Zenon Moszner

# O PEWNEJ WŁASNOSCI KRZYWYCH SFERYCZNYCH

Niniejsza nota poświęcona jest dowodowi pewnych twierdzeń dotyczących regularności krzywych położonych na kuli w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej $E_3$ i pewnym zastosowaniom tych twierdzeń.

§ 1. Udowodnimy następujące twierdzenie o charakterze lokalnym:

<u>Twierdzenie 1</u>

Jeżeli

(1) krzywa $C$ w przestrzeni $E_3$ ma równanie parametryczno-wektorowe $r = r(s)$, gdzie funkcja $r(s)$ jest klasy $C^2$ w przedziale $[\alpha, \beta]$ i $\left|\frac{dr}{ds}\right| \neq 0$ w każdym punkcie tego przedziału (wobec tych założeń możemy przyjąć, że parametr $s$ jest długością łuku na tej krzywej),

(2) pierwsza krzywizna $k(s)$ krzywej $C$ w punkcie $P_0$ o parametrze $s_0$ jest klasy $C^1$,

(3) krzywa $C$ leży na kuli, której promień oznaczymy przez $\varrho_0$,

(4) $k(s_0) \neq \frac{1}{\varrho_0}$ lub w pewnym otoczeniu punktu $s_0$:

$$k(s) \equiv \frac{1}{\varrho_0},$$

to krzywa $C$ jest klasy $C^3$ w punkcie o parametrze $s_0$.

Dowód. Przyjmując, że początek układu odniesienia znajduje się w środku kuli, na której leży krzywa C, otrzymujemy

(5) $$r^2(s) \equiv \varrho_0^2$$

a stąd

(6) $$r(s) \cdot \frac{dr(s)}{ds} \equiv 0.$$

Ponieważ s jest długością łuku na krzywej C, mamy

(7) $$\frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{ds} \equiv 1,$$

oraz

(8) $$\frac{dr}{ds} \cdot \frac{d^2r}{ds^2} \equiv 0.$$

Różniczkując związek 6 otrzymujemy na podstawie 7

(9) $$r \cdot \frac{d^2r}{ds^2} \equiv -1.$$

Na podstawie (6), (8) oraz określenia iloczynu wektorowego wektory

$$r, \frac{d^2r}{ds^2}, r \times \frac{dr}{ds}$$

są prostopadłe do niezerowego (wobec założenia (1)) wektora $\frac{dr}{ds}$, stanowią więc liniowo zależny układ wektorów. Wektory r i $r \times \frac{dr}{ds}$, jako niezerowe i prostopadłe, są liniowo niezależne, istnieją więc takie dwie skalarne funkcje zmiennej s: $\mu(s)$ i $v(s)$, że

(10) $$\frac{d^2r}{ds^2} = \mu r + v\left[r \times \frac{dr}{ds}\right].$$

Ale wobec (5) i (9)

$$(11) \qquad \mu(s) = \frac{r \cdot \frac{d^2 r}{ds^2}}{r \cdot r} = -\frac{1}{\varrho_o^2} \qquad \text{(const.)}$$

Ponadto

$$\left[ k(s) \right]^2 = \frac{d^2 r}{ds^2} \cdot \frac{d^2 r}{ds^2} = \mu^2 r^2 + v^2 \left[ r \times \frac{dr}{ds} \right]^2,$$

a więc na podstawie (5), (6), (7) i (11)

$$\left[ k(s) \right]^2 = \frac{1}{\varrho_o^4} \varrho_o^2 + v^2 \varrho_o^2 = \frac{1}{\varrho_o^2} + v^2 \varrho_o^2,$$

a stąd

$$\left[ v(s) \right]^2 = \frac{1}{\varrho_o^2} \left( \left[ k(s) \right]^2 - \frac{1}{\varrho_o^2} \right)$$

więc

$$v(s) = \pm \frac{1}{\varrho_o} \sqrt{\left[ k(s) \right]^2 - \frac{1}{\varrho_o^2}} .$$

Na podstawie założeń (2) i (4) wnioskujemy z ostatniego wzoru, że $v(s)$ jest funkcją klasy $C^1$ w punkcie $s_o$. Stąd i z (11) oraz (10) wynika, że funkcja $r(s)$ jest klasy $C^3$ w punkcie $P_o$, c.n.o.

