Stefan Topa

PEWNA NOWA METODA ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ FUNKCYJNYCH UOGÓLNIONEJ FUNKCJI PSEUDO-JEDNORODNEJ I FUNKCJI PRAWIE-JEDNORODNEJ WPROWADZONYCH PRZEZ V.ALACI'ego

Wstęp.

Pojęcie funkcji jednorodnej, wprowadzone przez L.EULERA /1755, 1768, 1770/, a następnie rozwijane przez C.HALPHENA /1911/ [1] oraz A.FAVRE'a /1917/ [2], stało się przedmiotem szeregu prac V.ALACI'ego /1923,1943,1950,1952,1955/ [3].

Dotychczasowy rozwój tego pojęcia można przedstawić następująco. Mamy najpierw funkcje jednorodne, które istniały przed V.ALACI'm, noszące nazwę klasycznych funkcji jednorodnych. Są nimi: 1/ klasyczna funkcja jednorodna, 2/ klasyczna funkcja pozytywnie jednorodna, 3/ klasyczna funkcja pozytywnie jednorodna rzędu μ. Klasyczne funkcje jednorodne uogólnił V.ALACI wprowadzając tak zwane 4/ funkcje pseudo-jednorodne, 5/ uogólnione funkcje pseudo-jednorodne oraz 6/ funkcje prawie-jednorodne.

Przytoczymy definicje wymienionych pojęć /podajemy sformułowanie od razu dla n zmiennych niezależnych/.x/

Definicja 1. Funkcję $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ nazywamy klasyczną

---

x/ Będziemy mówić jedynie o funkcjach rzeczywistych zmiennych rzeczywistych.

funkcją jednorodną, jeśli spełnia ona równanie funkcyjne

(1) $$\varphi(tx_1,\ldots,tx_n) = t\,\varphi(x_1,\ldots,x_n)$$

dla wszelkich $x = (x_1,\ldots,x_n)$ i t.

Definicja 2. Funkcję $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ nazywamy klasyczną funkcją pozytywnie jednorodną, jeśli spełnia ona równanie funkcyjne (1) dla wszelkich x oraz $t > 0$.

Definicja 3. Funkcję $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ nazywamy klasyczną funkcją pozytywnie jednorodną rzędu μ, jeśli spełnia ona równanie funkcyjne

(2) $$\varphi(tx_1,\ldots,tx_n) = t^{\mu}\varphi(x_1,\ldots,x_n)$$

dla wszelkich x i $t > 0$, gdzie μ jest dowolną stałą zadaną.

Definicja 4. Funkcję $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ nazywamy funkcją pseudo-jednorodną, jeśli spełnia ona równanie funkcyjne

(3) $$\varphi(t^{\alpha_1}x_1,\ldots,t^{\alpha_n}x_n) = t^{\mu}\varphi(x_1,\ldots,x_n)$$

dla wszelkich x i $t > 0$, gdzie stałe α_i, μ są dane.

Definicja 5. Funkcję $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ nazywamy uogólnioną funkcją pseudo-jednorodną, jeśli spełnia ona równanie funkcyjne

(4) $$\varphi\left(f_1(t_1,\ldots,t_m)x_1,\ldots,f_n(t_1,\ldots,t_m)x_n\right) = F(t_1,\ldots,t_m)\,\varphi(x_1,\ldots,x_n) \qquad (m \leqslant n)$$

dla wszelkich x i $t = (t_1,\ldots,t_m) \in T$, gdzie T jest wspólnym obszarem określoności danych funkcyj f_i, F.

Definicja 6. Funkcję $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ nazywamy funkcją prawie-jednorodną, jeśli spełnia ona równanie funkcyjne

$$(5)\qquad \varphi\left(f_1(t_1,\ldots,t_m)+x_1,\ldots,f_n(t_1,\ldots,t_m)+x_n\right)=$$

$$=F(t_1,\ldots,t_m)\,\varphi(x_1,\ldots,x_n)\qquad (m\leq n)$$

dla wszelkich x oraz $t\in T$, gdzie T jest wspólnym obszarem określoności danych funkcyj f_i, F.

