Zenon Moszner

OGÓLNE ROZWIĄZANIE RÓWNANIA $F(x,y)\cdot F(y,z)=F(x,z)$ PRZY WARUNKU $x\leqslant y\leqslant z$.

Niniejsza nota poświęcona jest podaniu w prostej postaci wszystkich rozwiązań równania funkcyjnego

(1) $$F(x,y)\cdot F(y,z)=F(x,z),$$

gdzie F jest szukaną funkcją rzeczywistą dwu zmiennych rzeczywistych, przy czym poszukujemy rozwiązań w zbiorze $(\langle \hat{x,y}\rangle)$ $(x\leqslant y)$, tzn. rozwiązujemy równanie (1) przy warunku

(2) $$x\leqslant y\leqslant z.$$

Ogólne rozwiązanie równania (1) przy warunku (2) podał M.FRECHET na końcu pracy [1]. Podane przez niego rozwiązanie ma jednak formę opisową, dość nieprzejrzystą i długą, nie jest też związane z niżej podaną postacią rozwiązania.

W zakończeniu noty podaję wnioski dotyczące ogólnego rozwiązania regularnego /klasy C^n, gdzie n jest liczbą całkowitą nieujemną/ równania (1) przy warunku (2).

Twierdzenie

Zbiorem wszystkich rozwiązań równania (1) przy warunku (2) jest zbiór funkcji określonych następująco

(3) $$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{f(y)}{f(x)} & \text{gdy } \langle x,y\rangle \in \bigcup\limits_{\Delta\in U} T(\Delta) \overset{df}{=\!=} Z,\\ 0 & \text{gdy } \langle x,y\rangle \in \left[(\langle \hat{x,y}\rangle)(x\leqslant y)\setminus Z \right],\end{cases}$$

gdzie

(4) U jest dowolnym układem przedziałów liniowych /pod terminem przedział rozumiemy dowolny podzbiór spójny zbioru liczb rzeczywistych/ rozłącznych,

(5) f jest dowolną funkcją liczbo-liczbową określoną i różną od zera na zbiorze $S(U)$ - sumie mnogościowej przedziałów układu U,

(6) $T(\Delta) \overset{df}{=\!=} (\langle \hat{x,y}\rangle)\left[x\in\Delta \cdot y\geqslant x \cdot y\in\Delta\right]$.x/

Dowód

I. Udowodnimy, że każda funkcja F postaci (3) spełnia równanie (1) przy warunku (2). W tym celu udowodnimy najpierw, że

(7) jeżeli $z\geqslant y\geqslant x$ i $\langle x,y\rangle \,\bar{\in}\, Z$, to $\langle x,z\rangle \,\bar{\in}\, Z$.

Przypuśćmy bowiem, że $\langle x,z\rangle\in Z$, a więc, że istnieje taki przedział Δ^* z układu U, iż $\langle x,z\rangle \in T(\Delta^*)$, tzn. $x\in\Delta^*$ i $z\geqslant x$ i $z\in\Delta^*$. Stąd, wobec nierówności $x\leqslant y\leqslant z$, mamy $y\in\Delta^*$. Z powyższego $\langle x,y\rangle\in T(\Delta^*)\subset Z$, co daje sprzeczność z założeniem.

Wykażemy obecnie, że

(8) jeżeli $\langle x,y\rangle\in Z$ i $\langle y,z\rangle\in Z$, to $\langle x,z\rangle Z$.

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że

(9) $$\langle x,y\rangle\in Z \equiv \sum_{\Delta\in U} (x\in\Delta \cdot y\geqslant x\cdot y\in\Delta)$$

oraz

(10) $$\langle y,z\rangle\in Z \equiv \sum_{\Delta\in U} (y\in\Delta^* \cdot z\geqslant y\cdot z\in\Delta^*).$$

---

x/ Powyższy wynik sygnalizowałem w nocie [2].

Ponieważ przedziały Δ i Δ^* są albo identyczne albo rozłączne, a $y \in \Delta \cap \Delta^*$, więc $\Delta = \Delta^*$. Z (9) i (10) wynika, że $x \in \Delta$ i $z \geq x$ i $z \in \Delta$, a więc, że $\langle x,z \rangle \in T(\Delta) \subset Z$, c.n.o.

