Zenon Moszner

O PEWNYM TWIERDZENIU Z ALGEBRY AFINORÓW

W pracy uzupełniono założenia pewnego twierdzenia z algebry afinorów kowariantnych o 2 i 3 wskaźnikach, podanego w książce J.A.SCHOUTENA i D.J.STRUIKA [2], zilustrowano na przykładach istotność tych założeń, oraz podano pewne uogólnienie rozważanego twierdzenia na afinory czyste o m wskaźnikach i afinory mieszane.

J.A.SCHOUTEN w książce [2] na str.13 podaje następujące twierdzenie z algebry afinorów:

I. Jeżeli dla afinora $v_{\lambda\sigma}$ związek

$$a\, v_{\lambda\sigma} + b\, v_{\sigma\lambda} = 0$$

zachodzi w pewnym układzie odniesienia, to zachodzi on w każdym układzie odniesienia. Jeżeli ponadto $v_{\lambda\sigma} \neq 0$, to $a = \pm b$.x/

Na tej samej stronicy podaje też następujące twierdzenie:

Jeżeli dla afinora $v_{\varkappa\lambda\mu}$ związek

$$(1) \qquad a\, v_{\varkappa\lambda\mu} + b\, v_{\lambda\mu\varkappa} + c\, v_{\mu\varkappa\lambda} = 0$$

zachodzi w pewnym układzie odniesienia, to zachodzi on w każdym układzie odniesienia,

oraz stawia pytanie:

Jaka zależność zachodzi między a, b i c

---

x/ SCHOUTEN podaje, że zaczerpnął to twierdzenie z książki L.P.EISENHARTA [1] str.16.

gdy $v_{\varkappa\lambda\mu} \neq 0$?x/

Na stronicy 153 daje na powyższe pytanie odpowiedź następującą

(2) $$a + b + c = 0 \quad \text{lub} \quad a = b = c ,$$

przy czym pierwszy składnik powyższej alternatywy zachodzi gdy

$$v_{\varkappa\lambda\mu} + v_{\lambda\mu\varkappa} + v_{\mu\varkappa\lambda} \neq 0,$$

a drugi, gdy

$$v_{\varkappa\lambda\mu} + v_{\lambda\mu\varkappa} + v_{\mu\varkappa\lambda} = 0.$$

Podany przez SCHOUTENA dowód powyższego ([2] str.153) nie jest pełny i nie wyjaśnia on, czy w powyższych twierdzeniach dopuszcza afinory o współrzędnych zespolonych i współczynniki a, b, c zespolone. Nasuwają się w związku z tym uwagi następujące.

1. Twierdzenie I dotyczące afinorów o walencji (0,2) prawdziwe jest dla afinorów o współrzędnych zespolonych. Wynika to z rozumowania podanego w [2] str.153.

2. Z zachodzenia związku (1) dla wszelkich układów wartości wskaźników $\varkappa$, λ, μ, przy założeniu, że afinor $v_{\varkappa\lambda\mu}$ jest niezerowy, wynika (2) przy dodatkowych założeniach, że:

(3) afinor $v_{\varkappa\lambda\mu}$ ma współrzędne rzeczywiste, lub

(4) współczynniki a, b, c w związku (1) są liczbami rzeczywistymi, lub

(5) $v_{\varkappa\lambda\mu} + v_{\lambda\mu\varkappa} + v_{\mu\varkappa\lambda} \neq 0$ dla pewnego ukła-

---

x/ W oryginale powyższe twierdzenia i pytanie brzmią: Gilt die Gleichung für den Affinor $v_{\lambda\sigma}$: $a\,v_{\lambda\sigma} + b\,v_{\sigma\lambda} = 0$ in bezug auf irgend ein Koordinatensystem, so gilt sie allgemein. Ist $v_{\lambda\sigma} \neq 0$, so folgt $a = \pm b$.

Gilt die Gleichung für den Affinor $v_{\varkappa\lambda\mu}$: $a\,v_{\varkappa\lambda\mu} + b\,v_{\lambda\mu\varkappa} + c\,v_{\mu\varkappa\lambda} = 0$ in bezug auf irgend ein Koordinatensystem, so gilt sie allgemein.