Jest widoczne, że równanie (3) jest szczególnym przypadkiem równania (4). Dlatego też odtąd zajmować się będziemy jedynie równaniami (4) i (5). Okazuje się, że równania te nie dla wszelkich funkcyj f_i, F posiadają rozwiązania. V.ALACI, w swoich pracach, rozwiązuje równania funkcyjne (4) i (5) /czyni to dla $n = 3$/ dla następujących podstawień:

A. W przypadku równania (4):

$$f_i(t_1,\ldots,t_m)=t_1^{\alpha_{i1}}\ldots t_m^{\alpha_{im}},\ (i=1,\ldots,n)\quad (m\leq n)$$

$$F(t_1,\ldots,t_m)=t_1^{\mu_1}\ldots t_m^{\mu_m}\qquad t\in T=\{t: t_j>0,\ (j=1,\ldots,m)\}$$

gdzie stałe α_{ij}, μ_j są dane.

B. W przypadku równania (5):

$$f_i(t_1,\ldots,t_m)=\alpha_{i1}t_1+\ldots+\alpha_{im}t_m\qquad (i=1,\ldots,n)\quad (m\leq n)$$

$$F(t_1,\ldots,t_m)=\mu_1^{t_1}\ldots\mu_m^{t_m}\qquad t\in T=\{t: t_j \text{ dowolne } (j=1,\ldots,m)\}$$

gdzie stałe α_{ij}, $\mu_j>0$ są dane.

Równania (4) i (5) przy podstawieniach, odpowiednio, A i B posiadają rozwiązania. Czy jednakże oprócz funkcyj wymienionych pod A i B nie istnieją jeszcze inne, przy których odpowiednie równania (4) i (5) posiadały by rozwiązania - tego dotąd nie wiadomo. V.ALACI problemu powyższego w ogóle nie rozważa. I my, w tej pracy, nie będziemy się tym problemem zajmowali.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie pewnej nowej metody znalezienia ogólnych rozwiązań równań funkcyjnych (4) i (5) z odpowiednimi podstawieniami A i B.Jak zobaczymy metoda ta jest elementarna i łatwiejsza w stosowaniu od metody ALACI'ego. Ponadto ma ona tę ważną zaletę, że dostarcza ogólnych rozwiązań w klasie funkcyj całkiem dowolnych, gdy tymczasem metoda ALACI'ego daje rozwiązania w klasie funkcyj różniczkowalnych. Metoda ALACI'ego,stosowana do równania (4), względnie (5), polega na sprowadzeniu danego równania funkcyjnego do odpowiadającego mu układu równań różniczkowych cząstkowych liniowych 1-go rzędu na jedną funkcję niewiadomą, którą jest szukana funkcja jednorodna /układ ten jest odpowiednikiem znanego równania różniczkowego EULERA dla klasycznej funkcji jednorodnej/.Zcałkowanie tego układu /zresztą nie takie proste/ daje rozwiązanie równania (4) w klasie funkcyj różniczkowalnych.Metoda nowa nie korzysta z równań różniczkowych i ma charakter algebraiczno-geometryczny.

V.ALACI, przy rozwiązywaniu równania (5), nie zauważa głębokiego związku pomiędzy tym równaniem a równaniem (4). Okazuje się, że równanie (5) daje się w łatwy sposób sprowadzić do równania (4) i tym samym nie ma potrzeby bezpośredniego rozwiązywania tego równania. Jego rozwiązanie można bowiem otrzymać z rozwiązania równania (4).

Nowa metoda ma szeroki zakres zastosowań. Równania (4) i (5) można znacznie uogólnić /i to wspólnie uogólnić/ i, jak się okazało, ta nowa metoda pozwala w stosunkowo łatwy sposób rozwiązać otrzymane nowe równanie funkcyjne. Zagadnieniem tym zająłem się w osobnych pracach. Uogólnienia, o których mowa, wiążą się na przykład z równaniami funkcyjnymi komitant obiektów geometrycznych.

Ponadto ze względu na istniejący związek pomiędzy równaniami funkcyjnymi wzmiankowanego typu a układami równań różniczkowych cząstkowych liniowych 1-go rzędu z jedną funkcją niewiadomą można stosować te pierwsze równania do ostatnich z wyraźną korzyścią.