Zauważmy wreszcie, że

(11) jeżeli $\langle x,y \rangle \in Z$ i $z \geqslant y$ i $\langle y,z \rangle \bar{\in} Z$, to

$$\langle x,z \rangle \bar{\in} Z .$$

Przypuśćmy bowiem, że $\langle x,z \rangle \in Z$, tzn., że istnieje taki przedział Δ^* z układu U, dla którego $x \in \Delta^*$ i $z \geqslant x$ i $z \in \Delta^*$. Z założenia $\langle x,y \rangle \in Z$, więc istnieje taki przedział Δ z układu U, dla którego $x \in \Delta$ i $y \geq x$ i $y \in \Delta$. Wobec tego, że przedziały układu U są albo identyczne albo rozłączne, mamy na podstawie $x \in \Delta \cap \Delta^*$, że $\Delta = \Delta^*$. W takim jednak przypadku $y \in \Delta$ i $z \in \Delta$ i /z założenia/ $z \geqslant y$, a więc $\langle y,z \rangle \in T(\Delta) \subset Z$, co jest sprzeczne z założeniem.

Rozważmy obecnie dowolną trójkę liczb x, y, z taką, że $z \geqslant y \geqslant x$. W przypadku, gdy $\langle x,y \rangle \bar{\in} Z$ na podstawie (7) mamy $\langle x,z \rangle \bar{\in} Z$. Z określenia funkcji F wynika, iż wtedy $F(x,y) = F(x,z) = 0$, a więc równanie (1) jest spełnione.

Przypuśćmy, że $\langle x,y \rangle \in Z$ i rozważmy dwa przypadki następujące

a/ $\langle y,z \rangle \in Z$ lub b/ $\langle y,z \rangle \bar{\in} Z$

W przypadku a/ mamy na podstawie (8) $\langle x,z \rangle \in Z$. Stąd na podstawie definicji funkcji F:

$$F(x,y) = \frac{f(y)}{f(x)}, \quad F(y,z) = \frac{f(z)}{f(y)}, \quad F(x,z) = \frac{f(z)}{f(x)},$$

a więc spełnione jest równanie (1).

W przypadku b/, wobec (11), $<x,z> \bar{\in} Z$. Z określenia funkcji F mamy: $F(y,z)= F(x,z)= 0$, a więc i w tym przypadku równanie (1) jest też spełnione.

Wykazaliśmy więc, że każda funkcja postaci (3) spełnia równanie (1) w zbiorze $(<\hat{x,y}>)(x \leqslant y)$.

II. Wykażemy obecnie, że każda funkcja $F(x,y)$ określona dla $x \leqslant y$ i spełniająca w zbiorze $(<\hat{x,y}>)(x \leqslant y)$ równanie (1) jest postaci (3). W tym celu udowodnimy najpierw, że

(12) jeżeli $F(x_0,y_0)= 0$, to $F(x_0,y)= 0$

$$\text{dla} \quad y \geqslant y_0 .$$

Mamy bowiem na podstawie (1)

$$F(x_0,y)= F(x_0,y_0)\cdot F(y_0,y)= 0 \cdot F(y_0,y)= 0.$$

Połóżmy, dla dowolnej liczby rzeczywistej x,

$k(x) \overset{df}{=} \inf(\hat{y})\left[y \geqslant x \,.\, F(x,y)= 0\right]$.

W przypadku, gdy zbiór $(\hat{y})\left[y \geqslant x \,.\, F(x,y)= 0\right]$ jest pusty przyjmujemy $k(x)= +\infty$. Mamy oczywiście $k(x) \geqslant x$. Z (12) wynika, że

(13) $F(x,y)= 0$ dla $y > k(x)$,

(14) $F(x,y) \neq 0$ dla $x \leqslant y < k(x)$.

Wykażemy, że

(15) funkcja $k(x)$ jest niemalejąca.

Niech będzie $x_1 < x_2$ oraz $k(x_1) > k(x_2)$. Oznaczmy przez z liczbę spełniającą następujący warunek: $k(x_2) < z < k(x_1)$. Ponieważ $z > k(x_2)$, więc z (13) $F(x_2,z)= 0$, a ponieważ $z < k(x_1)$ oraz $z > k(x_2) \geqslant x_2 > x_1$, więc z (14): $F(x_1,z) \neq 0$. Stąd

$$F(x_1,x_2) \cdot F(x_2,z) = F(x_1,x_2) \cdot 0 = 0 \neq F(x_1,z),$$

a więc funkcja F nie spełnia równania (1), wbrew założeniu. Wniosek (15) został więc wykazany.

