Eugeniusz Wachnicki

O PEWNYCH WŁASNOŚCIACH ROZWIĄZAŃ RÓWNANIA $\Delta^2 u(X) + C^4 \Delta u(X) = 0$

1. W pracach [1], [2] podany jest wzór na wartość średnią dla rozwiązań równania poliharmonicznego, zaś w monografii [3] podany jest wzór na wartość średnią dla rozwiązań równania

$$\Delta u(X) + C\, u(X) = 0, \qquad C \text{ - stała}$$

W niniejszej pracy podamy efektywny wzór na wartość średnią dla rozwiązań równania

$$\Delta^2 u(X) + C^4 \Delta u(X) = 0, \qquad C \text{ - stała różna od zera.} \tag{1}$$

2. Podamy teraz wzory i definicje, z których będziemy korzystać. Przez $J_p(x)$ będziemy oznaczać funkcje BESSELA pierwszego rodzaju o indeksie p tzn. funkcję

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2m}}{\Gamma(m+1)\,.\,\Gamma(p+m+1)} \tag{2}$$

Definicja 1. Funkcję $u(x_1, \dots, x_n) = u(X)$ określoną w obszarze n-wymiarowym G nazywamy: Δ - różniczkowalną jeżeli pochodne

$$\frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i^2}$$

są ciągłe w G. dla $i=1, \dots, n$.

Δ^p - <u>różniczkowalną</u> $(p > 1)$, jeżeli jest Δ^{p-1} - różniczkowalną w G i funkcja $\Delta^{p-1}u(X)$ jest Δ - różniczkowalna w G.

<u>Definicja 2.</u> Niech $u(X)$ będzie funkcją określoną w obszarze G. Wartością średnią funkcji $u(X)$ na powierzchni kuli $K(R,X_o)$ nazywamy funkcję

$$(3)\qquad M(R,X_o,u) = \frac{1}{\Omega_n R^{n-1}} \iint\limits_{FK(R,X_o)} u(X)\,dS$$

gdzie

$$\Omega_n = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

<u>Twierdzenie A.</u> Jeżeli funkcja $u(X)$ jest Δ^p - różniczkowalna $(p \geq 1)$ w obszarze G przestrzeni E^n - wówczas dla każdej kuli $K(R,X) \subset G$

$$(4)\qquad M(R,X,u) = \sum_{i=o}^{p-1} a_{n,i}\, R^{2i}\, \Delta^i u(X) + Q\,,$$

gdzie

$$(5)\qquad a_{n,i} = \begin{cases} 1 \text{ dla } i = o \\ \dfrac{1}{2^i\, i!\, n(n+2)\ldots(n+2i-2)} \text{ dla } i \geq 1 \end{cases}$$

$$(6)\qquad Q = \frac{1}{\Omega_n 4^{p-1}(p-1)!^2} \iiint\limits_{K(R,X)} \Delta^p u(Y) \int_r^R \frac{\left[(R^2-s^2)(s^2-r^2)\right]^{p-1}}{s^{n+2p-3}}\,ds\,dV_Y.$$

$$r = \varrho(X,Y)$$

Resztę Q można przez zastosowanie twierdzenia o wartości średniej dla całek wielokrotnych przedstawić w sposób następujący: istnieje punkt $\Xi \in K(R,X)$ taki, że

$$Q = a_{n,p} R^{2p} \Delta^p u(\Xi) . \tag{7}$$

Dowód tego twierdzenia podany jest w pracy [2]. Dla $n = 3$, R.COURANT i D.HILBERT w [3] podają powyższe twierdzenie przy

$$Q = \frac{1}{4\pi(2p-1)!} \iiint\limits_{K(R,X)} \frac{(R-r)^{2p-1}}{Rr} \Delta^p u(Y) \, dV_Y .$$

3. Weźmy pod uwagę rozwiązania równania (1) w pewnym obszarze $G \subset E^n$. Funkcja $u(X)$ będąca rozwiązaniem tego równania jest w każdym punkcie obszaru G analityczna oraz

$$\Delta^v u(X) = (-1)^{v-1} c^{4(v-1)} \Delta u(X); \quad v = 1,2,\ldots \tag{8}$$