I. Ogólne rozwiązanie równania (4) z podstawieniami A w miejsce funkcyj f_i, F.

Po dokonaniu zaznaczonego podstawienia A równanie (4) przyjmuje postać

$$(4') \quad \varphi\left(t_1^{\alpha_{11}} \dots t_m^{\alpha_{1m}} x_1, \dots, t_1^{\alpha_{m1}} \dots t_m^{\alpha_{nm}} x_n\right) = $$

$$= t_1^{\mu_1} \dots t_m^{\mu_m} \varphi(x_1, \dots, x_n) \qquad (m \leqslant n)$$

gdzie stałe α_{ij} oraz μ_j są dane, $x = (x_1, \dots, x_n) \in A_n$ oraz $t = (t_1, \dots, t_m) \in T$ przy czym A_n oznacza n-wymiarową przestrzeń arytmetyczną a T jest określone przez

$$T = \{t : t_j > 0 \quad (j = 1, \dots, m)\}.$$

Przy pomocy funkcyj wewnętrznych lewej strony równania (4')utwórzmy transformację

$$(6) \quad y_i = t_1^{\alpha_{i1}} \dots t_m^{\alpha_{im}} x_i \quad x, y \in A_n \qquad (i = 1, \dots, n),$$

gdzie t jest parametrem, przekształcającą A_n w siebie.

Powyższe przekształcenia tworzą m-parametrową grupę przekształceń, co łatwo sprawdzić.

Zacytujemy teraz pewne pojęcia pomocnicze.

Niech dana będzie grupa transformacji

(7) $y = f(x,t) \qquad x,y \in X \qquad t \in T$

gdzie t jest parametrem.

Definicja 7. Obszarem tranzytywności grupy transformacji (7) nazywamy zbiór określony przez (patrz [4])

$$E_x = \{y : \exists_t (y = f(x,t))\}$$

gdzie x jest ustalone /można by mówić o obszarze tranzytywności odpowiadającym punktowi x/.

Znana jest następująca własność obszarów tranzytywności: każde dwa obszary tranzytywności są albo identyczne, albo rozłączne. Wynika to stąd, że relacja R określona w zbiorze X przez

$$x R y \equiv \{\exists_t (y = f(x,t))\}$$

jest równoważnością, co nie trudno sprawdzić.

Definicja 8. Każdy zbiór położony w X i zbudowany wyłącznie z obszarów tranzytywności, nazywamy wiązką obszarów tranzytywności.

Definicja 9. Maksymalną wiązkę włókien tranzytywnych, czyli sam zbiór X, nazywamy przestrzenią przedstawiania grupy transformacji (7).

Jeśli funkcje $f(x,t)$ grupy transformacji (7) są dostatecznie regularne, to można mówić o wymiarze obszarów tranzytywności, jako po prostu o wymiarze zbiorów, którymi są te obszary tranzytywności/ nie będziemy tego pojęcia precyzować, gdyż dla naszych celów okaże się to zbyteczne./

Definicja 10. Wiązkę obszarów tranzytywności o jednakowym wymiarze nazywamy wiązką jednorodną.

Definicja 11. Zbiór W_0, położony w ustalonej wiązce W o własności, że z każdym obszarem tranzytywności tej wiązki posiada dokładnie jeden punkt wspólny, nazywamy generatorem tejże wiązki.

Definicje 10, 11 są propozycją autora.

Zwróćmy uwagę na to, że równanie (7), gdzie x jest ustalone a t zmienne, można /zgodnie z definicją obszaru tranzytywności/ uważać za równanie obszaru tranzytywności, odpowiadającego punktowi x.

Powracamy teraz do równania (4').

Ponieważ funkcje występujące po prawych stronach równań (6) są wysokiej klasy regularności, przeto będzie można mówić tutaj o wymiarze obszarów tranzytywności grupy transformacji przez te równania (6) określonej. Przy ustalonym x równania (6) przedstawiają po prostu pewną powierzchnię,x/ której wymiar zależny jest od punktu x oraz stałych α_{ij} /mówiąc dokładniej od rzędu macierzy $\|\alpha_{ij}\|$/.

