Adam Wachułka

O WARUNKACH WYSTARCZAJĄCYCH OSCYLACYJNOSCI NIEZEROWYCH ROZWIĄZAN PEWNYCH ROWNAN ELIPTYCZNYCH

I

1. W pracy tej podamy warunki wystarczające oscylacyjności niezerowych rozwiązań równania

(1) $$a_{11}u''_{xx}(x,y)+2a_{12}u''_{xy}(x,y)+a_{22}u''_{yy}(x,y)+b_1u'_x(x,y)+$$
$$+b_2u'_y(x,y)+p(x,y)u(x,y)=0$$

gdzie $a_{11},a_{12},a_{22},b_1,b_2$ są stałymi, zaś $p(x,y)$ jest funkcją klasy C^0 w nieograniczonym obszarze D o dopełnieniu CD ograniczonym. Zakładamy, że forma kwadratowa $a_{11}\xi^2+2a_{12}\xi\eta+a_{22}\eta^2$ jest dodatnio określona.

Przyjmujemy definicję oscylacyjności niezerowego rozwiązania równania (1) jak w pracy [1].

Definicja . Funkcję $u(x,y)$ klasy C^2 będącą niezerowym rozwiązaniem równania (1) w pewnym obszarze nieograniczonym D o dopełnieniu CD ograniczonym nazywamy rozwiązaniem oscylacyjnym, jeżeli $u(x,y)$ zeruje się w conajmniej jednym punkcie zewnętrza każdego koła i zera funkcji $u(x,y)$ nie wypełniają obszaru dwuwymiarowego.

Podamy teraz pewne twierdzenia z pracy [2] , [3] , z których będziemy korzystać.

Twierdzenie 1. [2] Jeżeli funkcja

(1a) $$m(r) = \min_{x^2+y^2=r^2} p(x,y) \quad \text{dla} \quad 0<r_0\leqslant r$$

spełnia warunek

$$\lim_{r\to\infty} \operatorname{apr} \int_{r_0}^{r} m(t)\, dt = \infty$$

albo ta granica aproksymatywna nie istnieje, to każde niezerowe rozwiązanie równania

(2) $$\Delta u(x,y) + p(x,y)\, u(x,y) = 0$$

klasy C^2 w D jest oscylujące w D.

Twierdzenie 2. [3] Jeżeli funkcja $m(r)$ dla $0<r_0\leqslant r$ spełnia warunki

1^0 $\quad m(r)+\dfrac{1}{4r^2} \geqslant 0,\qquad 2^0 \quad \liminf_{r\to\infty} r\int_r^{\infty} m(t)\, dt > 0$

to każde niezerowe rozwiązanie równania (2) jest oscylujące w D.

3. Udowodnimy teraz trzy lematy.

Lemat 1. Jeżeli $u(x,y)$ jest niezerowym rozwiązaniem równania (1) klasy C^2 w pewnym obszarze nieograniczonym D o dopełnieniu ograniczonym CD, to 1^0 funkcja

(3) $$v(x,y) = \exp(-rx - ty).\, u(x,y)\ ,$$

gdzie

(4) $$r = \frac{1}{2}\,\frac{b_2a_{12} - b_1a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\ ,\quad t = \frac{1}{2}\,\frac{b_1a_{12} - b_2a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}$$

jest niezerowym rozwiązaniem klasy C^2 w D równania

(5) $$a_{11}v''_{xx}(x,y)+ 2\, a_{12}v''_{xy}(x,y)+ a_{22}v''_{yy}(x,y)+ p_1(x,y)\, v(x,y) = 0$$

gdzie $p_1(x,y) = p(x,y) + C$, C - stała,

2^o zbiory miejsc zerowych funkcji $u(x,y)$ i $v(x,y)$ są identyczne.

