Zenon Moszner

O k-WYMIAROWYCH PŁATACH, KTÓRYCH HIPERPŁASZCZYZNY STYCZNE NALEŻĄ DO JEDNEGO PĘKU

W klasycznej geometrii różniczkowej krzywych w przestrzeni euklidesowej n-wymiarowej wiadomo, że przy odpowiednich założeniach o krzywej, przechodzenie wszystkich prostych stycznych do niej przez jeden stały punkt pociąga za sobą leżenie tej krzywej na prostej. Nasuwają się dwa kierunki uogólnienia powyższego wyniku. Jeden polega na tym, by rozważać hiperpłaszczyzny k-wymiarowe (k liczba naturalna, $1 \leq k \leq n-1$) ściśle styczne do krzywej w każdym jej punkcie i z założenia przechodzenia tych wszystkich hiperpłaszczyzn przez stały punkt przy odpowiednich założeniach regularności krzywej, wnioskować o leżeniu tej krzywej na pewnej hiperpłaszczyźnie k-wymiarowej. Uogólnieniami tego rodzaju zajmowałem się w pracy [3]. Drugi kierunek uogólnienia polegałby na tym, by krzywą a więc twór "jednowymiarowy" zastąpić hiperpowierzchnią k- wymiarową w przestrzeni n- wymiarowej, a proste styczne do krzywej zastąpić hiperpłaszczyznami k-wymiarowymi stycznymi do rozważanej powierzchni. Łatwo jednak zauważyć, że przechodzenie wszystkich hiperpłaszczyzn k-wymiarowych stycznych do danej hiperpowierzchni k-wymiarowej przez stały punkt nie musi pociągać, nawet przy dowolnej klasie regularności hiperpowierzchni, leżenia tej hiperpowierzchni w płaszczyźnie k-wymiarowej. Przykładem tego w przestrzeni trójwymiarowej jest powierzchnia takiej części stożka obrotowego, na której nie leży wierzchołek stożka. Powyższy negatywny wynik nasuwa myśl zastąpienia założenia przechodzenia hiperpłaszczyzn stycznych przez punkt, a więc hiperpłaszczyznę zerowymiarową, założeniem przechodzenia tych hiperpłaszczyzn przez stałą hiperpłaszczyznę odpowiednio wyższego od zera wymiaru. Celem niniejszej noty jest sformułowanie i uzasadnienie uogólnienia idącego w tym kierunku.

Rozważmy hiperpłat powierzchniowy k-wymiarowy P_k w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej E_n $(2 \leq k \leq n-1)$ [*)] dany następującymi równaniami

(1) $$x_i = f_i\,(u_1, u_2, \ldots, u_k) \quad \text{gdzie} \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

O hiperpłacie P_k uczyńmy następujące założenia

(2) funkcje $f_i(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ dla $i = 1,2,\ldots,n$ są klasy C^1 w pewnym obszarze G - tzn. zbiorze otwartym i spójnym - zmiennych $u_1, u_2, \ldots, u_k$,

(3) układ wektorów $r_j(u_1, \ldots, u_k)$ o składowych $\frac{\partial f_1}{\partial u_j}, \frac{\partial f_2}{\partial u_j}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial u_j}$ dla $j = 1,2,\ldots,k$ jest liniowo niezależny w każdym punkcie obszaru G, lub co na jedno wychodzi,

(4) macierz $\left\| \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right\|_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,k}}$ jest w każdym punkcie obszaru G rzędu k.

---

*) Przypadek $k = 1$ rozważyłem w pracy [3].

Hiperpłaszczyznę k-wymiarową $H_k(u_1,\dots,u_k)$ rozpiętą na wektorach $r_j(u_1,\dots,u_k)$ dla $j = 1,2,\dots,k$ zaczepionych w tym punkcie $p(u_1,u_2,\dots,u_k)$ płata P_k, któremu odpowiadają parametry $u_1,\dots,u_k$, nazwijmy hiperpłaszczyzną styczną do płata P_k w punkcie p.

Załóżmy ponadto, że

(5) wszystkie hiperpłaszczyzny $H_k(u_1,\dots,u_k)$ styczne do płata P_k, dla dowolnego układu $u_1,u_2,\dots,u_k$ należącego do obszaru G, przechodzą przez pewną $k-1$-wymiarową hiperpłaszczyznę $\overset{o}{H}_{k-1}$.

Udowodnimy następujące

Twierdzenie 1

Płat P_k o równaniach (1) spełniający założenia (2), (3) i (5) leży na pewnej hiperpłaszczyźnie k-wymiarowej.

Dla dowodu wykażemy najpierw słuszność następującego lematu.

Lemat. Jeżeli płat (1) spełnia założenia (2) i (3), a $\tilde{H}_{k-1}$ jest dowolną hiperpłaszczyzną k-1-wymiarową, to każde dwa punkty płata (1) można połączyć krzywą klasy C^1 leżącą na płacie P_k, mającą styczną w każdym punkcie i nie będącą w żadnym punkcie styczną do $\tilde{H}_{k-1}$.*/

Dowód lematu. Wybierzmy na płacie P_k dowolny punkt p_o i oznaczmy przez Z zbiór tych punktów płata P_k, które można z punktem p_o połączyć krzywą klasy C^1, leżącą na P_k, mającą w każdym punkcie styczną i nie będącą styczną w żadnym punkcie do $\tilde{H}_{k-1}$. Niech Z^* będzie zbiorem parametrów odpowiadających punktom zbioru Z. Udowodnię, że zbiór Z^* jest zamknięto-ot-

---

*/ Krzywą nazywamy styczną do hiperpłaszczyzny w pewnym punkcie p jeżeli wektor styczny do krzywej w punkcie p leży w tej hiperpłaszczyźnie.

twarty w G.

