siebie, dla których $C\ T_1\ C$ nie jest prawdą.

Weźmy teraz jako rodzinę α zbiór pusty. Przy takiej interpretacji warunek /b/ będzie spełniony /w implikacji $CT_2 L \Longrightarrow CT_1 L$ poprzednik jest fałszywy, zatem implikacja jest prawdziwa/. Natomiast warunek /a/ nie jest spełniony. Weźmy łuk $C\ T_1$ styczny do siebie, wówczas w równoważności $C\ T_1 C \equiv \sum\limits_{L \in \alpha} /C\ T_1\ L/$ lewy człon ma ocenę prawdy, zaś prawy jest fałszywy.

W przestrzeni kartezjańskiej R ze zwykłą metryką za rodzinę α można wybrać rodzinę półprostych. Rodzina α o własnościach /a/ i /b/ w dowolnej przestrzeni metrycznej /jeżeli w tej przestrzeni istnieje taka rodzina/ ma pewne własności analogiczne do własności rodziny półprostych w przestrzeni R, ale nie wszystkie własności rodziny półprostych w przestrzeni R przenoszą się na dowolną rodzinę α . Zilustrujemy to na przykładach.

Własność A - przykład pozytywny.

Dla dowolnej rodziny α o własnościach /a/ i /b/ w dowolnej przestrzeni metrycznej

$$\prod_{L \in \alpha} \left(L\ T_1\ L\right).$$

Własność ta wynika ze zwrotności relacji T_2 i własności /b/ rodziny α /za łuk C przyjmujemy łuk $L : L\ T_2\ L \Longrightarrow L\ T_1\ L$ /.

Własność B - przykład negatywny.

Dla dowolnej rodziny α o własnościach /a/ i /b/ w dowolnej przestrzeni metrycznej nie musi być prawdą:

$$\prod_{L_1, L_2 \in \alpha} \left[L_1 \neq L_2 \Longrightarrow \sim\left(L_1\ T_1\ L_2\right)\right]$$

- choć własność ta przysługuje rodzinie półprostych w przestrzeni R.
Dla dowodu tej własności rozważmy w przestrzeni kartezjańskiej R podzbiór R_o złożony z dwu łuków $\overline{C}_1$ i $\overline{C}_2$ takich, że $\overline{C}_1 \neq \overline{C}_2$ i $\overline{C}_1 T_1 \overline{C}_2$. Metryka w zbiorze R_o jest generowana x/ przez metrykę w zbiorze R. Niech $\mathcal{L}_o$ będzie zbiorem, którego elementami są tylko łuki C_1 i C_2. W przestrzeni metrycznej R_o rodzina $\mathcal{L}_o$ ma własności /a/ i /b/, ale dla tej rodziny implikacja $C_1 \neq C_2 \Rightarrow \sim/C_1 T_1 C_2/$ jest fałszywa, zatem własność B została udowodniona.

W przygotowaniu niniejszej pracy korzystałem z wielu cennych uwag Pana Doc.dr Zenona MOSZNERA, za które miło jest mi złożyć Mu serdeczne podziękowanie.

[1] А.Д.Александров, Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, Огиз государственное издательство технико-теоретической литерарурь, Москва-Ленинград 1948.

[2] S.GOŁĄB et Z.MOSZNER, Sur le contact des courbes dans les espaces metriques generaux, Colloquium Mathematicum, Vol.X, Fasc.2,/1963/, Wrocław, str.305-311.

---

x/ Odległość między punktami p i q ze zbioru Ro jest równa odległości tych punktów w przestrzeni R.

RÉSUMÉ

Sur comparaison des définitions de tangence des ares simples dans les espaces métriques généraux.

Soit E l'espace pourvu d'une metrique satisfaisant aux postulats connus de Fréchet. La distance entre les points p et q sera désignée par $\varrho(p, q)$ $(p \varepsilon E, q \varepsilon E)$. Se basant sur la définition d'angle entre des ares simples dans les espaces métriques généraux adopteé par M.A.D. Aleksandrow dans son livre [1] p.36 l'auteur de cette note donne la définition suivante de la taugence de deux ares simples C_1 et C_2 sortant d'un même point p_o.