Zbadajmy teraz zbieżność szeregu

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{n,i} R^{2i} \Delta^i u(X). \tag{9}$$

Na podstawie twierdzenia A istnieje punkt $\Xi \in K(R,X) \subset G$ taki, że

$$M(R,X,u) = \sum_{i=1}^{p-1} a_{n,i} R^{2i} \Delta^i u(X) + a_{n,p} R^{2p} \Delta^p u(\Xi)$$

Korzystając ze związku (8) otrzymujemy

$$M(R,X,u) = \sum_{i=0}^{p-1} a_{n,i} R^{2i} \Delta^i u(X) +$$

$$+ a_{n,p} R^{2p} (-1)^{p-1} c^{4(p-1)} \Delta u(\Xi)$$

Gdy p dąży do nieskończoności to ostatni składnik dąży do zera, zatem

$$M(R,X,u) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{n,i} R^{2i} \Delta^{i} u(X).$$

Na podstawie (8) otrzymujemy

$$M(R,X,u) = u(X) - \frac{\Delta u(X)}{c^4} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i a_{n,i} (c^2 R)^{2i}.$$

Wyrażamy teraz sumę szeregu występującego w powyższym związku przez funkcje BESSELA pierwszego rodzaju.

Przyjmujemy $n = 2p + 2$, gdzie $p = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$

Otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i a_{n,i} (c^2 R)^{2i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i (c^2 R)^{2i}}{2^i\, i!\, n(n+2)\ldots(n+2i-2)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i (c^2 R)^{2i}}{2^i\, i!\, (2p+2)\ldots(2p+2i)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i (c^2 R)^{2i}}{2^i\, i!\, 2^i (p+1)\ldots(p+i)} .$$

Korzystając z własności funkcji BESSELA otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i a_{n,i} (c^2 R)^{2i} = \frac{2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) J_{\frac{n}{2}-1}(c^2 R)}{(c^2 R)^{\frac{n}{2}-1}} - 1 .$$

W ten sposób otrzymujemy

<u>Twierdzenie 1.</u> Jeżeli funkcja $u(X)$ jest w obszarze G rozwiązaniem równania (1) to dla każdej kuli $K(R,X) \subset G$

$$(10)\quad M(R,X,u)=u(X)+\frac{\Delta u(X)}{c^4}\left[1-\frac{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)J_{\frac{n}{2}-1}(c^2R)}{(c^2R)^{\frac{n}{2}-1}}\right].$$

Ze wzoru (10) wynikają następujące wnioski:

<u>Wniosek A.</u> Jeżeli $u(X)$ jest rozwiązaniem równania (1) w obszarze G, to dla każdej kuli $K(R,X)\subset G$

$$(11)\quad \iiint\limits_{K(R,X)} u(Y)\,dV=\frac{\Omega_n R^n}{n}u(X)+$$

$$+\frac{\Omega_n R^n\Delta u(X)}{c^4}\left[\frac{1}{n}-\frac{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)J_{\frac{n}{2}}(c^2R)}{(c^2R)^{\frac{n}{2}}}\right].$$

Dowód. Dla każdej kuli $K(r,X)\subset K(R,X)\subset G$

$$\iint\limits_{FK(r,X)} u(Y)\,dS=\Omega_n r^{n-1}u(X)+$$

$$+\frac{\Omega_n\Delta u(X)}{c^4}\left[r^{n-1}-\frac{r^{\frac{n}{2}}2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)J_{\frac{n}{2}-1}(c^2r)}{c^{n-2}}\right].$$

