Zofia Strzelecka

O PRACACH MAGISTERSKICH WYKONANYCH W KATEDRZE GEOMETRII WSP W KRAKOWIE

W latach 1958-1963 wykonano w Katedrze Geometrii WSP w Krakowie, pod kierunkiem doc.dr KRYSTYNY TRYUK 25 prac magisterskich z geometrii różniczkowej. Przygotowanie studentów do podjęcia pracy magisterskiej nie było jednakowe. W okresie pięciu lat siatka zmieniła się w sposób zasadniczy. Uczelnia przeszła bowiem ze studiów czteroletnich na pięcioletnie. Początkowo studenci wykonywali prace w czasie rocznego seminarium magisterskiego, dziś, zanim staną się uczetnikami seminarium magisterskiego /które trwa trzy semestry/ słuchają semestrowego wykładu specjalnego z ćwiczeniami, a następnie zdają kolokwium fakultatywne.

Od roku 1959 uczestniczę w seminarium , prowadzę konsultacje, a ostatnio ćwiczenia do wykładu specjalnego. Mogłam więc dobrze zaobserwować trudności, jakie napotykali magistranci i ich początkową nieporadność przy podejmowaniu pracy. Podkreślić należy, że wszyscy uczestnicy seminarium napisali prace magisterskie i złożyli z wynikiem pozytywnym egzamin magisterski.

Przejdę teraz do szczegółowej analizy prac magisterskich. Pewien procent prac magisterskich poświęcony jest krzywym położonym na powierzchniach i odwzorowaniom powierzchni.

Ciekawa w tej grupie jest praca zatytułowana "Powierzchnie, których geodetyki i tylko geodetyki spełniają warunek W". Warunek W opiewa: Normalne do powierzchni poprowadzone wzdłuż krzywej leżącej na powierzchni są równoległe do stałej płaszczyzny. Praca napisana jest bardzo przejrzyście i zwięźle /tylko 14 stron/. Autor cytuje kilka definicji i twierdzeń, zaczerpniętych z literatury /podkreślić należy intucję autora, która pozwoliła mu z wielkiego bogactwa twierdzeń geometrii różniczkowej wybrać te, które doprowadziły go szybko do wyniku/. Odpowiedź na postawione zagadnienie formułuje w postaci dwu twierdzeń.

<u>Twierdzenie 1</u>

Jeżeli 1/ powierzchnia jest klasy C^3,

2/ posiada krzywiznę GAUSSA różną od zera w każdym punkcie,

3/ zbiór geodetyk pokrywa się ze zbiorem krzywych leżących na powierzchni i spełniających warunek W,

to powierzchnia ta jest sferą.

<u>Twierdzenie 2</u>

Żadna powierzchnia rozwijalna nie spełnia założenia 3/ twierdzenia 1.

Praca ta po pewnych przeróbkach i uzupełnieniach została wydrukowana w Annales Polon. Math. [6].

Na specjalną uwagę zasługuje praca dotycząca odwzorowań sferyczno konforemnych. Autor podaje warunki konieczne lub dostateczne na to, by odwzorowanie konforemne było

sferyczne lub też sferyczne konforemnym. Formułuje i dowodzi np. twierdzenia:
Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by odwzorowanie sferyczne powierzchni regularnej klasy C^3 nierozwijalnej było jednocześnie konforemnym jest aby zachodziło jedno z dwojga: powierzchnia była minimalna, albo powierzchnia była sferą.
Dowody podanych przez autora twierdzeń są oryginalne i samodzielne. Ciekawe są zastosowania. Autor podaje przykłady: zamiast szukać funkcji odwzorowujących konforemnie powierzchnię nierozwijalną poprzez rozwiązywanie układów równań różniczkowych, można /ze względu na prostotę rachunków/ w oparciu o uzyskane twierdzenie stosować odwzorowanie sferyczne, które jest konforemne.

W pozostałych pracach tej grupy dowody uzyskiwanych twierdzeń mają charakter czysto rachunkowy. Wyniki tych prac są następujące:

a/ Otrzymano równania geodetyk na pseudosferze, na kwadrykach, na powierzchniach rozwijalnych i prostokreślnych; badano własności tych geodetyk, np. czy przez różne rodzaje odwzorowań powierzchni geodetyki przejdą w geodetyki.

b/ Uzyskano równania linii krzywiznowych na powierzchniach prostokreślnych.

c/ Wyprowadzono równania loksodrom, wzory na ich krzywizny, rozpatrywano np. zagadnienie, kiedy loksodroma jest jednocześnie linią asymptotyczną, geodezyjną bądź krzywiznową. Wykazano, że loksodroma na stożku jest linią krzywiznową.

d/ Podano wzory na krzywiznę GAUSSA i krzywiznę średnią powierzchni prostokreślnych, wykazano twierdzenie, że krzywizna GAUSSA dla tych powierzchni jest niedodatnia, badano zmianę krzywizn powierzchni przy odwzorowaniu konforemnym /krzywizna powierzchni po odwzorowaniu jako funkcja krzywizny powierzchni przed odwzorowaniem i funkcji odwzorowujących/. Podobne badania wykonano dla odwzorowania sferycznego.