Welche Beziehung bestehen zwischen a, b und c wenn $v_{\varkappa\lambda\mu} \neq 0$ ist?

du wartości wskaźników κ, λ, μ.x/

Z zachodzenia związku (1) dla wszelkich układów wartości wskaźników κ, λ, μ wynika bowiem, że

$$
(6) \quad \begin{aligned}
a\, v_{\kappa\lambda\mu} + b\, v_{\lambda\mu\kappa} + c\, v_{\mu\kappa\lambda} &= 0\\
a\, v_{\lambda\mu\kappa} + b\, v_{\mu\kappa\lambda} + c\, v_{\kappa\lambda\mu} &= 0\\
a\, v_{\mu\kappa\lambda} + b\, v_{\kappa\lambda\mu} + c\, v_{\lambda\mu\kappa} &= 0.
\end{aligned}
$$

Dodając powyższe związki stronami do siebie otrzymamy

$$(a + b + c)(v_{\kappa\lambda\mu} + v_{\lambda\mu\kappa} + v_{\mu\kappa\lambda}) = 0.$$

Stąd więc jeżeli spełnione jest założenie (5) otrzymujemy $a + b + c = 0$, a więc zachodzi (2). Wystarczy więc w dalszym ciągu dowodu ograniczyć się do przypadku gdy

(7) $v_{\kappa\lambda\mu} + v_{\lambda\mu\kappa} + v_{\mu\kappa\lambda} = 0$ dla wszystkich układów wartości wskaźników κ, λ, μ.

Załóżmy, że zarówno współrzędne afinora $v_{\kappa\lambda\mu}$ jak i współczynniki a, b, c są liczbami rzeczywistymi. Przyjmijmy, że κ, λ, μ jest takim układem wartości wskaźników, dla którego $v_{\kappa\lambda\mu} \neq 0$ i rozważmy w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej wektory o współrzędnych

(8) $(v_{\kappa\lambda\mu}, v_{\lambda\mu\kappa}, v_{\mu\kappa\lambda})$ oraz $(v_{\lambda\mu\kappa}, v_{\mu\kappa\lambda}, v_{\kappa\lambda\mu})$

Wektory te są liniowo niezależne, bowiem na podstawie (7) mamy $v_{\lambda\mu\kappa} = - v_{\kappa\lambda\mu} - v_{\mu\kappa\lambda}$, a stąd

$$v_{\kappa\lambda\mu}\cdot v_{\mu\kappa\lambda} - (v_{\lambda\mu\kappa})^2 = v_{\kappa\lambda\mu}\cdot v_{\mu\kappa\lambda} - (v_{\kappa\lambda\mu} + v_{\mu\kappa\lambda})^2 =$$

$$= - \left[(v_{\kappa\lambda\mu})^2 + (v_{\mu\kappa\lambda})^2 + v_{\kappa\lambda\mu}\cdot v_{\mu\kappa\lambda}\right] \neq 0,$$

z uwagi na to, że $v_{\kappa\lambda\mu} \neq 0$ a forma kwadratowa $x^2 + y^2 + xy$ jest określona dodatnio. Ponadto wektory o

---

x/ Warunek ten jest spełniony w szczególności dla niezerowego tensora lub 3-wektora.

współrzędnych (8) są na podstawie dwu pierwszych związków (6) oraz na podstawie (7) prostopadłe do wektorów o współrzędnych (1,1,1) oraz (a,b,c). Wynika stąd $a = b = c$, bowiem wektory o współrzędnych (1,1,1) oraz (a,b,c) muszą być liniowo zależne.

Przypuśćmy obecnie, że zachodzi (4) i połóżmy dla każdej trójki wskaźników κ, λ, μ:

$$v_{\kappa\lambda\mu} = \tilde{v}_{\kappa\lambda\mu} + i\,\tilde{\tilde{v}}_{\kappa\lambda\mu}$$

gdzie $\tilde{v}_{\kappa\lambda\mu}$ i $\tilde{\tilde{v}}_{\kappa\lambda\mu}$ są liczbami rzeczywistymi.