Rozważmy, dla dowolnego c będącego liczbą rzeczywistą lub $+\infty$, zbiór $Z_c \overset{df}{=} (\hat{x})(k(x)=c)$. Ponieważ $k(x)$ jest funkcją monotoniczną, zbiór Z_c jest przedziałem. Ponadto zbiory Z_c są rozłączne dla różnych c.

Funkcja $k(u)$ jest stała w przedziale $[x, k(x))$. Wykażemy bowiem, że

(16) $k(x)=k(y)$ dla y z przedziału $[x, k(x))$.

Dla $y \geq x$ mamy, na podstawie (15), $k(y) \geq k(x)$. Przypuśćmy, że $k(y) > k(x)$. Istnieje wtedy taka liczba rzeczywista z, że $k(y) > z > k(x)$. Ponieważ $z > k(x)$, z (13) otrzymujemy: $F(x,z)=0$. Wobec $z<k(y)$ oraz $z > k(x) > y$, mamy na podstawie (14): $F(y, z) \neq 0$. Ale $x \leq y < k(x)$, więc z (14): $F(x,y) \neq 0$. Stąd

$$F(x,z) = 0 \neq F(x,y) \cdot F(y,z),$$

a więc otrzymujemy sprzeczność z założeniem, że funkcja F spełnia równanie (1). Wniosek (16) został więc wykazany.

Wykażemy obecnie, że

(17) prawym krańcem przedziału Z_c jest c.

Niech bowiem $x \in Z_c$. Stąd $k(x)=c$, a ponieważ $x \leq k(x)$, więc $x \leq c$. Z drugiej strony w przedziale $[x, k(x))$, czyli w przedziale $[x,c)$, funkcja k jest stała, a więc stale równa c, czyli $[x,c \subset Z_c$. Z powyższego wynika zachodzenie (17).

Nazwijmy przedziałem typu:

(A) - każdy przedział Z_c jedno-punktowy, dla którego $F(c,c) \neq 0$ x/,

(B) - każdy przedział Z_c niezerowy /tzn. nie redukujący się do punktu/, dla którego $c \bar{\in} Z_c$,

(C) - każdy przedział postaci $Z_c \setminus \{c\}$, gdzie Z_c jest przedziałem niezerowym, dla którego $c \in Z_c$ i $F(c,c) = 0$,

(D) - każdy przedział postaci $Z_c \setminus \{c\}$, gdzie Z_c jest przedziałem niezerowym, dla którego $c \in Z_c$, $F(c,c) \neq 0$ i $F(x,c) = 0$ dla każdego punktu x zbioru Z_c różnego od c,

(E) - każdy przedział postaci $[c,c]$, gdzie Z_c spełnia warunki pod (D),

(F) - każdy przedział niezerowy Z_c taki, że $c \in Z_c$, $F(c,c) \neq 0$ i w pewnym punkcie wewnętrznym x_o zbioru Z_c mamy $F(x_o,c) \neq 0$.

Niech U oznacza rodzinę wszystkich przedziałów typu od (A) do (F). Zauważmy, że każdy przedział z U zawiera się w pewnym przedziale Z_c, przy czym w tym samym przedziale Z_c mogą być zawarte tylko przedziały typu (D) lub (E), a więc przedziały rozłączne. Stąd, wobec rozłączności zbiorów Z_c dla różnych c, wynika, że przedziały rodziny U są rozłączne.

Rozważmy, zdefiniowany przez (6), układ trójkątów $T(\Delta)$ dla $\Delta \in U$.

---

x/ W przypadku tym $Z_c = [c,c]$ - co wynika z (17) - a więc c jest liczbą rzeczywistą, a nie $+\infty$, a stąd $F(c,c)$ ma sens. Podobnie wszędzie tam, gdzie w dalszym ciągu pracy występują wartości funkcji F w punktach, których conajmniej jedna współrzędna równa się prawemu krańcowi pewnego zbioru Z_c, z poczynionych założeń wynika, że c jest liczbą rzeczywistą, a więc, że wartości te mają sens.