Przypuśćmy, że $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_k) \in Z^*$. Wykażę, że istnieje takie otoczenie Δ punktu $(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k)$, które zawiera się w zbiorze Z^*. Dobierzmy układ odniesienia tak, by hiperpłaszczyzna $\widetilde{H}_{k-1}$ była rozpięta na wektorach o składowych

(6) $$\delta_j^1, \delta_j^2, \ldots, \delta_j^n$$

dla $j = 1, 2, \ldots, k-1$, gdzie /tu i dalej/ $\delta_j^i = 1$ dla $i=j$ oraz $\delta_j^i = 0$ dla $i \neq j$ [x].

Rozważmy dwa przypadki

1) punkt $\bar{p}$ o współrzędnych $\bar{x}_i = f_i(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k)$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ nie leży na hiperpłaszczyźnie $\widetilde{H}_{k-1}$, lub
2) punkt $\bar{p}$ leży na hiperpłaszczyźnie $\widetilde{H}_{k-1}$.

W przypadku 1) mamy

$$\sum_{i=k}^{n} \left[f_i(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k) \right]^2 > 0,$$

gdyż w przeciwnym przypadku byłoby $\bar{x}_i = 0$ dla $i = k, \ldots, n$ czyli punkt $\bar{p}$ leżałby na hiperpłaszczyźnie $\widetilde{H}_{k-1}$. Istnieje więc taki wskaźnik $m\ (k \leq m \leq n)$, że $f_m(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k) \neq 0$, a stąd wobec ciągłości funkcji $f_m(u_1, \ldots, u_k)$ w obszarze G istnieje takie otoczenie Δ punktu $(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k)$, że

$$f_m(u_1, \ldots, u_k) \neq 0 \quad \text{w} \quad \Delta .$$

Niech $(\bar{\bar{u}}_1, \ldots, \bar{\bar{u}}_k)$ będzie dowolnym punktem z otoczenia Δ. Dla każdej krzywej o równaniach $u_j = u_j(t)$, gdzie $t \in [\alpha, \beta]$, klasy C^1, łączącej punkty $(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k)$ i $(\bar{\bar{u}}_1, \ldots, \bar{\bar{u}}_k)$

---

x/ Założenie to może pociągać za sobą konieczność zmiany pierwotnego układu odniesienia, a co za tym idzie zmianę równań płata P_k. Ponieważ jednak prawdziwość twierdzenia 1 i lematu nie zależy od doboru układu odniesienia, uczynione założenie nie jest istotne. Z tego też względu nie zmieniamy w dalszym ciągu równań płata.

(tzn. takiej, że $u_j(\alpha) = \bar{u}_j$ oraz $u_j(\beta) = \bar{\bar{u}}_j$ dla $j = 1,2,\ldots,k$), leżącej w Δ i spełniającej warunek

$$\sum_{j=1}^{k} \left| \frac{du_j(t)}{dt} \right| > 0 \quad \text{dla} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

krzywa o równaniach

$$(7) \qquad x_i = f_i(u_1(t), \ldots, u_k(t)) \overset{df}{=} x_i(t)$$

spełnia następujące warunki

a/ leży na płacie P_k,

b/ jest klasy C^1 i spełnia warunek

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d\, x_i(t)}{dt} \right)^2 > 0 \quad \text{dla} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

c/ nie jest w żadnym punkcie styczna do hiperpłaszczyzny $\tilde{H}_{k-1}$, bowiem mamy

$$f_m(u_1(t), \ldots, u_k(t)) \neq 0 \quad \text{dla} \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Punkt $\bar{p}$ można z punktem p_o połączyć krzywą C_1 klasy C^1, leżącą na płacie P_k, mającą styczną w każdym punkcie i nie będącą w żadnym punkcie styczną do hiperpłaszczyzny $\tilde{H}_{k-1}$. Oznaczmy przez $(a_1, \ldots, a_n)$ współrzędne wektora niezerowego i równoległego do prostej P stycznej do krzywej C_1 w punkcie $\bar{p}$. Ponieważ prosta P leży w k-wymiarowej hiperpłaszczyźnie stycznej do płata P_k w punkcie $\bar{p}$, istnieją takie stałe b_j dla $j = 1,2,\ldots,k$, że

$$(8) \qquad a_i = \sum_{j=1}^{k} b_j \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right)_{(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k)}$$

oraz

$$(9) \qquad \sum_{j=1}^{k} \left(b_j\right)^2 > 0 ,$$

bowiem wektor $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jest niezerowy.