Zwróćmy obecnie uwagę na następujący fakt, wynikający bezpośrednio z przedstawionej analizy i interpretacji funkcyj wewnętrznych, występujących po lewej stronie równania funkcyjnego (4'):

---

x/ Interpretacja ta wymaga przyjęcia, że A_n jest n-wymiarową przestrzenią euklidesową, a A^+_m zbiorem m-wymiarowej przestrzeni euklidesowej, co można uczynić nie powodując obniżenia wartości i istoty rozważań.

Jeśli znana jest wartość rozwiązania $\varphi(x)$ równania (4') w jakimś punkcie powierzchni /obszaru tranzytywności/ o równaniach (6), wówczas w pozostałych punktach tej powierzchni wartości tego rozwiązania są już jednoznacznie określone. Oznacza to, że jeśli znalibyśmy wartości rozwiązania równania funkcyjnego (4'), zadanego na ustalonej wiązce obszarów tranzytywności, dla x należących do generatora tej wiązki, wówczas wartości tego rozwiązania w pozostałych punktach wiązki są wyznaczone jednoznacznie.

Fakt powyższy stanowi główną myśl nowej metody rozwiązywania równania funkcyjnego typu (4').

Struktura rachunkowa nowej metody wymaga jednakże tego, by dane równanie funkcyjne rozpatrywać najpierw na poszczególnych maksymalnych wiązkach jednorodnych i następnie uzyskane w ten sposób rozwiązania częściowe sumować mnogościowo.

Definicja 13. Jeśli dane są funkcje $\varphi(x)$ oraz $\psi(y)$, określone odpowiednio na zbiorach rozłącznych X oraz Y, wówczas funkcję $\omega(z)$ określoną na zbiorze $X \cup Y$ następująco:

$$\omega(z) = \begin{cases} \varphi(z) & \text{dla } z \in X \\ \psi(z) & \text{dla } z \in Y \end{cases}$$

nazywamy sumą mnogościową funkcyj danych i oznaczamy symbolem $\varphi(z) \cup \psi(z)$.

Definicja 13 jest propozycją autora.

Aby nie komplikować zagadnienia umówimy się, że rozwiążemy równanie (4') jedynie na zbiorze X określonym przez

(8) $$X = \{x : x_i \neq 0 \quad (i = 1,\dots, n)\},$$

który to zbiór, jak łatwo sprawdzić, jest wiązką obszarów tranzytywności i to wiązką jednorodną /względem grupy transformacji (6).

Nie otrzymamy więc pełnego rozwiązania równania (4'), zadanego w całej przestrzeni A_n, ale to nie umniejszy wartości pracy, gdyż w niej zamierzyliśmy pokazać jedynie metodę, która mogła by doprowadzić do uzyskania tego pełnego rozwiązania. Jeśli zobaczymy jak działa metoda w przypadku równania (4') zadanego na zbiorze X, wówczas nie trudno będziemy ją mogli przenosić na równanie (4') rozpatrywane na innych wiązkach obszarów tranzytywności, gdyż w przypadku, gdy któreś x_k jest zerem równanie (4') przechodzi automatycznie na podobne równanie, ale rozpatrywane w przestrzeni arytmetycznej o niższym wymiarze niż n. Do tego równania można będzie stosować powyższe rozumowanie od nowa itd.

Przystępując do rozwiązywania równania funkcyjnego (4') na zbiorze X możemy założyć, że stałe α_{ij} w nim występujące spełniają warunek

$$(9) \qquad \text{rząd} \ \| \alpha_{ij} \| = m,$$

gdyż w przeciwnym przypadku można by było wprowadzić nowy parametr t' o mniejszej ilości składowych, przy którym nowe stałe $\alpha'_{i'j'}$, spełniały by warunek (9)/ to znaczy macierz $\| \alpha'_{i'j'} \|$ była by maksymalnego rzędu/.

Przy założeniu (9) obszary tranzytywności grupy transformacji (6), odpowiadające punktom x należącym do zbioru X, są m-wymiarowymi powierzchniami.

Zbiór X jest więc wiązką jednorodną obszarów tranzytywności.