Przypuśćmy, że $\langle x,y\rangle \bar{\in} \bigcup_{\Delta\in U} T(\Delta)$ i $x \leqslant y$. Rozważymy dwa przypadki

a/ $x \bar{\in} \bigcup_{\Delta\in U} \Delta$ lub b/ $x \in \bigcup_{\Delta\in U} \Delta$.

Ad a/ Niech $x \in Z_{\bar{c}}$ dla pewnego $\bar{c}$. Ponieważ x nie należy do żadnego przedziału Δ z układu U, więc przedział $Z_{\bar{c}}$ nie może spełniać warunków nałożonych na zbiory Z_c w typach (A), (B), (F). Ponieważ suma przedziałów typu (D) i (E) utworzonych dla tego samego zbioru Z_c, równa się Z_c, więc $Z_{\bar{c}}$ nie może spełniać warunków nałożonych na zbiór Z_c w (D). Gdyby przedział $Z_{\bar{c}}$ spełniał warunki nałożone na zbiór Z_c w (C), to wtedy mielibyśmy $x = \bar{c}$ /bo x nie może należeć do zbioru $Z_{\bar{c}}\setminus\{\bar{c}\}$, wobec tego, że nie należy do żadnego przedziału z układu U/, a więc $F(\bar{c},\bar{c}) = F(x,x) = 0$, a stąd na podstawie (12) $F(x,y) = 0$ dla $y \geqslant x$. Jeżeli zbiór $Z_{\bar{c}}$ nie spełnia żadnego z warunków nałożonych na zbiory Z_c w typach od (A) do (F), to musi być zbiorem jednopunktowym /pusty być nie może, bo $x\in Z_{\bar{c}}$/ oraz musi zachodzić $F(\bar{c},\bar{c}) = 0$. Ale wtedy stwierdzamy jak poprzednio, że $F(x,y) = 0$ dla $y \geqslant x$. Widzimy więc, że w przypadku a/ $F(x,y) = 0$ dla $y \geqslant x$.

Ad b/ $x \in \bigcup_{\Delta\in U} \Delta$, tzn. istnieje przedział Δ^* z układu U taki, że $x \in \Delta^*$. Wtedy wobec tego, że $\langle x,y\rangle \bar{\in} \bigcup_{\Delta\in U} T(\Delta)$ i $y \geqslant x$ mamy wniosek, że $y \bar{\in} \Delta^*$. Przedział Δ^* zawarty jest w pewnym zbiorze Z_c. Stąd $k(x) = c$. Rozważamy przypadek, gdy $y = k(x)$ czyli $y = c$, a w nim dwa podprzypadki:

(α) $c \in Z_c$ lub (β) $c \bar{\in} Z_c$.

Ad (α). W tym przypadku wobec tego, że $x \in \Delta^* \setminus Z_c$, oraz $y = c \bar{\in} \Delta^*$, zbiór Z_c ma punkty wewnętrzne /jest niezerowy/ oraz $x \neq c$. Stąd przedział Δ^* nie może być ani typu (A) /bowiem $c \bar{\in} \Delta^*$/, ani typu (B) /bowiem $c \in Z_c$/, ani typu (E) /bowiem $c \bar{\in} \Delta^*$/, ani wreszcie typu (F) /bo dla tego typu $\Delta^* = Z_c$, co niemożliwe wobec tego, że $c \in Z_c$ i $c \bar{\in} \Delta^*$ /. Gdyby przedział Δ^* był typu (C), to $F(c,c)=0$ a stąd $F(x,y) = F(x,c) = F(x,c) \cdot F(c,c) = 0$. Gdyby przedział Δ^* był typu (D), to $F(x,c) = F(x,y) = 0$.

Ad (β). W tym przypadku $k(c) \neq c$, a ponieważ $k(c) \geqslant c$, więc $k(c) > c$. Istnieje więc taka liczba z, że $c < z < k(c)$, a stąd na podstawie (14) $F(c,z) \neq 0$. Wobec $z > c = k(x)$ mamy z (13) $F(x,z) = 0$. Ponieważ $F(x,c) \cdot F(c,z) = F(x,z)$ więc $0 = F(x,c) = F(x,y)$.