Spośród krzywych $u_j = u_j(t)$ łączących punkty $(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k)$ i $(\bar{\bar{u}}_1, \ldots, \bar{\bar{u}}_k)$ i spełniających warunki sformułowane powyżej wybierzmy taką, dla której

$$\left(\frac{d\, u_j(t)}{dt}\right)_{t=\alpha} = b_j \quad {}^{*/}$$

i przy jej pomocy przez równania (7) utwórzmy krzywą C_2. Krzywa C_2, poza warunkami a), b) i c) spełnia więc jeszcze warunek

d) styczna do niej w punkcie $\bar{p}$ pokrywa się z prostą P.

Krzywa C, będąca sumą mnogościową krzywych C_1 i C_2 leży na płacie P_k, jest klasy C^1, posiada styczną w każdym punkcie, nie jest w żadnym punkcie styczna do hiperpłaszczyzny $\tilde{H}_{k-1}$ i łączy punkt p_o z punktem $\bar{\bar{p}}$, któremu odpowiadają parametry $(\bar{\bar{u}}_1, \ldots, \bar{\bar{u}}_k)$. Ponieważ punkt $(\bar{\bar{u}}_1, \ldots, \bar{\bar{u}}_k)$ był dowolnym punktem otoczenia Δ, udowodniliśmy, że $\Delta \subset Z^*$, c.n.o.

Przejdę obecnie do przypadku 2), w którym punkt $\bar{p}$ leży na hiperpłaszczyźnie $\tilde{H}_{k-1}$. Na podstawie założenia (3), zgodnie z (4), macierz

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right) \quad \begin{matrix} i = 1, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, k \end{matrix}$$

jest w punkcie $(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k)$ rzędu k. Załóżmy, że różny od zera w punkcie $(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k)$ wyznacznik stopnia k wy-

---

*/ Tu i dalej pochodne obliczane w punkcie α są pochodnymi prawostronnymi.

jęty z tej macierzy, utworzony jest z jej k pierwszych kolumn /w pozostałych przypadkach dowód przebiega analogicznie/ i oznaczmy go przez $w(u_1, u_2, \ldots, u_k)$. Zgodnie z założeniem (2) wyznacznik w jest funkcją ciągłą w obszarze G, a stąd istnieje takie otoczenie Δ punktu $(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k)$, że $w(u_1, \ldots, u_k) \neq 0$ w Δ. Stąd dla $(u_1, \ldots, u_k)$ należącego do Δ możemy jednoznacznie ze względu na zmienne $u_1, \ldots, u_k$ rozwikłać układ równań

(10) $$x_i = f_i(u_1, \ldots, u_k) \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

otrzymując

(11) $$u_i = f_i^{-1}(x_1, \ldots, x_k),$$

przy czym obraz Δ^* otoczenia Δ przez przekształcenie (10) jest obszarem, funkcje f_i^{-1} są w Δ^* klasy C^1 oraz ich jakobian jest w Δ^* różny od zera. Punkt $\bar{p}^*$ o współrzędnych $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k$ należy do obszaru Δ^*, istnieje więc takie otoczenie kuliste $\bar{\Delta}$ tego punktu, które zawiera się w Δ^*. Oznaczmy przez $\bar{\Delta}^*$ obraz otoczenia $\bar{\Delta}$ przez przekształcenie (11). Ponieważ przekształcenie (11) jest homeomorfizmem w Δ^*, a więc i w $\bar{\Delta}$, zbiór $\bar{\Delta}^*$ jest otwarty i ponadto punkt $(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k) \in \bar{\Delta}^*$, a więc $\bar{\Delta}^*$ jest pewnym /na ogół nie kulistym/ otoczeniem punktu $(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k)$. Niech $(\bar{\bar{u}}_1, \ldots, \bar{\bar{u}}_k)$ będzie dowolnym punktem otoczenia $\bar{\Delta}^*$. Oznaczmy przez $\bar{\bar{p}}^*$ punkt przestrzeni $x_1, \ldots, x_k$ o współrzędnych $\bar{\bar{x}}_i \overset{df}{=} f_i(\bar{\bar{u}}_1, \ldots, \bar{\bar{u}}_k)$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Punkty $\bar{p}^*$ i $\bar{\bar{p}}^*$ należą do kulistego otoczenia $\bar{\Delta}$. Niech C_1; $a_1, \ldots, a_n$; P; $b_1, \ldots, b_k$ mają takie znaczenie jak w przypadku 1), rozpatrzonym poprzednio. Zauważmy, że

$$\sum_{j=1}^{k} (a_j)^2 > 0,$$

gdyby bowiem $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$, to wobec tego, że wyznacznik w jest w punkcie $(\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_k)$ różny od zera, otrzymalibyśmy ze związków (8)

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_k = 0 ,$$

co jest sprzeczne ze związkiem (9).

Istnieje więc krzywa C_2^*, o równaniach $x_j = x_j(t)$ dla $j = 1,2,\ldots,k$ oraz t z przedziału $[\alpha, \beta]$, w przestrzeni $x_1,\ldots,x_k$, o następujących własnościach

a) $x_j(\alpha) = \overline{x}_j$ oraz $x_j(\beta) = \overline{\overline{x}}_j$ dla $j = 1,2,\ldots, n$,

b) krzywa C_2^* zawiera się w $\overline{\Delta}$,

c) funkcje $x_j(t)$ są w przedziale $[\alpha, \beta]$ klasy C^1 oraz

$$\sum_{j=1}^{k} \left(\frac{dx_j(t)}{dt} \right)^2 > 0 \quad \text{w} \quad [\alpha, \beta] ,$$

d) $\left(\dfrac{dx_j(t)}{dt} \right)_{t=\alpha} = a_j$ dla $j = 1,2,\ldots, k$,

e) $\dfrac{dx_k(t)}{dt} \neq 0$ dla $t \in (\alpha, \beta]$.