Generatorem X_o tej wiązki X może być na przykład (n-m) -wymiarowa powierzchnia o równaniach parametrycznych

(10) $$x_i = \varepsilon_i \, s_1^{\beta_{i1}} \dots s_{n-m}^{\beta_{in-m}} \qquad \varepsilon_i = \operatorname{sgn} x_i$$

$$\beta_{ik} = \mathrm{const} \qquad \begin{pmatrix} i = 1,\dots, n \\ k = 1,\dots, n-m \end{pmatrix},$$

gdzie $s \in S$, przy czym S jest określone przez

(11) $$S = \{s : s_k > 0 \quad (k = 1,\dots, n-m)\}.$$

Zgodnie z definicją wymiaru powierzchni musimy o stałych β_{ik} założyć, że

$$\text{rząd} \quad \|\beta_{ik}\| = n-m$$

a zgodnie z definicją generatora, że

(12) $$\text{rząd} \quad \|\alpha_{ij}, \beta_{ik}\| = n ,$$

gdyż transformacja

(13) $$y_i = {}_i \, t_1^{\alpha_{i1}} \dots t_m^{\alpha_{im}} \, s_1^{\beta_{i1}} \dots s_{n-m}^{\beta_{in-m}}$$

$$(i = 1,\dots, n)$$

$$y \in X \qquad t \in T \qquad s \in S$$

musi być integralnie odwracalna.

Znajdźmy transformację odwrotną do transformacji (13).

Ponieważ $\operatorname{Sgn} x_i = \operatorname{Sgn} y_i$, więc równania (13) możemy zanotować w postaci

(14) $$t_1^{\alpha_{i1}} \dots t_m^{\alpha_{im}} \, s_1^{\beta_{i1}} \dots s_{n-m}^{\beta_{in-m}} = |y_i| \qquad (i = 1,\dots, n)$$

Logarytmując obustronnie równania (14) otrzymujemy

(15) $$\alpha_{i1} \ln t_1 + \dots + \alpha_{im} \ln t_m + \beta_{i1} \ln s_1 + \dots + \beta_{in-m} \ln s_{n-m} =$$
$$= \ln|y_i| \qquad (i = 1,\dots, n).$$

Układ równań (15) na niewiadome $\ln t_j$, $\ln s_k$ jest układem liniowym cramerowskim /patrz założenie (12)/. Jego rozwiązanie zanotujmy symbolicznie w postaci

$$(16)\qquad \ln t_j = \sum_{i/1}^{n} \delta_{ij} \ln|y_i| \qquad (j = 1,\dots, m)$$

$$\ln s_k = \sum_{i/1}^{n} \varrho_{ik} \ln|y_i| \qquad (k = 1,\dots,n-m),$$

gdzie stałe δ_{ij}, ϱ_{ik} są jednoznacznie określonymi funkcjami danych stałych α_{ij}, β_{ik}.

Ze wzorów (16) otrzymujemy w końcu, że

$$(17)\qquad t_j = |y_1|^{\delta_{1j}} \dots |y_n|^{\delta_{nj}} \qquad (j = 1,\dots, m)$$

$$s_k = |y_1|^{\varrho_{1k}} \dots |y_n|^{\varrho_{nk}} \qquad (k = 1,\dots,n-m),$$

gdzie $\delta_{ij} = \delta_{ij}(\alpha_{ij}, \beta_{ik})$, $\varrho_{ik} = \varrho_{ik}(\alpha_{ij}, \beta_{ik})$ są funkcjami łatwo dającymi się wyznaczyć.

Niech teraz funkcja $\varphi(x)$, spełniająca równanie funkcyjne (4') na zbiorze X, przyjmuje swe wartości na generatorze $\underset{\circ}{X}$ o równaniach (10) według wzoru

$$(18)\ \varphi\left(\varepsilon_1 s_1^{\beta_{11}} \dots s_{n-m}^{\beta_{1n-m}}, \dots, \varepsilon_n s_1^{\beta_{n1}} \dots s_{n-m}^{\beta_{nn-m}}\right) =$$

$$= \phi_\varepsilon (s_1,\dots,s_{n-m}) \qquad s \in S ,$$

gdzie funkcja ϕ_ε są znane. Symbol ϕ_ε oznacza układ funkcyj i rozumiany jest w następujący sposób: każdemu ciągowi znaków $\varepsilon = (\varepsilon_1,\dots, \varepsilon_n)$ odpowiada na ogół inna funkcja, przy czym każda jest określona na S. Funkcyj tych jest więc 2^n.