Z pracami dotyczącymi odwzorowań łączy się tematycznie praca zatytułowana: "Całkowity błąd mapy przy zniekształceniach długości pól i kątów". Jest to praca bardzo obszerna - dowody na ogół są cytowane z podręczników kartografii i geometrii różniczkowej. Stanowi ona całościowe opracowanie zagadnienia i może być użyteczna dla geodetów i nauczycieli geografii /należy dodać, że drugim recenzentem pracy był geodeta/.

Do drugiej grupy zaliczę prace z teorii krzywych. Jedna z nich bada krawędź zwrotu jednoparametrowej rodziny płaszczyzn. W pracy rozpatrywano rodziny płaszczyzn trójścianów FRENETA i BONNETA.

Dwie prace poświęcone są kuli i kołu ściśle stycznemu. W jednej z nich autor otrzymuje prosty związek między krzywizną i torsją krzywej a krzywizną i torsją krzywej środków kul ściśle stycznych: $\frac{\varkappa^*}{\tau^*} = \pm \frac{\tau}{\varkappa}$

$\varkappa, \tau$ krzywizna i torsja krzywej

$\varkappa^*, \tau^*$ krzywizna i torsja krzywej środków

Znany ten związek można znaleźć np. u RASZEWSKIEGO [4] ale autor otrzymał go na innej drodze. Ponadto w pracach tych znajdują się wzory na krzywiznę i torsję krzywej środków kół ściśle stycznych dowolnej dostatecznie regularnej krzywej przestrzennej oraz równania linii asymptotycznej i geodezyjnej. Prócz tego są tam związki między krzywiznami i torsjami dwóch krzywych, o których wiadomo, że jedna dla drugiej jest krzywą środków kul ściśle stycznych:

$$\varkappa_1 = \varkappa_2 = \text{const}, \qquad \varkappa_1^2 = \tau_1 \cdot \tau_2$$

gdzie $\varkappa_i$ τ_i to krzywizna i torsja i-tej krzywej /i = 1,2/. Dwie studentki zajęły się ewolutami i ewolwentami krzywych płaskich i przestrzennych. Po dość elementarnych rachunkach otrzymały związki między krzywiznami krzywej, jej ewoluty i drugiej ewoluty /ewoluta ewoluty/, podobnie dla ewolwent.

Następną grupę stanowią prace z teorii powierzchni. W pracy traktującej o powierzchniach obrotowych o stałej różnej od zera krzywiźnie GAUSSA wyprowadzono równanie południka tej powierzchni /dla powierzchni danej równaniem uwikłanym/, efektywnie rozwiązano równania geodetyk, a równania linii asymptotycznych doprowadzono do całek eliptycznych. Praca ta ma charakter kompilacyjny - oparta jest na bogatej różnojęzycznej literaturze. Z ciekawszych pozycji należy wyliczyć: EISENHARTA, [3] , BIANCHIEGO, [1] , SCHILLINGA [5] i BIEBERBACHA [2]. Inna praca tego działu dotyczyła powierzchni mających stałą różną od zera krzywiznę średnią. Wyprowadzono tu między innymi równanie południka dla powierzchni obrotowych /zadanych równaniem uwikłanym/ o stałej różnej od zera krzywiźnie średniej.

Dalsza praca zajmuje się cylindroidami czyli powierzchniami CATALANA. Autorka wyprowadza równanie tej powierzchni a następnie podaje warunek konieczny i wystarczający na to, by powierzchnia

$$\bar{r} = \bar{a}(u) + v\,\bar{c}(u); \qquad u, v \quad \text{parametry}$$

była cylindroidem. Autorka podaje również wzory na krzywiznę GAUSSA i krzywiznę średnią cylindroidów.

Charakter czysto rachunkowy ma praca dotycząca równań CODAZZIEGO. Autorka uzyskała tu wzory na krzywiznę GAUSSA jako funkcję symboli CHRISTOFFEL'a, oraz pewne związki między tymi symbolami.

Do osobnej grupy zaliczę pracę zatytułowaną "Równoległe przeniesienie wektorów w sensie LEVI-CIVITA". Jest to praca o charakterze kompilacyjnym - od autora pochodzą pewne szczegóły rachunkowe. Wartość pracy polega na zebraniu i usystematyzowaniu w taki sposób materiału znajdującego się w literaturze, dotyczącego równoległego przeniesienia wektorów na powierzchni dwuwymiarowej, że praca ta tworzy "zgrabną całość".