Définition 1. L'arc simple C_2 sera dit tangent à l'arc simple C_1 au point po lorsque

(1) $$\lim_{\substack{p_1 \to p_o \\ p_2 \to p_o}} \frac{\varrho^2(p_o, p_1) + \varrho^2(p_o, p_2) - \varrho^2(p_1, p_2)}{2\varrho(p_o, p_1)\varrho(p_o, p_2)} = 1$$

où p_2 est le point variable de l'arc C_2, différent de p_o et p_1 est le point variable de l'arc C_1, différent de p_o.

Nous écrirons (1) brièvement comme suit $C_2 T_1 C_1$.

M.M.S.Gołąb et Z.Moszner dans leur note [2] introduisent la définition suivante de la tangence de deux ares simples C_2 et C_1 sortant d'un même point p_o.

Définition 2. L'are simple C_2 sera dit tangent à l'arc simple C_1 au point p_o lorsque

$$(2) \qquad \lim_{p_2 \to p_0} \frac{\varrho(p_2, p_2')}{\varrho(p_0, p_2)} = 0,$$

où p_2 est le point variable de l'arc C_2, différent de p_0, et p_2' est la projektion de p_2 sur l'arc C_1 ('voir [2]).

Nous écrirons (2) brièvement comme suit $C_2\ T_2\ C_1$.

Les définitions 1 et 2 ne sont pas équivalantes. L'auteur établit quelques relation entre ces définitions. Il démontre notamment les théorèmes suivants.

Théorème 1. $C_1\ T_1\ C_2 \Rightarrow C_1\ T_2\ C_2$

Theorème 2. $/C_1\ T_2\ C_2$ et $C_2\ T_1\ C_2/ \Rightarrow C_2\ T_2\ C_1$

Theoreme 3. $/C_1\ T_2\ C_2$ et $C_1\ T_1\ C_1$ et $C_2\ T_1\ C_2/ \Rightarrow C_1\ T_1\ C_2$

Théoreme 4. $/C_1\ T_1\ C_2$ et $C_2\ T_1\ C_3/ \Rightarrow C_1\ T_1\ C_3$

Theoreme 5. $/C_1\ T_1\ C_2/ \Longrightarrow /C_1\ T_1\ C_1$ et $C_2\ T_1\ C_2/$

Théorème 6. Pour que l'arc simple C_1 dans l'espace cartésien n - dimensionnel avec métrique ordinaire soit tangent à lui même au sens de la définition 1 il faut el il suffit il possède la tangente à son extrémite p_0 (c'est -à - dire le contigent de Bouligand d'arc C_1 au point extrémité p_0 ne se compose que d'une demi-droite).

Théorème 7. Si l espace métrique est un espace cartésien n - dimensionnel avec la métrique ordinaire et $C_1\ T_2\ C_2$ ainsi que $C_2\ T_1\ C_2$, alors $C_1\ T_1\ C_2$.

Dans l'espace cartésien n- dimensionnel avec la métrique ordinaire la condition $C_1\ T_1\ C_1$ dans théorème 3 n'est pas essentielle /Th.7/, de plus elle résulte - d'apres ce qui précéde et d'aprés le théorème 5 - des autres suppositions du théorème 3. L'auteur ne sait pas si le théorème 3 est vrai dans les espaces métriques généraux sans faire la supposition $C_1\ T_1\ C_1$.

Dans cette note est encore démontré le théorème suivant. Si α est une famille des arcs simples dans l'espace métrique arbitraire E qui possède les propriétés suivantes.

(a) $\prod_{C}\left[C\ T_1\ C \equiv \sum_{L\in\alpha}(C\ T_1\ L)\right]$ (C - l'arc simple, $C \subset E$)

(b) $\prod_{C}\ \prod_{L\in\alpha}\left(C\ T_2 L \Rightarrow C\ T_1\ L\right)$,

dans ce cas l'existance de la famille α dans l'espace E est équivalente à la dépendance de la condition $C_1\ T_1\ C_1$ dans le théorème 3 des autres conditions de ce théorème.

Резюме

О сравнении определения о касании прямых дуг в произвольном метрическом пространстве.