Wobec tego, że przekształcenia (10) i (11) są względem siebie odwrotne, równania płata P_k, dla $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ należącego do $\overline{\Delta}$, mogą być przedstawione w postaci

$$(12) \begin{cases} x_j = x_j & \text{dla} \quad j = 1,2,\ldots, k , \\ x_j = f_j\left(f_1^{-1}(x_1,\ldots, x_k), f_2^{-1}(x_1,\ldots, x_k),\ldots, \right. \\ \qquad \left. \ldots, f_k^{-1}(x_1,\ldots, x_k)\right) \overset{\text{df}}{=} g_j(x_1,\ldots, x_k) \\ \text{dla} \quad j = k+1,\ldots, n. \end{cases}$$

Rozważmy krzywą C_2 w przestrzeni E_n o następujących równaniach

$x_j = x_j(t)$ dla $j = 1,2,\ldots, k$ i t z przedziału $[\alpha,\beta]$,

$x_j = g_j(x_1(t),\ldots,x_k(t))$ dla $j = k+1,\ldots, n$ i t z przedziału $[\alpha,\beta]$.

Z a) wynika, że krzywa C_2 łączy punkty $\bar{p}$ i $\bar{\bar{p}}$. Z b) i postaci równań krzywej C_2 wnioskujemy, że krzywa ta leży na płacie P_k. Na podstawie c), wobec założeń uczynionych o płacie P_k, krzywa C_2 jest klasy C^1 i posiada styczną w każdym punkcie. Ponieważ prosta P jest styczna do płata P_k w punkcie $\bar{p}$, więc uwzględniając fakt, że w pewnym otoczeniu punktu $\bar{p}$ płat P_k posiada równania postaci (12), wnioskujemy o istnieniu takiego układu stałych $b_1^*,\ldots,b_k^*$, że

$$a_j = \sum_{i=1}^{k} \delta_j^i \, b_i^* = b_j^* \qquad \text{dla} \quad j = 1,2,\ldots, k,$$

oraz

$$a_j = \sum_{l=1}^{k} \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_l}\right)_{(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_k)} b_l^*$$

dla $j = k+1,\ldots,n$.

Ze związków tych wynika, że

$$(13) \qquad a_j = \sum_{l=1}^{k} \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_l}\right)_{(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_k)} \cdot a_l \qquad \text{dla} \quad j = k+1,\ldots,n.$$

Wobec d) mamy

$$\left(\frac{dx_j(t)}{dt}\right)_{t=\alpha} = a_j \qquad \text{dla} \quad j = 1,2,\ldots,k,$$

a stąd oraz z (13) dla $j = k+1,\dots,n$:

$$\left(\frac{dx_j(t)}{dt}\right)_{t=\alpha} = \sum_{l=1}^{k}\left(\frac{\partial g_j}{\partial x_l}\right)_{(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_k)}\left(\frac{dx_l(t)}{dt}\right)_{t=\alpha} = a_j .$$

Prosta P jest więc styczna do krzywej C_2 w punkcie $\bar{p}$.

Z powyższego oraz z e), wobec tego, że w przypadku 2) prosta P nie może leżeć w hiperpłaszczyźnie H_{k-1}, a ta hiperpłaszczyzna rozpięta jest na wektorach o składowych (6), wnosimy, że krzywa C_2 nie jest w żadnym swym punkcie styczna do $\widetilde{H}_{k-1}$.

Rozważmy obecnie krzywą C będącą sumą mnogościową krzywych C_1 i C_2. Z przeprowadzonego rozumowania i założeń o krzywej C_1 wynika, że krzywa C leży na płacie P_k, jest klasy C^1, ma w każdym punkcie styczną, nie jest w żadnym punkcie styczna do hiperpłaszczyzny $\widetilde{H}_{k-1}$ i łączy na płacie punkt p_0 z punktem $\bar{\bar{p}}$. Ponieważ $\bar{\bar{p}}$ był punktem płata odpowiadającym punktowi $(\bar{\bar{u}}_1,\dots,\bar{\bar{u}}_k)$ obszaru G a punkt $(\bar{\bar{u}}_1,\dots,\bar{\bar{u}}_k)$ był dowolnym punktem otoczenia $\bar{\Delta}^*$ punktu $(\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_k)$, więc $\bar{\Delta}^* \subset Z^*$, c.n.o.

Każdy punkt zbioru Z^* należy więc do niego wraz z pewnym swoim otoczeniem, a stąd zbiór Z^* jest otwarty.

Analogicznie dowodzimy, że zbiór Z^* jest domknięty w G tzn., że jeżeli ciąg punktów p_n zbioru Z^* zmierza do pewnego punktu p zbioru G, to $p \in Z^*$ oraz, że zbiór Z^* nie jest pusty.