Związek (1) przyjmie wtedy postać

$$(a\,\tilde{v}_{\kappa\lambda\mu} + b\,\tilde{v}_{\lambda\mu\kappa} + c\,\tilde{v}_{\mu\kappa\lambda}) + i(a\,\tilde{\tilde{v}}_{\kappa\lambda\mu} + b\,\tilde{\tilde{v}}_{\lambda\mu\kappa} + c\,\tilde{\tilde{v}}_{\mu\kappa\lambda}) = 0,$$

a stąd: $a\,\tilde{v}_{\kappa\lambda\mu} + b\,\tilde{v}_{\lambda\mu\kappa} + c\,\tilde{v}_{\mu\kappa\lambda} = a\,\tilde{\tilde{v}}_{\kappa\lambda\mu} + b\,\tilde{\tilde{v}}_{\lambda\mu\kappa} + c\,\tilde{\tilde{v}}_{\mu\kappa\lambda} = 0.$

Na podstawie rozumowania przeprowadzonego powyżej (wobec tego, że a, b, c, $\tilde{v}_{\kappa\lambda\mu}$, $\tilde{\tilde{v}}_{\kappa\lambda\mu}$ są liczbami rzeczywistymi) otrzymujemy $a = b = c$, a więc zachodzi (2).

Załóżmy obecnie, że spełnione jest założenie (3) i połóżmy

(9) $\quad a = \tilde{a} + \tilde{\tilde{a}}\,i, \quad b = \tilde{b} + \tilde{\tilde{b}}\,i, \quad c = \tilde{c} + \tilde{\tilde{c}}\,i,$

gdzie $\tilde{a}$, $\tilde{\tilde{a}}$, $\tilde{b}$, $\tilde{\tilde{b}}$, $\tilde{c}$, $\tilde{\tilde{c}}$ są liczbami rzeczywistymi. Podstawiając związek (9) do związku (1) otrzymamy

$$\tilde{a}\,v_{\kappa\lambda\mu} + \tilde{b}\,v_{\lambda\mu\kappa} + \tilde{c}\,v_{\mu\kappa\lambda} = \tilde{\tilde{a}}\,v_{\kappa\lambda\mu} + \tilde{\tilde{b}}\,v_{\lambda\mu\kappa} + \tilde{\tilde{c}}\,v_{\mu\kappa\lambda} = 0,$$

a stąd $\tilde{a} = \tilde{b} = \tilde{c}$ oraz $\tilde{\tilde{a}} = \tilde{\tilde{b}} = \tilde{\tilde{c}}$, a więc $a = b = c$, c.n.o.

3. Jeżeli założenia (3), (4) lub (5) nie są spełnione, to zachodzenie związku (1) nie pociąga zachodzenia (2) dla każdego afinora niezerowego $v_{\kappa\lambda\mu}$. Świadczy o tym przykład następujący.

Niech w pewnym układzie odniesienia w przestrzeni E_2 afinor $v_{\kappa\lambda\mu}$ ma współrzędne następujące

$$v_{111} \overset{*}{=} v_{222} \overset{*}{=} 0, \quad v_{121} \overset{*}{=} v_{221} \overset{*}{=} -1-\sqrt{3}\,i\,,$$

$$v_{112} \overset{*}{=} v_{122} \overset{*}{=} 2, \quad v_{211} \overset{*}{=} v_{212} \overset{*}{=} -1+\sqrt{3}\,i\,.$$

Przez rozważenie wszystkich możliwości na układy wartości wskaźników κ, λ, μ łatwo stwierdzamy, że

$$(-1)\, v_{\kappa\lambda\mu} + 1 \cdot v_{\lambda\mu\kappa} + (-\sqrt{3}\,i)\, v_{\mu\kappa\lambda} = 0\,,$$

a więc zachodzi (1), natomiast nie zachodzi (2) $(a = -1,\ b = 1,\ c = -\sqrt{3}\,i)$.

4. Rozważmy afinor $v_{\lambda_1 \dots \lambda_m}$ o walencji $(0, m)$ i załóżmy, że dla wszelkich układów wartości wskaźników $\lambda_1 \dots \lambda_m (\lambda_i = 1,2,\dots,n$ dla $i = 1,2,\dots,m)$ zachodzi

$$(10)\quad a_1 v_{\lambda_1 \dots \lambda_m} + a_2 v_{\lambda_2 \dots \lambda_m \lambda_1} + a_3 v_{\lambda_3 \dots \lambda_m \lambda_1 \lambda_2} + \dots + a_m v_{\lambda_m \lambda_1 \dots \lambda_{m-1}} = 0$$

dla pewnego układu skalarów $a_1, a_2, \dots, a_m$.