Twierdzeniu 1 możemy nadać następującą postać integralną:

Twierdzenie 2

Jeżeli krzywa $C$ spełnia założenia (1) i (3) twierdzenia i oraz

(12) krzywizna $k(s)$ krzywej $C$ w każdym punkcie przedziału $[\alpha, \beta]$ jest klasy $C^1$,

to krzywa $C$ jest klasy $C^3$ w niemal każdym punkcie przedziału $[\alpha, \beta]$, tzn. zbiór tych punktów przedziału $[\alpha,\beta]$ w którym krzywa $C$ nie jest klasy $C^3$ jest nigdziegęsty w $[\alpha,\beta]$.

Dowód. Na podstawie założenia (12) zbiór $Z \overset{df}{=} \underset{s}{(E)}\left[s\in[\alpha,\beta], k(s) = \frac{1}{\varrho_0}\right]$ jest zamknięty. W każdym punkcie zbioru $[\alpha,\beta] \setminus Z$ oraz w każdym punkcie wewnętrznym zbioru $Z$ krzywa $C$, na podstawie twierdzenia 1, jest klasy $C^3$. Zbiór $U$ tych punktów przedziału $[\alpha,\beta]$, w których krzywa $C$ nie jest klasy $C^3$ zawiera się więc w brzegu zbioru $Z$. Ponieważ brzeg zbioru zamkniętego jest zbiorem nigdziegęstym (zob. [1] str. 38), więc zbiór $U$, jako zawarty w zbiorze nigdziegęstym, sam też jest zbiorem nigdziegęstym, c.n.o.

§ 2. Pokażemy, że założenie, iż krzywa $C$ jest sferyczna jest istotne w twierdzeniach 1 i 2. Wystarczy w tym celu podać przykład krzywej klasy $C^2$, mającej w każdym punkcie różniczkowalną krzywiznę x/, a nie posiadającej w żadnym punkcie tersji, a więc nie będącej klasy $C^3$.

Wiadomo, że istnieje funkcja $\gamma(\sigma)$ o następujących własnościach

(13) $\gamma(\sigma)$ jest ciągła w przedziale $(-\infty, +\infty)$,

(14) $$\limsup_{\delta \to 0} \frac{\gamma(\sigma+\delta) - \gamma(\sigma)}{\delta} = +\infty \quad \text{dla każdego } \sigma,$$

(15) $\gamma(0) = 0$.

Własności te posiada np. funkcja typu WEIERSTRASSA

$$\gamma(\sigma) = \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^v \cos 4^v \sigma$$ podana w pracy [3] na str. 33.

x/ W poniższym przykładzie nawet $k \equiv 1$.

Rozważmy następujące równanie różniczkowe

(16) $$\frac{d\,v(\sigma)}{d\sigma} = \sqrt{1 - \frac{\gamma^2(\sigma)}{\sin^2 v(\sigma)}}$$

gdzie $\sigma$ jest zmienną niezależną a $v(\sigma)$ szukaną funkcją. Ponieważ funkcja dwu zmiennych $\sigma$ i $v$

$$\sqrt{1 - \frac{\gamma^2(\sigma)}{\sin^2 v}}$$

jest ciągła w otoczeniu punktu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, istnieje taki przedział $[0, \sigma_0]$ i taka funkcja $v(\sigma)$, która spełnia równanie (16) w tym przedziale. Wynika stąd w szczególności, że $\sin v(\sigma) \neq 0$ w przedziale $[0, \sigma_0]$.

Połóżmy

(17) $$\mu(\sigma) \overset{\mathrm{df}}{=} \int_0^{\sigma} \frac{\gamma(\sigma)}{\sin^2 v(\sigma)}\, d\sigma$$

i rozważmy krzywą $C$ o następujących równaniach:

(18) $$\begin{aligned} x &= \int_0^{\sigma} \cos \mu(\sigma) \sin v(\sigma)\, d\sigma, \\ y &= \int_0^{\sigma} \sin \mu(\sigma) \sin v(\sigma)\, d\sigma, \\ z &= \int_0^{\sigma} \cos v(\sigma)\, d\sigma, \qquad \text{dla } \sigma \in [0, \sigma_0], \end{aligned}$$

gdzie $v$ i $\mu$ określone są związkami (16) i (17).