Ponieważ G jest z założenia obszarem, a więc zbiorem spójnym, a jedynymi podzbiorami zamknięto-otwartymi zbioru spójnego jest zbiór pusty i on sam, więc $Z^* = G$. Stąd w myśl określenia zbioru Z^* każdy punkt płata P_k da się na nim połączyć z punktem p_o krzywą klasy C^1, mającą styczną w każdym punkcie i nie będącą styczną w żadnym punkcie do hiperpłaszczyzny $\widetilde{H}_{k-1}$. Ponieważ punkt p_o był wybrany zupełnie dowolnie na płacie P_k, więc lemat został udowodniony.

Dowód twierdzenia 1.

Wybierzmy na płacie P_k dowolny punkt p_o nie leżący na hiperpłaszczyźnie $\overset{\circ}{H}_{k-1}$ i dobierzmy układ odniesienia tak, by

1) hiperpłaszczyzna $\overset{\circ}{H}_{k-1}$ była rozpięta na wektorach o współrzędnych (6),
2) punkt p_o miał wszystkie współrzędne od $k+1$- szej poczynając równe zeru.

Udowodnimy niewprost, że płat P_k leży w k-wymiarowej hiperpłaszczyźnie $\widetilde{H}_k$, wyznaczonej przez hiperpłaszczyznę $\overset{\circ}{H}_{k-1}$ i punkt p_o. Przypuśćmy więc, że istnieje taki punkt $\bar{p}$, iż $\bar{p} \in P_k$ i $\bar{p} \sim\in \widetilde{H}_k$. Oznaczmy przez $(\overset{\circ}{x}_1,\ldots,\overset{\circ}{x}_n)$ współrzędne punktu $\bar{p}$, a przez $(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$ współrzędne punktu $\bar{p}$. Zgodnie z poczynionymi założeniami

$$x_k \neq 0 \quad \text{i} \quad \overset{\circ}{x}_j = 0 \quad \text{dla} \quad j = k+1,\ldots,n\,, \quad \text{oraz} \tag{14}$$

$$\sum_{j=k+1}^{n} (\bar{x}_j)^2 > 0\,. \tag{15}$$

Na podstawie udowodnionego lematu istnieje taka krzywa C, leżąca na płacie, o równaniach

$$x_1 = \varphi_1(t),\; x_2 = \varphi_2(t),\ldots,\; x_n = \varphi_n(t)$$

takich, że funkcje $\varphi_i(t)$ są klasy C^1 w pewnym przedziale $[a,b]$, przy czym

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{d\varphi_j(t)}{dt}\right)^2 > 0 \quad w \quad [a,b],$$

która łączy punkty p_o i $\overline{p}$, a więc

(16) $\varphi_j(a) = \overset{o}{x}_j$ oraz $\varphi_j(b) = \overline{x}_j$ dla $j = 1,2,\ldots,n$

i która w żadnym punkcie nie jest styczna do hiperpłaszczyzny $\overset{o}{H}_{k-1}$, a więc

(17) $$\sum_{j=k}^{n} [\varphi_j(t)]^2 + \sum_{j=k}^{n} \left[\frac{d\varphi_j(t)}{dt}\right]^2 > 0$$ dla t z przedziału $[a,b]$.

Wektor o składowych $\frac{d\varphi_1(t)}{dt}, \frac{d\varphi_2(t)}{dt}, \ldots, \frac{d\varphi_n(t)}{dt}$ jako styczny do krzywej C , leżącej na płacie P_k , w punkcie $p(t)$ o współrzędnych $(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t))$, leży w k-wymiarowej hiperpłaszczyźnie $H_k(t)$, stycznej do płata P_k w punkcie $p(t)$. Ponieważ hiperpłaszczyzna $H_k(t)$, zgodnie z założeniem (5), przechodzi przez hiperpłaszczyznę $\overset{o}{H}_{k-1}$, na której leży początek układu odniesienia, więc wektory o składowych (6), na których rozpięta jest hiperpłaszczyzna $\overset{o}{H}_{k-1}$, wektor o składowych $(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t))$ i wektor o składowych $\frac{d\varphi_1(t)}{dt},\ldots,\frac{d\varphi_n(t)}{dt}$ leżą wszystkie w hiperpłaszczyźnie $H_k(t)$, są więc liniowo zależne. Stąd rząd macierzy ich współczynników jest niewiększy od k . Z postaci tej macierzy wynika, że macierz

$$\begin{pmatrix} \varphi_k(t), & \varphi_{k+1}(t),\ldots, & \varphi_n(t) \\ \frac{d\varphi_k(t)}{dt}, & \frac{d\varphi_{k+1}(t)}{dt},\ldots, & \frac{d\varphi_n(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

musi być rzędu mniejszego niż 2, a więc na podstawie (17) musi być rzędu dokładnie 1 w całym przedziale $[a,b]$. Na podstawie twierdzenia następującego