Przy założeniu istnienia układu wartości wskaźników $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ dla którego

$$(11)\quad v_{\lambda_1 \dots \lambda_m} + v_{\lambda_2 \dots \lambda_m \lambda_1} + \dots + v_{\lambda_m \lambda_1 \dots \lambda_{m-1}} \neq 0^{x/}$$

dowodzimy, analogicznie jak w punkcie 2, że

$$a_1 + a_2 + \dots + a_m = 0\,.$$

Natomiast już dla $m = 4$ z zachodzenia związku (10), nawet przy ograniczeniu się ze współczynnikami $a_1, \dots a_m$ i współrzędnymi niezerowego afinora $v_{\lambda_1 \dots \lambda_m}$ tylko do liczb rzeczywistych, nie wynika, że

---

x/ Warunek ten spełniony jest w szczególności przez dowolny niezerowy tensor oraz w przypadku m nieparzystego przez niezerowy m-wektor,

$$(12) \qquad a_1 + a_2 + \dots + a_m = 0 \quad \text{lub} \quad a_1 = a_2 = \dots = a_m .$$

(jak to ma miejsce dla $m = 3$ lub $m = 2$), czego dowodzi następujący przykład.
Rozważmy afinor $v_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$, który w pewnym układzie odniesienia w przestrzeni E_2 ma współrzędne

$$v_{1111} \overset{*}{=} v_{2222} \overset{*}{=} v_{2121} \overset{*}{=} v_{1212} \overset{*}{=} v_{1222} \overset{*}{=} v_{1122} \overset{*}{=}$$

$$\overset{*}{=} v_{1112} \overset{*}{=} v_{2212} \overset{*}{=} v_{2211} \overset{*}{=} v_{1211} \overset{*}{=} 0 , \qquad v_{2221} \overset{*}{=}$$

$$\overset{*}{=} v_{1221} \overset{*}{=} v_{1121} \overset{*}{=} 1, \qquad v_{2122} \overset{*}{=} v_{2112} \overset{*}{=} v_{2111} \overset{*}{=} -1.$$

Z łatwością stwierdzamy, że

$$1 \cdot v_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} + 2 \cdot v_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_1} + 1 \cdot v_{\lambda_3\lambda_4\lambda_1\lambda_2} + 2 \cdot v_{\lambda_4\lambda_1\lambda_2\lambda_3} = 0,$$

natomiast związki (12) nie zachodzą $\left(a_1 = 1 = a_3 , \; a_2 = 2 = a_4 \right)$.

4. Reasumując stwierdzamy, że prawdziwe jest twierdzenie następujące: związek (10), zachodząc przy wszelkich układach wartości wskaźników $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$ dla niezerowego afinora o walencji $(0,m)$, pociąga związki (12),

1) gdy $m = 2$, lub
2) gdy $m = 3$, przy dodatkowych założeniach (3) lub (4), lub
3) dla dowolnego $m > 1$, jeżeli spełnione jest założenie (11).

Ponadto podane przykłady świadczą o tym, że wymienione w 2) i 3) dodatkowe założenia są istotne.

Poczynione uwagi przenoszą się na afinory czysto kontrawariantne jak również na czyste gęstości afinorowe. Nie trudno zauważyć, że związek (10) i analogiczny do niego związek dla czystej gęstości afinorowej jest niezmiennikiem pseudogrupy G_1 x/ (dla afinorów o walencji (0,2) prosty dowód przeprowadzony jest w [2] str.153, dla czystych gęstości afinorowych dowód niezmienniczości jest analogiczny). Wynika stąd, że dodatkowe założenia (3) lub (5) można osłabić dodając do ich sformułowania zwrot "w pewnym (dopuszczalnym przy pseudogrupie G_1) układzie odniesienia".

5. Dla gęstości afinorowych istotnie mieszanych

$$v^{\lambda_1\ldots\lambda_p}{}_{\lambda_{p+1}\ldots\lambda_m}$$

związek analogiczny do związku (10) postaci

$$(13)\quad \underset{1}{a}\, v^{\lambda_1\ldots\lambda_p}{}_{\lambda_{p+1}\ldots\lambda_m} + \underset{2}{a}\, v^{\lambda_2\ldots\lambda_{p+1}}{}_{\lambda_{p+1}\ldots\lambda_m\lambda_1} + \ldots +$$

$$+ \underset{m-1}{a}\, v^{\lambda_{m-1}\lambda_m\lambda_1\ldots\lambda_{p-2}}{}_{\lambda_{p-1}\ldots\lambda_{m-2}} + \underset{m}{a}\, v^{\lambda_m\lambda_1\ldots\lambda_{p-1}}{}_{\lambda_p\ldots\lambda_{m-1}} = 0,$$

zachodzący, przy pewnym układzie skalarnych współczynników, dla każdego układu wartości wskaźników $\lambda_1\ldots\lambda_m$, nie jest na ogół niezmiennikiem pseudogrupy G_1. Wynika to choćby stąd, że symetria afinora w_μ^λ (a więc zachodzenie związku $w_\mu^\lambda - w_\lambda^\mu = 0$) nie jest niezmiennikiem tej pseudogrupy (zob. [4]). Udowodnimy natomiast, że związek (13) jest niezmiennikiem grupy podobieństw, tzn. podgrupy pseudogrupy G_1, dla której