Пусть E является пространством, обладающим метрикой, выполняющей условия фрешета. Расстояние между точками p и q обозначаем $\rho(p,q)$ ($p\in E$, $q\in E$).
На основе определения угла между прямыми дугами в произвольном метрическом пространстве, принятого А.Д.Александровым в книге [1] стр.36, автор

сформулировал определение о касании прямых дуг C_1 и C_2, исходящих из одной точки p_o, следующим образом:

<u>Определение 1</u>. Прямая дуга C_2 является касательной к прямой дуге C_1 в точке p_o, если при обозначении бегущей точки дуги C_2 через p_2 $(p_2 \neq p_o)$, и бегущей точки дуги C_1 через p_1 $(p_1 \neq p_o)$, выполнено следующее соотношение:

$$\lim_{\substack{p_1 \to p_o \\ p_2 \to p_o}} \frac{\rho^2(p_o,p_1) + \rho^2(p_o,p_2) - \rho^2(p_1,p_2)}{2\rho(p_o,p_1)\,\rho(p_o,p_2)} = 1 .$$

Касание дугой C_2 дуги C_1 в точке p_o в смысле определения 1 будем коротко обозначать $C_2T_1C_1$.

С.Голомб и З.Мошмер в труде [2] определяют понятие о касании прямых дуг в произвольном метрическом пространстве следующим образом:

<u>Определение 2</u>. Прямая дуга C_2 является касательной к прямой дуге C_1 в точке p_o, если при обозначении бегущей точки дуги C_2 через p_2 $(p_2 \neq p_o)$, а её проекции на дугу C через p_2' ([2]), будет выполнено следующее соотношение:

$$\lim_{p_2 \to p_o} \frac{\rho(p_2,p_2')}{\rho(p_o,p_2)} = 0 .$$

Касание дугой C_2 дуги C_1 в точке p_o в смысле определения 2 будет обозначать $C_2T_2C_1$.

Определения 1 и 2 не эквивалентны. В своей работе автор занимается установлением определённых связей между этими понятиями, доказывая следующие теоремы:

Теорема 1

$$C_2T_1C_1 \Rightarrow C_2T_2C_1$$

Теорема 2

$$/\ C_1T_2C_2 \text{ и } C_2T_1C_2\ / \Rightarrow C_2T_2C_1$$

Теорема 3

$$/\ C_1T_2C_2 \text{ и } C_1T_1C_1 \text{ и } C_2T_1C_2\ / \Rightarrow C_1T_1C_2$$

Теорема 4

$$/\ C_1T_1C_2 \text{ и } C_2T_1C_3\ / \Rightarrow C_1T_1C_3$$

Теорема 5

$$C_1T_1C_2 \Rightarrow /\ C_1T_1C_1 \text{ и } C_2T_1C_2\ /$$

Теорема 6. Дуга C_1 в n-мерном декартовом пространстве с обыкновенной метрикой является касательной к самой себе в смысле определения 1 тогда и только тогда, если ета дуга имеет касательную в концевой точке p_o / то есть контигенция Булиганда дуги C_1 в концевой точке p_o состоит из одной полупрямой /.

Теорема 7. Если метрическое пространство является n-мерным декартовым пространством с обыкновенной метрикой а также $C_1T_2C_2$ и $C_2T_1C_2$, то $C_1T_1C_2$.

В n-мерном декартовом пространстве с обыкновенной метрикой условие $C_1T_1C_1$ теоремы 3 зависит от остальных условии той же теоремы / см. теорему 7 /. Однако автору не удалось выяснить, зависит ли это условие от остальных условии теоремы 3 во всяком метрическом пространстве.

Если рассмотреть семейство α прямых дуг в произвольном метрическом пространстве E о следующих свойствах:

$$/\text{а}/ \qquad \prod_{C} \left[C\ T_1\ C \equiv \sum_{L \in \alpha} (C\ T_1\ L) \right] ,$$

$$/\text{б}/ \qquad \prod_{C} \prod_{L \in \alpha} (C\ T_2\ L \Rightarrow C\ T_1\ L) ,$$

то окажется, что существование в пространстве E семейства α равнозначно зависимости условия $C_1T_1C_1$ теоремы 3 от остальных условии этой теоремы.