Jeżeli funkcje $f_1(x),\dots, f_n(x)$ są klasy C^k w przedziale $[a,b]$ (k liczba naturalna, $1 \leq k \leq n-1$) i rząd macierzy

$$\left(\frac{d^{(v)} f_\alpha(x)}{dx^v}\right)_{\substack{v=0,1,\dots,k\\ \alpha=1,2,\dots,n}} \qquad \left(\frac{d^{(0)} f_\alpha(x)}{dx^0} \overset{\mathrm{df}}{=} f_\alpha(x)\right)$$

w każdym punkcie przedziału $[a,b]$ wynosi p, gdzie p jest liczbą naturalną mniejszą od n i od $k+1$, to układ funkcji $f_1,\dots,f_n$ jest liniowo zależny w stopniu $n-p$ w przedziale $[a,b]$, tzn. istnieją stałe D^α_μ takie, że

$$\sum_{\alpha=1}^{n} D^\alpha_\mu f_\alpha(x) \equiv 0 \quad \text{w } [a,b] \quad \text{dla } \mu = 1,2,\dots,n-p$$

oraz rząd macierzy $\left(D^\alpha_\mu\right)_{\substack{\alpha=1,\dots,n\\ \mu=1,\dots,n-p}}$ równy jest $n-p$,

udowodnionego przeze mnie w pracy [2], wnioskujemy więc, że istnieją takie stałe D^v_μ, że

(18) $$\sum_{v=k}^{n} D^v_\mu \varphi_v(t) \equiv 0 \quad \text{w } [a,b] \text{ dla } \mu = 1,2,\dots, n-k,$$

oraz

(19) rząd macierzy $\left(D^v_\mu\right)$ wynosi $n-k$.

Połóżmy w związkach (18) $t=a$. Uwzględniając (16) i (14) otrzymujemy

$$D^k_\mu = 0 \qquad \text{dla} \quad \mu = 1,2,\dots,n-k,$$

a więc związki (18) przyjmują postać

$$\sum_{v=k+1}^{n} D_{\mu}^{v} \varphi_{v}(t) \equiv 0 \text{ w } [a,b] \quad \text{dla } \mu = 1,2,\ldots, n-k .$$

Dla każdego t z przedziału $[a,b]$ wartości funkcji $\varphi_{k+1}(t),\ldots,\varphi_{n}(t)$ stanowią więc rozwiązanie układu $n-k$ równań o $n-k$ niewiadomych o wyznaczniku współczynników, wobec (19), różnym od zera. Wynika stąd, że $\varphi_v(t) \equiv 0$ w $[a,b]$ dla $v = k+1,\ldots, n$, a więc w szczególności

$$\varphi_v(b) = 0 \qquad \text{dla} \quad v = k+1,\ldots, n ,$$

co jest sprzeczne, wobec (16), z (15). Otrzymana sprzeczność kończy dowód twierdzenia.

Nietrudno zauważyć, że twierdzenie w pewnym sensie odwrotne do udowodnionego jest też prawdziwe:

Jeżeli hiperpłat P_k o równaniach (1) spełniających warunki (2) i (3) leży na pewnej hiperpłaszczyźnie k-wymiarowej H_k, to wszystkie hiperpłaszczyzny k-wymiarowe styczne do płata P_k pokrywają się z H_k, a więc zachodzi (5), tzn. istnieje taka hiperpłaszczyzna $\overset{o}{H}_{k-1}$, przez którą przechodzą te hiperpłaszczyzny styczne.

Twierdzenie 1 przestaje być prawdziwe, jeżeli w jego założeniu (5) obniżymy, choćby tylko o jeden, wymiar hiperpłaszczyzny $\overset{o}{H}_{k-1}$ wspólnej wszystkim k-wymiarowym hiperpłaszczyznom stycznym do płata P_k.

Wskazuje na to przykład hiperpłata P_k o równaniach

$$
(20) \qquad \begin{cases} x_j = u_j & \text{dla} \quad j = 1,2,\dots,k-2, \\ x_{k-1} = u_{k-1} \sin u_k, & \\ x_k = u_{k-1} \cos u_k , & \\ x_{k+1} = u_{k-1} & \\ x_j = 0 & \text{dla} \quad j = k+1,\dots, n. \end{cases}
$$

gdzie

$$
(21) \qquad \begin{cases} u_j \in (-\infty, +\infty) \quad \text{dla} \quad j=1,2,\dots,n \text{ oraz } j \neq k-1 \\ u_{k-1} \in (0, +\infty) \end{cases}
$$

Widoczne jest, że prawe strony równań (20) są funkcjami klasy C^1 w obszarze (21), a więc założenie (2) jest spełnione. Utwórzmy dla płata (20) macierz

$$
\left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,k}} :
$$

$$
(22) \qquad \begin{pmatrix} 1 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 1 & & & \\ & 0 & & \sin u_k, & \cos u_k, & 1, 0,\dots,0 \\ & & & u_{k-1} \cos u_k, & -u_{k-1} \sin u_k, & 0,0,\dots,0 \end{pmatrix}
$$

Wyznacznik stopnia k utworzony z elementów k pierwszych kolumn tej macierzy równy jest $-u_{k-1}$, jest więc w każdym punkcie obszaru (21), różny od zera, a stąd macierz ta jest w każdym punkcie obszaru (21) rzędu k. Założenie (3) jest więc też spełnione.