Jeśli teraz do równania (4') wstawimy w miejsce x prawe strony równań (10) i uwzględnimy wzory (13) oraz (18), wówczas otrzymamy

$$\varphi(y_1,\ldots,y_n) = t_1^{\mu_1}\ldots t_1^{\mu_m}\,\phi_\varepsilon(s_1,\ldots,s_{n-m}),$$

skąd ostatecznie wobec wzorów (17) mamy

$$(19)\qquad \varphi(y_1,\ldots,y_n) = $$
$$= |y_1|^{\lambda_1}\ldots|y_n|^{\lambda_n}\,\phi_\varepsilon\left(|y_1|^{\varrho_{n}}\ldots|y_n|^{\varrho_{n1}},\ldots,|y_1|^{\varrho_{1n-m}}\ldots|y_n|^{\varrho_{nn-m}}\right)$$

gdzie $\lambda_i = \sum_{j/1}^{m} \delta_{ij}\mu_j$.

Można się przekonać, drogą elementarnych przeliczeń,że funkcja $\varphi(y)$, określona wzorem (19), spełnia równanie (4') na zbiorze X /w równaniu (4') należało by zmienić najpierw oznaczenia z x na y/ dla dowolnie przyjętej funkcji ϕ_ε . Tym samym wzór (19) określa ogólne rozwiązanie równania funkcyjnego (4') w klasie funkcyj całkiem dowolnych. Widzimy, że wartości rozwiązania φ mogą być przyjmowane na generatorze całkiem dowolnie.

Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że wynik (19) jest w gruncie rzeczy niezależny od sposobu dobrania generatora (10), to znaczy, że klasa funkcyj określonych wzorem (19) jest niezależna od stałych β_{ik} .

Powyższe przeliczenia, na drodze których znaleziono rozwiązanie równania (4') na zbiorze X , wymagają założenia, że $m < n$, o ile zależało by nam na przejrzystości opisanego modelu geometrycznego. Założenia tego jednakże nie czyniliśmy, gdyż schemat obliczeniowy utrzymuje się również i w przypadku $m = n$. Trzeba go jedynie /ów schemat/

poddać odpowiedniej interpretacji, a mianowicie: ponieważ zbiór X, określony wzorem (8), jest w tym przypadku obszarem tranzytywności, przeto jego generator musi być zbiorem zero-wymiarowym. Aby go uzyskać wystarczy prawe strony równań (10) zastąpić samymi stałymi ε_i. W efekcie końcowym uzyska się znów wzór (19), w którym funkcje ϕ_ε należy rozumieć jako stałe.

Dla uzyskania zgodności oznaczeń dla zmiennych niezależnych, występujących we wzorze (19) oraz w równaniu (4'), zanotujmy rozwiązanie (19) równania (4') w oznaczeniach pierwotnych, to znaczy w miejsce y podstawmy tam x.

Ogólne rozwiązanie równania funkcyjnego (4') na zbiorze X, określonym przez (8), w klasie funkcyj dowolnych ma postać

$$\varphi(x_1,\dots,x_n)=$$

$$=|x_1|^{\lambda_1}\dots|x_n|^{\lambda_n}\,\phi_\varepsilon\left(|x_1|^{\varrho_{11}}\dots|x_n|^{\varrho_{n1}},\dots,|x_1|^{\varrho_{1n-m}}\dots|x_n|^{\varrho_{nn-m}}\right),$$

gdzie λ_i oraz ϱ_{ik} są łatwymi do wyznaczenia /w razie potrzeby/ jednoznacznymi funkcjami stałych α_{ij}, μ_j oraz β_{ik} a funkcje ϕ_ε są dowolnymi funkcjami o polu S /patrz wzór (11)/.