Rozumowania przeprowadzone w podprzypadkach (α) i (β) przypadku b/ pozwalają wnosić, że $F(x,y) = 0$ dla $y = k(x)$. Wobec (13) mamy $F(x,y) = 0$ dla $y > k(x)$, a więc $F(x,y) = 0$ dla $y \geqslant k(x)$. Z definicji układu U wynika, że jeżeli przedział Δ^* układu U zawiera się w pewnym przedziale Z_c, to prawe krańce przedziałów Δ^* i Z_c są równe. Ponieważ prawym krańcem przedziału Z_c jest c, więc i prawym krańcem przedziału Δ^* jest c. Ponieważ $x \in \Delta^*$ oraz $y \bar{\in} \Delta^*$, więc gdy $x \leqslant y$, to $c \leqslant y$. Ale $k(x) = c$, więc nierówność $x \leqslant y$ pociąga za sobą nierówność $y \geqslant k(x)$. Ponieważ w przypadku b/ mamy $F(x,y) = 0$ dla $y \geqslant k(x)$, więc wykazaliśmy, że w tym przypadku $F(x,y) = 0$ dla $y \geqslant x$, co łącznie z rozumowaniem w przypadku a/ pozwala wnosić, że gdy $\langle x,y \rangle \bar{\in} \bigcup_{\Delta \in U} T(\Delta)$ i $x \leqslant y$, to $F(x,y) = 0$.

Pokażemy obecnie, że jeżeli $\langle x,y\rangle \in \bigcup_{\Delta\in U} T(\Delta)$, to $F(x,y) \neq 0$. Z założenia istnieje taki przedział Δ z układu U, że $x \in \Delta$ i $x \leq y$ i $y \in \Delta$. Niech $\Delta \subset Z_{\bar{c}}$.

1/ Gdy przedział Δ jest typu (A), $\Delta = [\bar{c},\bar{c}]$, a więc $x = y = \bar{c}$, a ponieważ $F(\bar{c},\bar{c}) \neq 0$, więc zachodzi $F(x,y) \neq 0$.

2/ Gdy przedział Δ jest typu (B), to $\bar{c} \bar{\in} Z_{\bar{c}}$, a więc $\bar{c} \bar{\in} \Delta$, a stąd $y < \bar{c}$ /bo $y \in \Delta$, $\Delta \subset Z_{\bar{c}}$ i $\bar{c}$ jest prawym krańcem przedziału $Z_{\bar{c}}$ /. Ponieważ $x \in \Delta \subset Z_{\bar{c}}$, więc $k(x) = \bar{c}$, a stąd $x \leq y < k(x)$, co zgodnie z (14) daje $F(x,y) \neq 0$.

3/ Gdy przedział Δ jest typu (C), to $\Delta = Z_{\bar{c}} \setminus \{\bar{c}\}$, a stąd $y < \bar{c}$ i dowód w dalszym ciągu przebiega jak w 2/.

4/ Gdy przedział Δ jest typu (D) dowód przebiega tak samo jak w 2/.

5/ Gdy przedział Δ jest typu (E) dowód przebiega tak samo jak w 1/.

6/ Gdy przedział Δ jest typu (F), to rozróżniamy podprzypadki:

α) $y < \bar{c}$ lub β) $y = \bar{c}$.

Podprzypadki te wyczerpują wszystkie możliwości, bowiem $y \in \Delta \subset Z_{\bar{c}}$, $\bar{c}$ jest prawym krańcem przedziału $Z_{\bar{c}}$, więc $y \leq \bar{c}$.

Ad α). $F(x,y) \neq 0$ z (14), bowiem $x \leq y < \bar{c} = k(x)$.

Ad β). Mamy wykazać, że w tym przypadku $F(x,\bar{c}) \neq 0$. Wynika to stąd, że

(18) jeżeli $F(x_0,c) \neq 0$, gdzie x_0 jest punktem wewnętrznym zbioru Z_c, to $F(x,c) \neq 0$ dla dowolnego x ze

zbioru Z_c .

Dla dowodu powyższego przypuśćmy, że w zbiorze Z_c istnieje liczba x_1 taka, że $F(x_1,c) = 0$.
Rozważmy dwa przypadki:

$$\text{i)} \quad x_1 > x_o \quad \text{lub} \quad \text{ii)} \quad x_1 < x_o.$$

W przypadku i) mamy

$$F(x_o,x_1) \cdot F(x_1,c) = F(x_o,x_1) \cdot 0 = 0 \neq F(x_o,c),$$

a więc otrzymujemy sprzeczność z założeniem, że funkcja spełnia równanie (1).
W przypadku ii), ponieważ x_o jest wewnętrznym punktem przedziału Z_c , a c jego prawym krańcem, więc $x_o < c = k(x_1)$, a stąd z (14) $F(x_1,x_o) \neq 0$. Stąd

$$F(x_1,x_o) \cdot F(x_o,c) \neq 0 = F(x_1,c),$$

a więc też otrzymujemy sprzeczność z założeniem, że funkcja F spełnia równanie (1). W ten sposób zostało wykazane (18).