Całkując obie strony powyższej równości względem r od 0 do R, otrzymujemy

$$\iiint\limits_{K(R,X)} u(Y)\,dV=\frac{\Omega_n R^n}{n}u(X)+$$

$$+\frac{\Delta u(X)}{c^4}\Omega_n\left[\frac{R^n}{n}-\frac{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{c^{n-2}}\int_0^R r^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}-1}(c^2r)\,dr\right]$$

ale

$$\int_0^R r^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}-1}(c^2r)\,dr=\frac{1}{c^2}R^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}}(c^2R)$$

Wobec tego

$$\iint\limits_{K(R,X)} u(Y)\,dV = \frac{\Omega_n R^n u(X)}{n} +$$

$$+ \frac{\Omega_n R^n \Delta u(X)}{c^4}\left[\frac{1}{n} - \frac{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)J_{\frac{n}{2}}\left(c^2R\right)}{\left(c^2R\right)^{\frac{n}{2}}}\right].$$

Wniosek B. Jeżeli funkcja $u(X)$ jest rozwiązaniem równania (1) w obszarze G oraz dla $P \in G$ jest $u(P) = \Delta u(P) = 0$ to w każdej kuli $K(R,P) \subset G$ funkcja $u(X)$ zmienia znak o ile nie jest w tej kuli tożsamościowo równa zeru.

Dowód. Stosując wzór (11) otrzymujemy

$$\iiint\limits_{K(R,P)} u(X)\,dV = 0$$

Zatem $u(X)$ musi zmieniać znak w $K(R,P)$.

Twierdzenie 2. Jeżeli $u(X)$ jest rozwiązaniem równania (1) w obszarze G to dla każdej kuli $(K\ R,X) \subset G$

$$M(R,X,\Delta u) = \Delta u(X)\,\frac{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)J_{\frac{n}{2}-1}\left(c^2R\right)}{\left(c^2R\right)^{\frac{n}{2}-1}} \tag{12}$$

Dowód. Równanie (1) jest oczywiście równoważne równaniu

$$\Delta\left[\Delta u(X) + c^4 u(X)\right] = 0$$

więc funkcja $\Delta u(X) + c^4 u(X)$ jest funkcją harmoniczną, zatem dla każdej $K(R,X) \subset G$

$$\frac{1}{\Omega_n R^{n-1}} \iint\limits_{FK(R,X)} \left[\Delta u(Y) + c^4 u(Y)\right] dS = \Delta u(X) + c^4 u(X)$$

czyli

$$M(R,X,\Delta u)=\Delta u(X)+C^4u(X)-C^4\,M(R,X,u)$$

Uwzględniając (10) otrzymujemy

$$M(R,X,\Delta u)=\Delta u(X)\,\frac{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)J_{\frac{n}{2}-1}(C^2R)}{(C^2R)^{\frac{n}{2}-1}}$$

Otrzymujemy stąd następujące wnioski

<u>Wniosek A.</u> Jeżeli $u(X)$ jest rozwiązaniem równania (1) w obszarze G, to dla każdej kuli $K(R,X)\subset G$

$$\iiint\limits_{K(R,X)} u(Y)dV=\Delta u(X)\frac{R^n\,2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Omega_n\,J_{\frac{n}{2}}(C^2R)}{(C^2R)^{\frac{n}{2}}} \tag{13}$$

<u>Wniosek B.</u> Jeżeli $u(X)$ jest rozwiązaniem równania (1) w obszarze G oraz $\Delta u(P)=0$ dla $P\in G$, to w każdej kuli $K(R,P)\subset G$ funkcja $\Delta u(X)$ zmienia znak o ile nie jest w niej tożsamościowo równa zero.

Dowody obu wniosków są analogiczne do dowodów wniosków z twierdzenia 1.

<u>Wniosek C.</u> Jeżeli $u(X)$ jest rozwiązaniem równania (1) w obszarze G, to dla każdego punktu $P\in G$, takiego że $\varrho(P,FG)>\frac{\mu_0}{C^2}$ gdzie μ_0 jest najmniejszym dodatnim miejscem zerowym funkcji $J_{\frac{n}{2}}(X)$ istnieje $K(R,P)\subset G$, taka, że $\Delta u(X)$ zmienia znak w $K(R,P)$ albo jest w niej tożsamościowo równa zero.