Udowodnię, że krzywa $C$ posiada żądane w przykładzie własności.

1) Ponieważ funkcje $v$ i $\mu$ posiadają ciągłe pierwsze pochodne, więc krzywa dana równaniami (18) jest klasy $C^2$ w $[0, \sigma_0]$.

2) Nie trudno zauważyć przez bezpośredni rachunek, że

$$(19)\qquad \left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\sigma}\right)^2 \equiv 1 \quad w\left[0, \sigma_0\right],$$

oraz

$$(20)\quad \left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right)^2 = \left(\frac{d\mu}{d\sigma}\right)^2 \sin^2 v + \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2 \equiv 1 \ w\left[0, \sigma_0\right].$$

Wynika stąd stałość pierwszej krzywizny krzywej $C$.

3) Bezpośrednim rachunkiem stwierdzamy, że

$$(21)\qquad \frac{dx}{d\sigma} \cdot \frac{d^2y}{d\sigma^2} - \frac{dy}{d\sigma} \cdot \frac{d^2x}{d\sigma^2} = \frac{d\mu}{d\sigma} \sin^2 v = \gamma(\sigma),$$

na podstawie związku (17).

Oznaczając krótko równania (18) krzywej $C$ w formie wektorowej przez $r = r(\sigma)$ stwierdzamy, na podstawie (19) i (20), że $\frac{dr}{d\sigma} \cdot \frac{dr}{d\sigma} \equiv 1$ oraz $\frac{d^2r}{d\sigma^2} \cdot \frac{d^2r}{d\sigma^2} \equiv 1$.

Oznaczając przez $t_1, t_2, t_3$ kolejne wektory trójścianu FRENETA dla krzywej $C$, mamy $t_1 = \frac{dr}{d\sigma}$ oraz $t_2 = \frac{d^2r}{d\sigma^2}$ a więc $t_3 = t_1 \times t_2 = \frac{dr}{d\sigma} \times \frac{d^2r}{d\sigma^2}$. Niech $\bar{\sigma} \in \left[0, \sigma_0\right]$ oraz $(\bar{\sigma} + \delta) \in \left[0, \sigma_0\right]$. Mamy

$$\left|t_3(\bar{\sigma}+\delta) - t_3(\bar{\sigma})\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)_{\sigma=\bar{\sigma}+\delta} \times \left(\frac{d^2r}{d\sigma^2}\right)_{\sigma=\bar{\sigma}+\delta} - \left(\frac{dr}{d\sigma}\right)_{\sigma=\bar{\sigma}} \times \left(\frac{d^2r}{d\sigma^2}\right)_{\sigma=\bar{\sigma}}\right|.$$

Ponieważ długość wektora jest niemniejsza od bezwzględnej wartości jego trzeciej współrzędnej, więc na podstawie (21) otrzymujemy

$$\left|t_3(\bar{\sigma}+\sigma) - t_3(\bar{\sigma})\right| \geqslant \left|\gamma(\bar{\sigma}+\delta) - \gamma(\bar{\sigma})\right|.$$

Stąd na podstawie (14) otrzymujemy

$$\limsup_{\delta \to 0} \left| \frac{t_3(\bar{\sigma}+\delta) - t_3(\bar{\sigma})}{\delta} \right| = +\infty,$$

co świadczy o tym (zob. [2] str.132-133), że krzywa $C$ nie posiada torsji w punkcie o parametrze $\bar{\sigma}$, a więc w żadnym punkcie, c.n.o.