---

x/ Definicja pseudogrupy G_1 podana jest w podręczniku [3] str.19.

$$(14)\qquad \sum_{\lambda'=1'}^{n'} A_{\lambda}^{\lambda'} A_{\mu}^{\lambda'} = \omega\,\delta_{\lambda\mu} \quad (\delta_{\lambda\mu}\ \text{symbol KRONECKERA}, \omega > 0, \ \lambda\mu = 1,2,\dots, n)$$

Ustalając w związkach (14) wskaźnik λ i traktując je jako układ równań liniowych o niewiadomych $A_{\lambda}^{\lambda'}$ dla $\lambda' = 1', 2', \dots, n'$ otrzymujemy na podstawie wzorów CRAMERA

$$(15)\qquad A_{\lambda}^{\lambda'} = \frac{\operatorname{dop}\left(A_{\lambda}^{\lambda'}\right).\omega}{\Delta},$$

gdzie Δ jest wyznacznikiem o elementach $A_{\lambda}^{\lambda'}$ (wiadomo, że $\Delta \neq 0$ w pseudogrupie G_1) a dop $\left(A_{\lambda}^{\lambda'}\right)$ dopełnieniem algebraicznym elementu $A_{\lambda}^{\lambda'}$ w tym wyznaczniku.

Wiadomo, że ([3] str. 32):

$$\frac{\operatorname{dop}\left(A_{\lambda}^{\lambda'}\right)}{\Delta} = A_{\lambda'}^{\lambda},$$

a więc z (15) otrzymujemy:

$$(26)\qquad A_{\lambda}^{\lambda'} = \omega A_{\lambda'}^{\lambda}.$$

Dowód niezmienniczości związku (13), dla uproszczenia zapisu, przeprowadzimy dla Δ gęstości afinorowej o walencji (1,2), tzn. dla gęstości $v^{\lambda_1}{}_{\lambda_2\lambda_3}$, i wadze r. Dowód w ogólnym przypadku przebiega analogicznie.

Na podstawie związków (16) otrzymujemy

$$a_1 v^{\lambda'_1}{}_{\lambda'_2\lambda'_3} + a_2 v^{\lambda'_2}{}_{\lambda'_3\lambda'_1} + a_3 v^{\lambda'_3}{}_{\lambda'_1\lambda'_2} = a_1 A_{\lambda_1}^{\lambda'_1} A_{\lambda'_2}^{\lambda_2} A_{\lambda'_3}^{\lambda_3} v^{\lambda_1}{}_{\lambda_2\lambda_3} \cdot \Delta^{-r} +$$

$$+ a_2 \Delta^{-r} A_{\lambda_2}^{\lambda'_2} A_{\lambda'_3}^{\lambda_3} A_{\lambda'_1}^{\lambda_1} v^{\lambda_2}{}_{\lambda_3\lambda_1} + a_3 \Delta^{-r} A_{\lambda_3}^{\lambda'_3} A_{\lambda'_1}^{\lambda_1} A_{\lambda'_2}^{\lambda_2} v^{\lambda_3}{}_{\lambda_1\lambda_2} =$$

$$= \sum_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3} a_1 \omega A_{\lambda'_1}^{\lambda_1} A_{\lambda'_2}^{\lambda_2} A_{\lambda'_3}^{\lambda_3} \Delta^{-r} v^{\lambda_1}{}_{\lambda_2\lambda_3} +$$

$$+\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3} \underset{2}{a}\,\Delta^{-r}\omega\, A^{\lambda_2}_{\lambda'_2} A^{\lambda_3}_{\lambda'_3} A^{\lambda_1}_{\lambda'_1} v^{\lambda_2}{}_{\lambda_3\lambda_1} +$$