Dowód wynika ze związku (13).

Twierdzenie 3. Jeżeli funkcja $u(X)$ spełnia warunki 1° jest określoną w domkniętym obszarze ograniczonym G, 2° jest rozwiązaniem równania (1) w G, 3° istnieje punkt X_{o} wewnątrz G, taki że $u(X_{o})$ jest kresem górnym (dolnym) funkcji $u(X)$ w G, 4° $\Delta u(X_{o}) \geq 0$ $[\Delta u(X_{o}) \leq 0]$, to $u(X)$ jest funkcją stałą w G. W dowodzie rozważymy dwa przypadki:

A. Jeżeli $\Delta u(X_{o}) > 0$ $[\Delta u(X_{o}) < 0]$, to nierówność ta zachodzi w pewnym otoczeniu $O(X_{o})$ punktu X_{o}. Funkcja $u(X)$ jest więc w $O(X_{o})$ funkcją podharmoniczną /nadharmoniczną/ oraz $u(X)$ osiąga kres górny /dolny/ w $O(X_{o})$ zatem musi być funkcją stałą.

B. Jeżeli $\Delta u(X_{o}) = 0$ to przez $K_{o}(R, X_{o})$ oznaczamy kulę zawartą w G o środku X_{o} i promieniu R, w której $u(X) \leq u(X_{o})$ $[u(X) \geq u(X_{o})]$. Przypuśćmy, że istnieje punkt $X' \in K_{o}$ taki, że

$$u(X') < u(X_{o}) \quad [u(X') > u(X_{o})]$$

Nierówność ta jest słuszna w pewnym otoczeniu punktu X', oznaczamy więc przez K' kulę o promieniu R', współśrodkową z kulą K_{o}, której powierzchnia FK' przechodzi przez X'. Zachodzi wtedy nierówność

$$\iint_{FK'} [u(X) - u(X_{o})]\, dS < 0 \quad \left[\iint_{FK'} u(X) - u(X_{o}) \right] dS > 0 \quad .$$

Ale z drugiej strony wobec założenia, że $u(X)$ jest rozwiązaniem równania (1) wynika, że

$$\iint_{FK'} [u(X) - u(X_{o})]\, dS = \frac{\Omega_{n} R'^{\,n-1} \Delta u(X_{o})}{c^{4}} \left[1 - \frac{2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) J_{\frac{n}{2}-1}(c^{2}R')}{(c^{2}R')^{\frac{n}{2}-1}} \right].$$

Korzystając z tego, że $\Delta u(X_0) = 0$ otrzymujemy sprzeczność, czyli w K_0, $u(X)$ jest funkcją stałą.
W przypadku A i B wykazaliśmy, że istnieje obszar zawarty w G, w którym ta funkcja jest stała. Funkcja $u(X)$ jest funkcją analityczną w G, zatem musi być stałą w G.

PRACE CYTOWANE

[1] N.NICOLESCO, Les fonctions polyharmoniques, Paris 1936.

[2] W.WALTER, Mittelwetsatze und ihre Verwendung zur Losung von Randwertaufgaben, Jahresbericht der Deustchen Mathematiker Vereinigung, Stuttgard 1957.

[3] R.COURANT, D.HILBERT, Metody matematiczeskoj fiziki, t.II, Moskwa 1951.

[4] G. TOŁSTOW, Szeregi FOURIERA, Warszawa, PWN, 1954.

[5] M.KRZYŻAŃSKI, Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego, część I, Warszawa, PWN, 1957.