Hiperpłaszczyzna k-wymiarowa $H_k(u_1,\dots,u_k)$ styczna do płata (20) w punkcie, któremu odpowiadają parametry $u_1,\dots,u_k$, ma równania postaci

$$(23)\quad \begin{cases} x_j = u_j + v_j & \text{dla} \quad j = 1,2,\dots, k-2 , \\ x_{k-1} = u_{k-1}\sin u_k + v_{k-1}\sin u_k + u_{k-1} v_k \cos u_k , & \\ x_k = u_{k-1}\cos u_k + v_{k-1}\cos u_k - u_{k-1} v_k \sin u_k , & \\ x_{k+1} = u_{k-1} + v_{k-1} , & \\ x_j = 0 & \text{dla} \quad j = k+2,\dots, n , \end{cases}$$

gdzie $v_1,\dots,v_k$ są parametrami na tej hiperpłaszczyźnie.

Podstawiając do równań (23) $v_j = -u_j$ dla $j=1,2,\dots,k-1$ oraz $v_k = 0$ otrzymujemy $x_j = 0$ dla $j = 1,2,\dots, n$, a stąd wnioskujemy, że punkt p_0 o współrzędnych $(0,\dots,0)$ leży na hiperpłaszczyźnie $H_k(u_1,\dots,u_n)$ dla każdego układu $u_1,u_2,\dots,u_k$. Podstawiając do równań (23) $v_1 = 1-u_1$, $v_j = u_j$ dla $j = 2,\dots,k-1$, $v_k = 0$ otrzymujemy $x_1 = 1$, $x_j = 0$ dla $j = 2,\dots, n$, a więc punkt p_1 o współrzędnych $(1,0,\dots,0)$ leży na hiperpłaszczyźnie $H_k(u_1,\dots,u_k)$. Podobnie dowodzimy, że punkty $p_2,\dots,p_{k-2}$ o współrzędnych $\delta_j^1, \delta_j^2,\dots,\delta_j^n$ dla $j = 2,\dots, k-2$ leżą na każdej hiperpłaszczyźnie $H_k(u_1,\dots,u_k)$. Wszystkie hiperpłaszczyzny styczne do płata (20) przechodzą więc przez hiperpłaszczyznę $\mathring{H}_{k-2}$ rozpiętą na punktach $p_0, p_1,\dots, p_{k-2}$, a ponieważ punkty $p_0, p_1,\dots, p_{k-2}$ są liniowo niezależne (zob. [1] str.49), więc hiperpłaszczyzna $\mathring{H}_{k-2}$ ma wymiar k-2.

Przypuśćmy obecnie, że płat (20) leży w hiperpłaszczyźnie k-wymiarowej $\tilde{H}_k$. Wtedy wszystkie hiperpłaszczyzny k-wymiarowe styczne do niego muszą pokrywać się z hiperpłaszczyzną $\widetilde{H}_k$. Stąd w szczególności wynika, że dowolny wektor leżący w hiperpłaszczyźnie stycznej do płata w dowolnym punkcie tworzy z układem wektorów, na których rozpięta jest hiperpłaszczyzna styczna w dowolnym punkcie q płata, układ k + 1 wektorów liniowo zależnych.

Rozważmy układ k + 1 wektorów U składający się z

1) k wektorów, których współrzędne podane są przez wiersze macierzy (22) dla $u_{k-1} = 1$ oraz $u_k = \frac{\pi}{2}$, a więc wektorów, na których rozpięta jest hiperpłaszczyzna styczna do płata (20) w punkcie o parametrach np. $u_j = 0$ dla $j = 1, 2, \ldots, k-2$, $u_{k-1} = 1$, $u_k = \frac{\pi}{2}$,
2) wektora, którego współrzędne podane są przez ostatni wiersz macierzy (22) dla $u_{k-1} = 1$ oraz $u_k = 0$, a więc wektora, który leży w hiperpłaszczyźnie stycznej do płata (20) w punkcie o parametrach np. $u_j = 0$ dla $j = 1, 2, \ldots, k-2$, $u_{k-1} = 1$, $u_k = 0$.

Z przypuszczenia, że płat (20) leży w k-wymiarowej hiperpłaszczyźnie wynika, że układ U winien być układem wektorów liniowo zależnych, co jest sprzeczne z tym, że macierz jego współczynników jest rzędu k+1, bowiem - jak łatwo stwierdzamy przez wypisanie tej macierzy - wyznacznik wyjęty z k+1 pierwszych jej kolumn jest różny od zera. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że płat (20) nie leży w hiperpłaszczyźnie k-wymiarowej, co mieliśmy wykazać.

Udowodnimy jeszcze następujące

Twierdzenie 2

Jeżeli płat P_k o równaniach (1) spełnia założenia (2) i (3) oraz założenie

(24) wszystkie hiperpłaszczyzny k-wymiarowe styczne do niego są do siebie równoległe, tzn. istnieje k-wymiarowa hiperpłaszczyzna $\overset{o}{H}_k$ równoległa do wszystkich tych hiperpłaszczyzn,

to płat P_k leży w pewnej hiperpłaszczyźnie k- wymiarowej.