$$+\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3} \underset{3}{a}\,\Delta^{-r}\omega\, A^{\lambda_3}_{\lambda'_3} A^{\lambda_1}_{\lambda'_1} A^{\lambda_2}_{\lambda'_2} v^{\lambda_3}{}_{\lambda_1\lambda_2} =$$

$$=\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3} \omega\Delta^{-r} A^{\lambda_1}_{\lambda'_1} A^{\lambda_2}_{\lambda'_2} A^{\lambda_3}_{\lambda'_3}\left(\underset{1}{a}\, v^{\lambda_1}{}_{\lambda_2\lambda_3} + \underset{2}{a}\, v^{\lambda_2}{}_{\lambda_3\lambda_1} + \underset{3}{a}\, v^{\lambda_3}{}_{\lambda_1\lambda_2}\right),$$

a więc gdy zachodzi związek (13) to

$$\underset{1}{a}\, v^{\lambda'_1}{}_{\lambda'_2\lambda'_3} + \underset{2}{a}\, v^{\lambda'_2}{}_{\lambda'_3\lambda'_1} + \underset{3}{a}\, v^{\lambda'_3}{}_{\lambda'_1\lambda'_2} = 0 ,$$

co należało okazać.

Z powyższego wynika, że uwagi poczynione w punkcie 4 przenoszą się na mieszane gęstości afinorowe jeżeli gęstości te będziemy rozpatrywać na gruncie geometrii podobieństw (tzn. zastąpimy pseudogrupę G_1 jej podgrupą - podobieństwami). Rozszerzenie grupy przekształceń jest tu niemożliwe, bowiem, jak to wykazali S.GOŁĄB i M.KUCHARZEWSKI w pracy [4] już żądanie niezmienniczości związku $w^{\lambda}_{\mu} - w^{\mu}_{\lambda} = 0$ prowadzi do zacieśnienia pseudogrupy G_1 do grupy podobieństw .

PRACE CYTOWANE

[1] L.P.EISENHART, Riemannian Geometry, 1926.

[2] J.A.SCHOUTEN, D.J.STRUIK, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, Tom I, 1935.

[3] S.GOŁĄB, Rachunek tensorowy, 1956.

[4] S.GOŁĄB, M.KUCHARZEWSKI, Über die Invarianz gewisser Eigenschaften von Affinoren bei Transformationen der entsprechenden Untergruppen der allgemeinen affinen Gruppe, Tensor(New Series), Vol.8, No 1, (1958), str.1-7.

RÉSUMÉ

Sur un théorème d'algèbre tensorielle

On démontre que la relation (10), ayant lieu pour un tenseur covariant $v_{\lambda_1,\ldots,\lambda_m}$ non nul pour tous les systèmes de valeurs des indices $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_m$ ($\lambda_v = 1,2,\ldots n$ pour $v = 1,2,\ldots, m$), implique les relations (12)

1/ si $m = 2$, ou

2/ si $m = 3$, si l'on admet que les coordonnées du tenseur sont réelles ou que les coefficients a_1, a_2, a_3 ($m = 3$) dans la relation (10) sont réels,

3/ pour m arbitraire ($m > 1$), si l'inégalite (11) est remplie pour un certain système des valeurs des indices $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_m$.

On montre aussi au moyen des exemples convenables que les suppositions complémentaires dans 2) et 3) dans le théorème précédent sont essentielles. Ce théorème est vrai aussi pour les tenseurs contravariants et pour les tenseurs mixtes. Dans ce dernier cas nous devons nous borner à la géométrie des similitudes.

Резюме

О некоторой теореме из тензорной алгебры.

Показывается, что из соотношения (10), выполняемого для ненулевого ковариантного тензора $v_{\lambda_1 \ldots \lambda_m}$ для всех систем значений индексов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ($\lambda_v = 1, 2, \ldots, n$, для $v = 1, 2, \ldots, m$) следует выполняемость соотношений (12)

1/ если $m = 2$, или

2/ если $m = 3$, при дополнительном условии, что все координанты тензора вещественны или что коэффициенты a_1, a_2, a_3 ($m = 3$) в соотношении (10) вещественны,

3/ для произвольного m ($m > 1$), если для некоторой системы значений индексов выполняется неравенство (11).

С помощью соответствующих примеров показывается что дополнительные условия в 2 /и 3 / являются существенными в вышеуказанной теореме. Эта теорема также справедлива как для контравариантных тензоров, так и для смешанных тензоров. В последнем случае мы должны однако ограничиться геометрией подобий.