RÉSUMÉ

De certaines propriétés des solutions d'équation
$\Delta^2 u(X) + c^4 \Delta u(X) = 0$

Dans cette note l'auteur considère la valeur moyenne de la fonction sur la sphère, c.a.d. l'expression

$$M(R,X,u) = \frac{1}{\Omega_n R^n} \iint_{FK(R,X)} u(Y)\, dS, \qquad \text{où } \Omega_n = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

L'auteur démontre deux théorèmes suivants:

1. Si la fonction $u(X)$ dans le domaine G, est la solution de l'équation $\Delta^2 u(X) + c^4 \Delta u(X) = 0$,
   en ce cas - là, pour chaque sphère $K(R,X) \subset G$

$$M(R,X,u) = u(X) + \frac{\Delta u(X)}{c^4}\left[1 - \frac{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) J_{\frac{n}{2}-1}(c^2 R)}{(c^2 R)^{\frac{n}{2}-1}}\right],$$

   où $J_{\frac{n}{2}-1}(X)$ est la fonction de Bessel d'index $\frac{n}{2} - 1$.

2. Si la fonction $u(X)$ dans le domaine G est la solution d'équation $\Delta^2 u(X) + c^4 \Delta u(X) = 0$,
   en ce cas - là, pour chaque sphère $K(R,X) \subset G$

$$M(R,X,\Delta u) = \Delta u(X) \frac{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) J_{\frac{n}{2}-1}(c^2 R)}{(c^2 R)^{\frac{n}{2}-1}}$$

En conséquence dans ces théorèmes, l'auteur démontre quelques corollaires au sujet du changement de signe de la solution de l'equation ci - dessus, ou du changement de signe de laplacien de cette solution, ainsi que le théorème suivant:

3. Si

a/ $u(X)$ est defini dans le domaine fermé et borné G,

b/ $u(X)$ est une solution de l'équation $\Delta^2 u(X) + C^4 \Delta u(X) =$

c/ il existe le point X_0 a l'intérieur de G, telle que

$$u(X_0) = \sup_{x \in G} u(X) \qquad \left[u(X_0) = \inf_{x \in G} u(X) \right],$$

d/ $\Delta u(X_0) > 0 \qquad \left[\Delta u(X_0) \leq 0 \right],$

alors $u(X) = \text{const}$ en chaque point du domaine G.

Резюме

Некоторые свойства решения уравнения $\Delta^2 u(X) + C^4 \Delta u(X) = 0$

В этой работе автор рассматривает среднее значение функции на сфере, т. е. выражение

$$M(R,X,u) = \frac{1}{\Omega_n R^n} \iint_{FK(R,X)} u(Y)\,dS \quad \text{где} \quad \Omega_n = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

При этом автор доказывает две следующие теоремы:

1/ Если функция $u(x)$ в области G является решением уравнения $\Delta^2 u(X) + C^4 \Delta u(X) = 0$

то для любого шара $K(R,X) \subset G$

$$M(R,X,u) = u(X) + \frac{\Delta u(X)}{C^4}\left[1 - \frac{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)J_{\frac{n}{2}-1}(C^2R)}{(C^2R)^{\frac{n}{2}-1}}\right],$$

где $J_{\frac{n}{2}-1}$ есть функцией Бесселя с индексом $\frac{n}{2}-1$.

2/ Если функция $u(X)$ в области G является решением уравнения $\Delta^2 u(X) + C^4 \Delta u(X) = 0$
то для любого шара $K(R,X) \subset G$

$$M(R,X,\Delta u) = \Delta u(X)\,\frac{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)J_{\frac{n}{2}-1}(C^2R)}{(C^2R)^{\frac{n}{2}-1}}.$$

На основании этих теорем автор делает несколько выводов, касающихся изменений знаков решений вышеуказанного уравнения, изменений знака лапласиона этих решений, а также приводит следующую теорему:

Если

а/ $u(X)$ определена в замкнутой и ограниченной области G,

б/ $u(X)$ является решением уравнения $\Delta^2 u(X) + C^4 \Delta u(X) = 0$ в области G,

в/ существует такая точка X_0 внутри G, что $u(X_0) = \sup\limits_{X \in G} u(X)$, $\left[u(X_0) = \inf\limits_{X \in G} u(X)\right]$,

г/ $\Delta u(X_0) \geq 0$, $[\Delta u(X_0) \leq 0]$,

то $u(X) = \mathrm{const}$ в области G.