Pokażemy obecnie, że założenie (4) jest istotne w twierdzeniu 1 . Rozważmy bowiem dwie krzywe $C_1$ i $C_2$ o następujących równaniach naturalnych

$$(22) \qquad C_1: \begin{cases} k = \dfrac{1}{\sin s} \\ \varkappa = 1 \end{cases} \qquad \text{dla } s \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$(23) \qquad C_2: \begin{cases} k = \dfrac{1}{\sin 5s} \\ \varkappa = 5 \end{cases} \qquad \text{dla } s \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{6}{11}\pi\right].$$

Ponieważ $k$ i $\varkappa$ w każdym z tych przedziałów są funkcjami klasy $C^{\infty}$, więc i krzywe $C_1$ oraz $C_2$ są klasy $C^{\infty}$. Ponieważ krzywizny i torsje obu krzywych $C_1$ i $C_2$ spełniają równanie

$$\frac{1}{k^2} + \frac{1}{\varkappa^2}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k}\right)\right]^2 = 1,$$

odpowiednio w przedziałach $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ oraz $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{6\pi}{11}\right]$, więc (zob. [4]) krzywe te leżą na kulach o promieniu 1. Jak wiadomo równania naturalne wyznaczają krzywą z dokładnością do ruchu, możemy więc tak dobrać krzywe $C_1$ i $C_2$, by

a/ leżały one na jednej kuli o promieniu 1 ,

b/ punkty na nich o parametrze $s = \frac{\pi}{2}$ pokrywały się ze sobą,

c/ styczne do nich w tych punktach były identyczne.

Oznaczmy przez $r_\alpha = r_\alpha(s)$ i $k_\alpha(s)$ dla $\alpha = 1,2$ odpowiednie równania parametryczno-wektorowe i krzywizny tak dobranych krzywych $C_1$ i $C_2$. Przeprowadzając dla każdej z krzywych $C_1$ i $C_2$ rozumowanie analogiczne do podanego w dowodzie twierdzenia 1, stwierdzamy, że istnieją takie funkcje skalarne $v_\alpha(s)$ i $\mu_\alpha(s)$ dla $\alpha=1,2$, dla których

$$\frac{d^2 r_\alpha}{ds^2} = \mu_\alpha r_\alpha + v_\alpha \left[ r_\alpha \times \frac{d r_\alpha}{ds} \right], \tag{24}$$

$$\mu_\alpha(s) \equiv -1 \qquad (\text{ bowiem z a) } \varrho_0 = 1), \tag{25}$$

$$v_\alpha(s) = \pm \sqrt{[k_\alpha(s)]^2 - 1}. \tag{26}$$

Ale z (22) i (23) $k_\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ dla $\alpha = 1,2$, a stąd i z (26) $v_\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , a więc stąd na podstawie b) i (25) mamy wobec (24)

$$\left(\frac{d^2 r_1}{ds^2}\right)_{s=\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{d^2 r_2}{ds^2}\right)_{s=\frac{\pi}{2}}.$$

Z powyższego i z c) wynika, że krzywa $C = C_1 \cup C_2$ , gdzie $C_1$ i $C_2$ zostały dobrane tak, by spełniały warunki (22), (23), a), b) i c), jest klasy $C^2$ w całym przeiziale $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{6\pi}{11}\right]$, natomiast nie posiada (wobec (22) i(23)) oczywiście torsji w punkcie o parametrze $s = \frac{\pi}{2}$, nie jest więc w tym punkcie klasy $C^3$.

§ 3. Zauważmy, że twierdzenie 1 może służyć do osłabiania założeń w twierdzeniach klasycznej geometrii różniczkowej. Zilutrujemy to na przykładzie. W.BIERNACKI w podręczniku [2] na str.135 dowodzi twierdzenia:
łuk krzywej sferycznej mający stałą krzywiznę jest płaski, przy założeniu, że rozważany łuk jest klasy $C^3$. Z twierdzenia 1 wynika, że łuk krzywej sferycznej klasy $C^2$ o stałej krzywiźnie /niezależnie od tego jaka jest ta krzywizna, założenie (4) twierdzenia 1 przy stałej krzywiźnie będzie spełnione/ będzie zarazem klasy $C^3$, a więc, zacytowane twierdzenie jest prawdziwe dla łuków klasy $C^2$.

## PRACE CYTOWANE


[1] C.KURATOWSKI, Topologie, Tom I, Monografie Matematyczne, Tom XX, Warszawa 1952.