Specjalnie interesujące są dwie prace wykonane ostatnio w Katedrze . Dotyczą one krzywych w układach pseudo-frenetowskich. Oznaczmy przez $v_2^{(0)}$ wektor normalny główny krzywej. P-tym układem pseudo-frenetowskim nazywamy układ trzech wektorów:

$$v_1^{(p)}\ ,\ v_2^{(p)}\ ,\ v_3^{(p)}\qquad p = 1,2,\dots$$

gdzie

$$v_1^{(p)} = v_2^{(p-1)};\ v_2^{(p)} = \frac{\frac{d}{ds}v_1^{(p)}}{\left|\frac{d}{ds}v_1^{(p)}\right|};\ v_3^{(p)} = v_1^{(p)} \times v_2^{(p)}$$

Współczynniki rozkładu pochodnych wektorów $v_1^{(p)}$, $v_2^{(p)}$, $v_3^{(p)}$ na kierunki tych wektorów nazywamy krzywiznami p-tego rodzaju. /wg tych oznaczeń krzywizny frenetowskie są zerowego rodzaju/. Ponieważ torsja p-tego rodzaju wyraża się wzorem

$$\tau_p = \frac{\varkappa_{p-1}^2}{\varkappa_{p-1}^2 + \tau_{p-1}^2} \frac{d}{ds}\left(\frac{\tau_{p-1}}{\varkappa_{p-1}}\right)$$

więc dla p = 1 torsja zeruje się nie tylko dla krzywych płaskich, ale i dla linii śrubowych. Stąd wynika możliwość nowej klasyfikacji krzywych i wprowadzenia przez analogię linii śrubowych p-tego rodzaju, tj. takich, że $\frac{\tau_p}{\varkappa_p} = \text{const}$. Ciekawe są interpretacje geometryczne np. pseudo-krzywizny i pseudo-torsji:

$$\varkappa_1 = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s}$$

s - długość łuku krzywej

φ - kąt między wektorami normalnymi głównymi

lub

$$\varkappa_1 = \frac{dt}{ds}$$

gdzie t oznacza długość łuku sferycznej indykatrysy normalnych głównych

$$\tau_1 = \frac{d\delta}{ds}$$

δ - Kąt między wektorem binormalnym a wektorem $v_3^{(1)}$

lub

$$\tau_1 = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \psi}{\Delta s}$$

ψ - kąt między wektorami $v_3^{(1)}$

Uzyskano tu wiele ciekawych twierdzeń, między innymi twierdzenie: Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by krzywa była linią śrubową k-tego rodzaju jest by istniał kierunek tworzący stały kąt z pierwszym wektorem k-tego układu pseudo-frenetowskiego. Specjalny rozdział poświęcony jest poszukiwaniom krzywej, dla której w każdym punkcie układ frenetowski pokrywa się z p-tym /dla pewnego p/ układem pseudo-frenetowskim. Wiele miejsca poświęcono pseudo-naturalnym równaniom krzywej.

Jak stąd widać, wszystkie wykonane w Katedrze prace dotyczą zagadnień klasycznej geometrii różniczkowej, bez prób osłabiania założeń regularności krzywych i powierzchni. Wachlarz rozpatrywanych zagadnień jest dość duży. Wyniki podane w pracach /z małymi wyjątkami/ jakkolwiek znane w literaturze, otrzymywane były przez magistrantów na własnej drodze.

PRACE CYTOWANE

[1] L.BIANCHI, Lezioni di Geometria differenziale, t.I, Pisa 1922.

[2] L.BIEBERBACH, Differentialgeometrie, Leipzig - Berlin, 1932.

[3] L.P.EISENHART, An Introduction to Differential Geometry, London, 1947.

[4] П.К.Рашевский, Курс дифференциальной геометрии, Москва, 1939.

[5] F.SCHILLING, Die Pseudosphare und nichteuklidische Geometrie, Berlin - Leipzig, 1931.

[6] J.WITKOWSKI, On a characterization of the Euclidean sphere, Annales Polon.Math. XIII /1963/, str.121-127.

RÉSUMÉ

Les travaux des licenciés realisés dans la Chaire de la Géométrie d'École Supérieure Pédagogique à Cracovie.

Dans cet article on a présenté les résultats des plus interéssants travaux des licenciés, concernant la géometrie différentielle, réalisés dans la Chaire de la Géometrie d'École Supérieure Pédagogique à Cracovie en 1958 - 63. Un de ces travaux /un peu modifie/ fut publié [6].

Tous ces travaux concernent la géometrie différentielle classique. Ils appartiennent aux différentes divisions: à la théorie des courbes, des surfaces et des courbes sur les surfaces. Les résultats de ces travaux /avec quelques exceptions/ bien que connus dans la littérature, sont obtenus par les étudiants l'aide de leurs propres méthodes.

Резюме

О магистерских работах выполненых на Кафедре Геометрии Педагогического института в Кракове.

В данной работе представлены наиболее интересные выводы из магистерских работ по дифференциальной геометрии, выполненных на Кафедре геометрии Педагогического института в Кракове за годы 1958-63. Одна из этих работ / после переработки дополнений/ была напечатана [6].

Все работы относятся к классической дифференциальной геометрии.
В них разрабатываются проблемы, связанные с теорией кривых, теорией поверхности, а также теорией кривых, расположенных на поверхности.
За небольшими исключениями результаты студенческих работ известны в литературе, однако студенты пришли к ним, применяя собственные методы.