Ostatecznie wykazaliśmy, że

$$(19) \qquad \begin{aligned} F(x,y) &\neq 0 \quad \text{gdy} \quad \langle x,y\rangle \in \bigcup_{\Delta\in U} T(\Delta) \\ F(x,y) &= 0 \quad \text{gdy} \quad \langle x,y\rangle \,\overline{\in}\, \bigcup_{\Delta\in U} T(\Delta) \end{aligned}$$

Dla zakończenia dowodu twierdzenia wystarczy pokazać, że istnieje taka funkcja jednej zmiennej $f(x)$ określona i różna od zera na zbiorze $\bigcup_{\Delta\in U} \Delta$, dla której

$$(20) \qquad F(x,y) = \frac{f(y)}{f(x)} \quad \text{gdy} \quad \langle x,y\rangle \in \bigcup_{\Delta\in U} T(\Delta)$$

Rozważmy dowolny przedział Δ ze zbioru U. Niech x_n będzie nierosnącym ciągiem liczb rzeczywistych należących do Δ i zbieżnych do jego lewego krańca /którym może być $-\infty$/, przy czym gdy ten lewy kraniec a należy do Δ, to przyjmujemy $x_n = a$. Oznaczmy przez x_0 prawy kraniec przedziału Δ /x_0 może być równe $+\infty$/. Mamy:

$$\Delta = \bigcup_{v=1}^{\infty} [x_{v+1}, x_v) \cup [x_1, x_0 \|$$

gdzie $[x_1, x_0\| = [x_1, x_0]$ gdy $x_0 \in \Delta$, oraz

$[x_1, x_0\| = [x_1, x_0)$ gdy $x_0 \bar{\in} \Delta$.

Przyjmijmy

(21)
$$f(x) = F(x_1, x) \quad \text{gdy} \quad x \in [x_1, x_0\| \quad \text{oraz}$$
$$f(x) = \frac{F(x_{v+1}, x)}{F(x_{v+1}, x_1)} \quad \text{gdy} \quad x \in [x_{v+1}, x_v) \text{ dla } v=1,2,3,\dots .$$

/ $F(x_{v+1}, x_1) \neq 0$ wobec (19), bowiem $x_1 \in \Delta$, $x_{v+1} \in \Delta$ oraz $x_{v+1} \leq x_1$, więc $\langle x_{v+1}, x_1 \rangle \in T(\Delta)$ /.

Na podstawie (19) łatwo zauważamy, że $f(x) \neq 0$ w przedziale Δ.

Niech $\langle x,y \rangle \in T(\Delta)$. Wtedy $x \in \Delta$ i $x \leq y$ i $y \in \Delta$.

Jeżeli $x \geq x_1$, to $F(x_1, x) \cdot F(x,y) = F(x_1, y)$, a więc z (21) $f(x) \cdot F(x,y) = f(y)$, czyli $F(x,y) = \frac{f(y)}{f(x)}$.

Załóżmy, że $x < x_1$ i niech n będzie takim wskaźnikiem, dla którego $x_n \leq x < x_{n-1}$. Mamy wtedy $F(x_n, x) \cdot F(x,y) = F(x_n, y)$, czyli z (21)

$f(x) \cdot F(x_n, x_1) \cdot F(x,y) = F(x_n, y)$. Stąd

$$F(x,y) = \frac{F(x_n, y)}{f(x)\, F(x_n, x_1)} \tag{22}$$

Jeżeli $y \geq x_1$, to z (21) $F(x_n,y) = F(x_n,x_1)F(x_1,y) =$
$= F(x_n,x_1) \cdot f(y)$, a więc z (22)

$$F(x, y) = \frac{F(x_n,x_1) \cdot f(y)}{f(x) \cdot F(x_n,x_1)} = \frac{f(y)}{f(x)} .$$