Dowód

Niech p_o będzie dowolnym punktem płata P_k. Dobierzmy układ odniesienia tak, by punkt p_o miał współrzędne $(0,\dots,0)$ i by hiperpłaszczyzna $\widetilde{H}_k$, przechodząca przez punkt p_o i rozpięta na wektorach o współrzędnych

(25) $$\delta_j^1, \delta_j^2, \dots, \delta_j^n \qquad \text{dla} \quad j = 1,2,\dots, k,$$

była równoległa do hiperpłaszczyzny $\overset{o}{H}_k$. Udowodnimy, że płat P_k leży w hiperpłaszczyźnie $\widetilde{H}_k$. Niech punkt $\bar{p}$ będzie dowolnym punktem płata i przez $(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)$ oznaczmy jego współrzędne. Z udowodnionego lematu wynika, że istnieje krzywa C, klasy C^1, leżąca na płacie P_k i łącząca punkt p_o z punktem $\bar{p}$. Niech równania krzywej C będą postaci $x_j = \varphi_j(t)$ dla t z przedziału $[\alpha,\beta]$, gdzie

(26) $$\varphi_j(\alpha) = 0 \quad \text{oraz} \quad \varphi_j(\beta) = \bar{x}_j \quad \text{dla} \quad j=1,2,\dots,n$$

Wektor o współrzędnych $\frac{d\varphi_1(t)}{dt}, \dots, \frac{d\varphi_n(t)}{dt}$ styczny do krzywej C w punkcie $p(t)$ o parametrze t, leży w hiperpłaszczyźnie stycznej do płata P_k w punkcie $p(t)$, a więc jest równoległy do hiperpłaszczyzny $\widetilde{H}_k$. Wektor ten tworzy więc z wektorem o współrzędnych (25) układ liniowo zależny, a stąd

$$\frac{d\varphi_j(t)}{dt} \equiv 0 \quad \text{dla} \quad t \text{ z } [\alpha,\beta] \text{ oraz } j=k+1,\dots,n.$$

Funkcje $\varphi_j(t)$ dla $j = k+1,\dots,n$ są więc stałe w przedziale $[\alpha,\beta]$, a stąd na podstawie (26) mamy

$$\overline{x}_j = \varphi_j(\beta) = \varphi_j(\alpha) = 0 \quad \text{dla} \quad j = k+1-\dots, n.$$

Punkt $\overline{p}$ leży więc w hiperpłaszczyźnie $\widetilde{H}_k$, a ponieważ był dowolnym punktem płata P_k, mamy $P_k \subset \widetilde{H}_k$, c.n.o.

I tu odwrócenie twierdzenia 2 jest oczywiście prawdziwe.

Jeżeli płat P_k, spełniający założenia (2) i (3), leży w hiperpłaszczyźnie k-wymiarowej, to zachodzi (24).

Zauważmy, że twierdzenie 2 przestaje być prawdziwe, jeżeli w założeniu (24) hiperpłaszczyznę k-wymiarową zastąpimy hiperpłaszczyzną o niższym wymiarze. W przypadku $n = 3$, $k = 2$ wskazuje na to przykład walca obrotowego, a dla n i k dowolnego przykład powierzchni danej następującymi równaniami

$$(27) \qquad \begin{cases} x_j = u_j & \text{dla} \quad j = 1,2,\dots, k-1, \\ x_k = \cos u_k, & \\ x_{k+1} = \sin u_k, & \\ x_j = 0 & \text{dla} \quad j = k+2,\dots, n, \end{cases}$$

dla u_j z przedziału $(-\infty, +\infty)$ przy $j = 1,2,\dots, k-1$ oraz u_k z przedziału $(0,\pi)$.

Łatwo stwierdzamy, podobnie jak w przykładzie po twierdzeniu 1, że

1) płat (27) czyni zadość założeniom (2) i (3),
2) płat ten nie leży w hiperpłaszczyźnie k-wymiarowej,
3) hiperpłaszczyzna k-1-wymiarowa, rozpięta na k-1 pier-

wszych wektorach jednostkowych układu, jest równoległa do wszystkich hiperpłaszczyzn stycznych do płata (27).

PRACE CYTOWANE

[1] K.BORSUK, Geometria analityczna w n-wymiarach, Monografie Matematyczne, Tom XII, 1950.

[2] Z.MOSZNER, Sur le wronskien et la dépendance linéaire des fonctions, Bull.Sc.math., t.85 /1961/, str. 165-190.

[3] Z.MOSZNER, Les propriétés glebales des courbes dans l'espace euclidien n-dimensionnel dont les hyperplans osculateurs ou les hypersphères osculateurs remplissent certaines conditions, Zeszyty Naukowe AGH, Rozprawy z.9, 1962, str.46.

RÉSUMÉ

Sur les surfaces k-dimensionnelles dont les hyperplans tangents appartiennent à un faisceau

On démontre dans cette note que si tous les hyperplans tangents k-dimensionnels d'une surface k-dimensionnelle suffisamment régulière dans l'espace euclidien à n dimensions appartiennent à un faisceau, dans ce cas cette surface est située sur un hyperplan à k dimensions.

On montre aussi /au moyen des exemples/ que ce théorème cesse d'être vrai si l'on suppose que les hyperplans tangents à k-1 dimensions.

Резюме

О к-мерных поверхностях, касательные гиперплоскости которых принадлежат одному пучку.

В работе доказывается, что если все к-мерные гиперплоскости касательные к достаточно регулярной к-мерной поверхности в n-мерной евклидовом пространстве принадлежат к одному пучку, то эта поверхность лежит на некоторой к-мерной гиперплоскости.

Примеры поданные в работе доказывают, что вышеуказанная теорема перестаёт быть истинной, если в ней к-мерные касательные гиперплоскостии заменить / к-1 /- мерными касательными гиперплоскостями.