II. <u>Ogólne rozwiązanie równania (5) z podstawieniami B w miejsce funkcyj f_i, F.</u>

Uwzględniając wzory B możemy równanie (5) przepisać w postaci

$$(5')\ \varphi(\alpha_{n}t_1+\dots+\alpha_{1m}t_m+x_1,\dots,\alpha_{m1}t_1+\dots+\alpha_{nm}t_m+x_n)=$$

$$=\mu_1^{t_1}\dots\mu_m^{t_m}\,\varphi(x_1,\dots,x_n)$$

gdzie $x\in A_n$, $t\in A_m$ a dane stałe α_{ij} oraz μ_j spełniają warunki

$$\mu_j > 0 \qquad (j = 1,\dots, m)$$

oraz

$$\text{rząd} \quad \left\|\alpha_{ij}\right\| = m$$

/ostatni warunek jest przyjęty jako założenie, mające uzasadnienie identyczne do podanego w rozdziale I dla stałych α_{ij}, występujących w równaniu (4')/. Symbole A_n oraz A_m oznaczają odpowiednio n oraz m-wymiarową przestrzeń arytmetyczną.

Do otrzymania rozwiązania równania funkcyjnego (5')można by było zastosować, bez najmniejszego trudu, metodę opisaną w rozdziale I. Jednakże, jak się okazuje, będzie go można uzyskać o wiele szybciej. Zauważmy mianowicie,że następująca transformacja

$$\ln y_i = x_i$$

$$(20) \qquad \ln u_j = t_j$$

$$\psi(y_1,\dots,y_n) = \varphi(\ln y_1,\dots,\ln y_n) \qquad (i=1,\dots,n)\,(j=1,\dots,m)$$

$$\gamma_j = \ln\mu_j$$

przeprowadza równanie (5') w równanie

$$(21) \qquad \psi\left(u_1^{\alpha_{11}}\dots u_m^{\alpha_{1m}}\, y_1,\dots, u_1^{\alpha_{n1}}\dots u_n^{\alpha_{nm}}\, y_n\right) =$$

$$= u_1^{\gamma_1}\dots u_m^{\gamma_m}\,\psi(y_1,\dots, y_n)$$

gdzie $u_j > 0$, $y \in Y$ przy czym zbiór Y jest określony przez

$$Y = \{y : \ y_i > 0 \qquad (i=1,\dots, n)\}.$$

Równanie funkcyjne (21) na funkcję ψ jest identyczne pod względem struktury z równaniem (4'). Równania te różnią się jedynie zbiorami, na których są zadane. Zbiór Y jest wiązką jednorodną obszarów tranzytywności odpowiedniej grupy transformacji, będącą częścią wiązki X , określonej przez (8) /oczywiście o ile zachodzi zgodność odpowiednich stałych/. Dzięki temu dla wynotowania wzoru na ogólne rozwiązanie równania (21) będzie można skorzystać ze wzoru (19) przy czym - jak łatwo spostrzec - w miejsce całego zbioru funkcyj Φ_ε , tam występujących, otrzymamy obecnie tylko jedną funkcję, odpowiadającą przypadkowi, gdy $\varepsilon =(1,\dots,1)$. Po zastosowaniu transformacji (20) otrzymujemy więc natychmiast ogólne rozwiązanie zadanego równania (5').

PRACE CYTOWANE

[1] C.HALPHEN, Sur les fonctions homogènes, Rev.Math.Spéc. 21 /1911/, 130-131.

[2] A.FAVRE, Sur les fonctions homogènes, Nouv.Ann.Math. 4 17 /1917/, 426-428.

[3] V.ALACI,

1/ Funcţiuni pseudo-omogène, Rev.Math.Timişoara 3 /1923/ N.1, 3-4,

2/ Usupra functiunilor pseudo-omogène, Rev.Math.Timisoara 3 /1923/ N.1, 6-7,

3/ Fonctions pseudohomogènes et une nouvelle classe d'équations différentielles et aux dérivées partielles, Bull.Sci.Ecole Polyt.Timişoara 11 /1943,1944/ 6-13, 4/ O clasă de ecuaţii funcţionale, Analele Acad.R.P. Rom.Sec.Sti.Mat.Fiz.Chem. /A/3/1950/, 461-477,

5/ Funcţii aproape omogené, Comunicarile Acad. R. P. Rom. 2/1952/, 113-115,

6/ Contribuţie privind funcţile aproape omogené, Studii Si Cerc.Stii.Timişoara 2/1955/, 13-20.