Jeżeli $y < x_1$, to istnieje taki wskaźnik m dla którego $x_m \leq y < x_{m-1}$. Wobec tego, że $y \geq x$ mamy $m \leq n$. Wtedy

$$F(x_n,y) = F(x_n,x_{n-1}) \cdot F(x_{n-1},x_{n-2}) \dots F(x_m,y)$$

oraz

$$F(x_n,x_1) = F(x_n,x_{n-1}) \cdot F(x_{n-1},x_{n-2}) \dots F(x_m,x_1).$$

Uwzględniając powyższe w (22) mamy

$$F(x,y) = \frac{F(x_m,y)}{f(x)F(x_m,x_1)} = \frac{F(x_m,y)}{\frac{F(x_m,x_1)}{f(x)}} = \frac{f(y)}{f(x)} .$$

Wykazaliśmy więc, że dla $\langle x,y\rangle \in T(\Delta)$ mamy $F(x,y) = \frac{f(y)}{f(x)}$. Postępując podobnie z każdym przedziałem Δ układu U otrzymamy funkcję $f(x)$ określoną na zbiorze $\bigcup_{\Delta \in U} \Delta$, dla której spełniony będzie związek (20). W ten sposób zakończyliśmy dowód twierdzenia.

Na podstawie udowodnionego twierdzenia wykażemy obecnie następujący

Wniosek 1

Jedynymi rozwiązaniami równania (1) przy warunku (2) ciągłymi dla $x \leq y$ są funkcje

(23) $$F(x,y) \equiv 0 \quad , \text{ lub}$$

(24) $F(x,y) = \frac{f(y)}{f(x)}$, gdzie $f(x)$ jest dowolną funkcją

ciągłą i różną od zera w przedziale $(-\infty, +\infty)$.

Dowód.

Funkcje postaci (23) lub (24) są oczywiście ciągłymi rozwiązaniami równania (1) przy warunku (2). Wykażemy, że są to jedyne rozwiązania ciągłe. Załóżmy, że $F(x,y)$ jest ciągłym rozwiązaniem równania (1) przy warunku (2). Zgodnie z udowodnionym twierdzeniem $F(x,y)$ jest wtedy postaci (3). Udowodnimy, że układ U, określony w (4), w tym wypadku redukuje się albo do przedziału pustego albo do przedziału $(-\infty, +\infty)$. Gdyby bowiem tak nie było, to do układu U musiałby należeć przedział Δ^* niepusty o jednym krańcu skończonym (kraniec ten oznaczmy przez a). Rozważmy półprostą P o równaniu $y = -x + 2a$, gdzie $x < a$. Wykażemy, że żaden punkt tej półprostej nie może należeć do zbioru $\bigcup_{\Delta \in U} T(\Delta)$, choć półprosta ta przebiega w zbiorze $(\langle \hat{x,y} \rangle)$ $(x \leq y)$ (bowiem $y - x = -2(x - a) \geq 0$). Przypuśćmy bowiem, że istnieje przedział Δ układu U taki, że dla pewnego x zachodzi $x \in \Delta$, $x < a$ oraz $y = -x + 2a \in \Delta$. Liczba a nie jest punktem wewnętrznym przedziału Δ, bo a jest krańcem przedziału Δ^*, a przedziały Δ i Δ^* są albo identyczne albo rozłączne. Ponieważ dla $x < a$ mamy $y = -x + 2a > -a + 2a = a$, więc liczby x i y nie mogą jednocześnie należeć do przedziału Δ, wbrew temu, że x i y należy do Δ.

Z rozumowania powyższego otrzymujemy wniosek, że $F(x,y) = 0$ dla dowolnej pary $\langle x,y \rangle$ należącej do półprostej P, a stąd $F(a,a) = 0$, bowiem F jest funkcją ciągłą oraz punkt $\langle a,a \rangle$ jest początkiem półprostej P. Wobec ciągłości funkcji $F(x,y)$ mamy stąd

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to a\\ y\geq x}} F(x,y)=0$, a więc $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to a\\ \langle x,y\rangle\in T(\Delta^*)}} F(x,y)=0$, a stąd $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to a\\ \langle x,y\rangle\in T(\Delta^*)}} \frac{f(y)}{f(x)}=0$

Przyjmując w powyższym $y = x \to a$ otrzymujemy sprzeczność.