[2] M.BIERNACKI, Geometria różniczkowa, Część I, Warszawa 1954.

[3] E.TARNAWSKI, Continuous fonctions in the logarythmic-power classification according to Holder's conditions, Fund.Math.XLII /1955/, str.11-37.

[4] Z.MOSZNER, Sur l'équation des courbes sphériques,Ann. Pol.Math. XI, /1962/, str.247-251.

## RÉSUMÉ

Sur une propriété des courbes sphériques

On démontre dans cette note les théorèmes suivants:

I. Si l'on suppose que

(1) la courbe $C$ dans l'espace euclidien à 3 dimensions, ayant l'équation paramétrique vectorielle $r = r(s)$, soit de classe $C^2$ dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$ et que $\left|\frac{dr}{ds}\right| \neq 0$ en tout point de cet intervalle,

(2) la première courbure $\varkappa(s)$ de la courbe $C$ en un point de paramètre $s_0$ soit de classe $C^1$,

(3) la courbe $C$ soit située sur une sphère, dont le rayon est désigné par $\varrho_0$,

(4) $\varkappa(s_0) \neq \frac{1}{\varrho_0}$ ou dans un entourage du point $s_0$: $\varkappa(s) \neq \frac{1}{\varrho_0}$,

dans ce cas la courbe $C$ est de classe $C^3$ au point de paramètre $s_0$.

II. Si l'on suppose que la courbe $C$ remplit les suppositions (1) et (3) et de plus que la courbure $\varkappa(s)$ de la courbe $C$ soit de classe $C^1$ en tout point de l'intervalle $[\alpha, \beta]$, dans ce cas la courbe est de classe $C^3$ en presque tout point de l'intervalle $[\alpha, \beta]$, c'est-à-dire l'ensemble de points de l'intervalle $[\alpha, \beta]$ où la courbe n'est pas de classe $C^3$ est non-dense dans $[\alpha, \beta]$.

On montre en envisageant la courbe de classe $C^2$, dont la courbure est constante et qui ne possède de torsion en aucun point, que la supposition (3) est essentielle dans les théorèmes précédents. On montre aussi en citant un exemple convenable que la supposition (4) est essentielle dans le premier

de ces théorèmes. On peut affaiblir au moyen de ce théorème certaines suppositions de la régularité dans quelques théorèmes de la géométrie différentielle classique.


Резюме

О некотором свойстве сферических кривых.

В этой работе доказаны следующие теоремы:

I. Если

1/ кривая C в 3-мерной евклидовом пространстве имеет векторное уравнение $r = r(s)$, где $r(s)$ является класса $C^2$ в промежутке $[\alpha, \beta]$ и $\left|\frac{dr}{ds}\right| \neq 0$ в каждой точке этого промежутка,

2/ кривизна $k(s)$ кривой C в точке о параметре $s_0$ является класса $C^1$,

3/ кривая C расположена на шаре, радиус которой обозначим черес $\rho_0$,

4/ $k(s_0) \neq \frac{1}{\rho_0}$ или $k(s) \equiv \frac{1}{\rho_0}$ в некоторой окресности точки $s_0$,

то кривая является кривой класса $C^3$ в точке о параметре $s_0$.

II. Если кривая удовлетворяет условиям 1/ и 3/ а также кривизна $k(s)$ кривой C является класса $C^1$ в каждой точке промежутка $[\alpha, \beta]$, то эта кривая является класса $C^3$ в почти каждой точке промежутка $[\alpha, \beta]$, т.е. множество точек промежутка $[\alpha, \beta]$ в котором кривая C не есть класса $C^3$, является нигде не плотным в промежутке $[\alpha, \beta]$.

С помощью примера кривой класса $C^2$ о

постоянной кривизне, не обладающей ни в какой точке кручением, показывается, что условие 3/ в вышеуказанных теоремах является существенным. Подобно условие 4/ является существенным в первой иа вышеуказанных теорем.

Теоремы I и II могут быть использованы при ослаблении регулярностных условий в определённых теоремах классической дифференциальной геометрии.