[4] S.GOŁĄB, E.SIWEK, Sur les domaines de transitivité d'un groupe de transformations, Ann.Pol.Math. 9/1960/, 183-187.

SUMMARY

A new method of solving the functional equations of the "generalized pseudo-homogeneous" function and the "semi-homogeneous" function introduced by V.Alaci.

Let A_n denote the n-dimensional arithmetical real space and A_n^+ be the set of this space which is the geometrical place of the points with positive coordinates.

The function $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ is called the classical homogeneous function if it is a solution of the functional equation (1), given in the set $A_n \times A_1$ for (x, t).

V.Alaci has generalized this notion. He introduces, instead of the equation (1), the equation (4) or (5) given in the set $X \times T$, where $X \subset A_n$, $T \subset A_m$; functions $f=(f_1,\dots,f_n)$ and F, with the domain T, are given. The solutions of the equation (4) or (5) are called the "generalized pseudo-homogeneous" functions or the "semi-homogeneous" functions, respectively.

The equations (4) and (5) may not have solutions if functions f and F are arbitrary. V.Alaci specifies these equations into the forms (4′) and (5′), respectively, which have the solutions; the equation (4′) is given in $A_n \times A_m^+$, and (5′) one in $A_n \times A_m$.

V.Alaci gives general solutions of the equations (4′) and (5′) in the class of functions of the regularity C^1. His method is based on the differential equations.

The present paper gives a new method of solving the functional equations (4′) and (5′), which can be named algebraic - geometrical one. By this method we can find the general solutions of the above mentioned equations in the set of arbitrary functions.

In this paper we present only the solution of the equation (4′) given in the set $X \times A_m$, where X is defined by (8). This solution has the form (18′), where Φ_ε denotes the set of arbitrary functions, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_i = \operatorname{sgn} x_i$, and the constants λ_i, ϱ_{ik} depend on the constants μ_j, α_{ij}. We also show that the equations (5′) can be transformed by the transformation (19) into the equation of the type (4′).

Резюме

Новый метод решения функциональных уравнений для псевдооднородных и квазиоднородных функций введенных В.Алацом.

Пусть A_n оьозначает n- мерное действительное

пространство и A_n^+ его подмножество состоящее из тех точек, все координаты которых положительны. Функция φ называется классической однородной функцией, если она удовлетворяет функциональному уравнению /1/ заданному на множестве $A_n x A_1$. Это понятие обобщённое В.Алацом, который вместо уравнения /1/ взял в рассмотрение уравнения /4/ и /5/ заданные на множестве X x T где $X \subset A_n$, $T \subset A_m$ и функции f и F заданы. Решения уравнений /4/ или соответственно /5/ называются обобжёнными псевдооднородными /или соответственно полуквязи однородными/ функциями.

Уравнения /4/ и /5/ обладают решениями не для всех f и F. В.Алаци выискал обладабщие решениями уравнения вида /4'/ и /5'/. Эти уравнения заданы соответсвенно на множествах A_n x A_m^+ и A_n x A_m^+ . Затем В.Алаци находит бесконечно дифференцируемые решения пользуясь переходом к дифференциальным уравнениям.

В нашей работе изложен метод решения функциональных уравнений /4'/ и /5'/ которых должен называться - по нашему предположению - алгебрачески геометрическим. По этому методу мы ищем решения упомянутых уравнений, не делая никаких предположений относительно регулярности. Здесь дано только решение уравнения /4'/ определённое на множестве X x A_m , где X задана формулой /8/ . Это решение даётся формулой /18 / где Φ_ε обозначает множество действительных функций на A_{n-m}^+ ,

$\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_i = \operatorname{Sgn} x_i$ и параметры λ_i и ρ_{ik} зависят от констант μ_j, α_{ij}. Доказывается тоже, что преобразование /19/ переводит уравнения /5'/ в уравнения вида /4'/.