Wykazaliśmy więc, że układ U składa się albo z przedziału pustego i wtedy $F(x,y) \equiv 0$, a więc zachodzi (23), albo z przedziału $(-\infty, +\infty)$ i wtedy $F(x,y)=\frac{f(y)}{f(x)}$. Ponieważ funkcja $F(x,y)$ jest ciągła, więc $f(y)=f(x_0)F(x_0,y)$ jest funkcją ciągłą dla $y \geq x_0$ przy każdym x_0, a stąd f jest funkcją ciągłą w całym przedziale $(-\infty, +\infty)$, c.n.o.

Wniosek 2

Jedynymi rozwiązaniami równania (1) przy warunku (2) klas C^n $(n \geq 0)$ dla $x \leq y$ są funkcje postaci (23) lub (24), gdzie f jest dowolną funkcją klasy C^n różną od zera w przedziale $(-\infty, +\infty)$.

Dowód.

Funkcje (23) lub (24) są rozwiązaniami równania (1) przy warunku (2). Funkcja klasy C^n, będąca rozwiązaniem równania (1) przy warunku (2) jest ciągła, a więc musi być postaci $F(x,y) \equiv 0$ lub $F(x,y)=\frac{f(y)}{f(x)}$. Stąd $f(y) = F(x_0,y).f(x_0)$ dla $y \geq x_0$, a więc klasa C^n funkcji F pociąga za sobą klasę C^n funkcji $f(x)$ dla każdego $x \geq x_0$ przy każdym x_0, a więc w całym przedziale $(-\infty, +\infty)$, c.n.o.

Wniosek 3

Dołożenie do równania (1) warunku (2) nie powiększa zbioru rozwiązań klasy C^n tego równania.

Wynika to stąd, że funkcje postaci (23) lub (24) są rozwiązaniami równania (1) bez warunku (2).

PRACE CYTOWANE

[1] M.FRÉCHET , Solution continue la plus générale d'une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités en chaine, Bull.Soc.Math. France 60 (1932), str. 232-280.

[2] Z.MOSZNER, Solution générale de l'équation $F(x,y) \cdot F(y,z) = F(x,z)$ pour $x < y < z$, Compt.Rend. de l'Acad.des Sciences /Paryż/, t.261 /1965/,str.28.

RÉSUMÉ

Solution générale de l'équation $F(x,y) \cdot F(y,z) = F(x,z)$ pour $x \leq y \leq z$.

On donne la solution générale de l'équation (1) pour $x \leq y \leq z$, où F est une fonction cherchée de deux variables réelles, définie sur l'ensemble $E = (\langle x, y \rangle)$ ($x \leq y$) et dont les valeurs sont réelles, sous la forme (3) où U est un système arbitraire d'intervalles (c'est-à-dire de sous-ensembles convexes de l'ensemble de nombres réels) disjoints, f est une fonction réelle d'une variable réelle, définie et différente de zéro sur l'ensemble $\bigcup_{\Delta \in U} \Delta$ et $T(\Delta)$ est défini par (6).

De plus chaque solution de classe C^n ($n \geq 0$) de l'équation (1) sous condition (2) sur l'ensemble E est de la forme $F(x,y) \equiv 0$ ou de la forme $F(x,y) = f(y)/f(x)$, où f

est une fonction réelle d'une variable réelle de classe C^n et différente de zéro dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

Резюме

Общее решение уравнения $F(x,y) \cdot F(y,z) = F(x,z)$ при условии $x \le y \le z$

Доказывается, что общее решение уравнения (1) при условии (2), где F искомая вещественная функция двух вещественных переменных, определённая в множестве $E = (\langle \widehat{x,y} \rangle)(x \le y)$ дано в форме (3), где U является произволбной системой интервалов / т.е. связаных подмножеств множества вещественных чисел /, f является вещественной функцией вещественной переменной, определённой и отличной от нуля на множестве $\bigcup_{\Delta \in U} \Delta$,

а $T(\Delta) = \langle \widehat{x,y} \rangle \left[x \in \Delta \cdot y \ge x \cdot y \in \Delta \right]$.

Кроме того каждое решение уравнения (1) при условии (2) класса $C^n(\ge)$ на множестве E есть в форме $F(x,y) = 0$ или $F(x,y) = \frac{f(y)}{f(x)}$ где f – вещественная функция вещественной переменной класса C^n, неравная нуль в интервале $(-\infty, +\infty)$.