Dowód. Druga część tezy wynika wprost z określenia funkcji $v(x,y)$ (3) . Dla dowodu pierwszej części tezy stosujemy transformację (3) do równania (1). Po obliczeniu odpowiednich pochodnych i po podstawieniu do równania (1)i podzieleniu przez czynnik $\exp(-rx - ty)$ otrzymujemy

$$(6) \quad a_{11}v''_{xx}(x,y) + 2a_{12}v''_{xy}(x,y) + a_{22}v''_{yy}(x,y) + (2a_{11}r + 2a_{12}t + b_1)v'_x(x,y) + (2a_{12}r + 2a_{11}t + b_2)v'_y(x,y) + \left[a_{11}r^2 + 2a_{12}rt + a_{22}t^2 + b_1 r + b_2 t + p(x,y)\right]v(x,y) = 0$$

Uwzględniając (4) otrzymujemy

$$(7) \quad a_{11}v''_{xx}(x,y) + 2a_{12}v''_{xy}(x,y) + a_{22}v''_{yy}(x,y) + \left[\frac{1}{2}(b_1 r + b_2 t) + p(x,y)\right]v(x,y) = 0$$

albo przyjmując

$$(8) \quad \frac{1}{2}(b_1 r + b_2 t) = \frac{1}{4}\,\frac{-a_{11}b_2^2 - 2a_{12}b_1b_2 + a_{22}b_1^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = C$$

oraz $$p(x,y) + C = p_1(x,y)$$

otrzymujemy równanie (5), którego niezerowym rozwiązaniem jest funkcja $v(x,y)$ klasy C^2 w D c.b.d.o.

Lemat 2. Jeżeli

$$(9) \quad a_{12} \neq 0$$

$$(10) \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$$

(11) $x = \xi \cos\varphi + \eta \sin\varphi, \quad y = -\xi \sin\varphi + \eta\cos\varphi$

(12) $A = \frac{1}{2}\left[a_{11} + a_{22} + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}\right]$

(13) $C = \left[\frac{1}{2}\ a_{11} + a_{22} - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}\right]$

(14) $V(\xi, \eta) = v(\xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi, -\xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi)$

to 1^o funkcja $V(\xi, \eta)$ jest niezerowym rozwiązaniem klasy C^2 w pewnym nieograniczonym obszarze D_1 o dopełnieniu CD_1 ograniczonym równania

(15) $AV''_{\xi\xi}(\xi, \eta) + CV''_{\eta\eta}(\xi, \eta) + p_2(\xi, \eta)\, V(\xi, \eta) = 0$

2^o zbiory miejsc zerowych funkcji $v(x,y)$ oraz $V(\xi, \eta)$ są identyczne z dokładnością do obrotu o kąt φ oraz zbiory D i D_1 i ich dopełnienia CD i CD_1 są identyczne z dokładnością do obrotu o kąt φ.

Dowód: Druga część tezy wynika wprost z transformacji (11) oraz (14) tzn. z obrotu o kąt φ.
Dla dowodu pierwszej części tezy zastosujemy transformację (11) do równania (5). Po obliczeniu odpowiednich pochodnych, podstawieniu do równania i po uwzględnieniu (14)oraz przy oznaczeniu

$$p_1(\xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi, -\xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi) = p_2(\xi, \eta)$$

otrzymujemy równanie (15), którego niezerowym rozwiązaniem klasy C^2 w D_1 jest funkcja $V(\xi, \eta)$ c.b.d.o.

Lemat 3. Jeżeli

(16) $\xi = \sqrt{A}\ \bar{\xi}, \eta = \sqrt{C}\ \bar{\eta}$

(17) $V(\sqrt{A}\bar{\xi}, \sqrt{C}\bar{\eta}) = \bar{V}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$

to 1^o funkcja $\bar{V}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ jest niezerowym rozwiązaniem klasy C^2 w obszarze nieograniczonym D_2 o dopełnieniu ograniczonym CD_2 równania

$$(18) \qquad \bar{V}''_{\bar{\xi}\bar{\xi}}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) + \bar{V}''_{\bar{\eta}\bar{\eta}}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) + p_3(\bar{\xi}, \bar{\eta})\bar{V}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = 0$$

2^o zbiory miejsc zerowych funkcji $\bar{V}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ oraz $V(\xi, \eta)$ odwzorowują się na siebie w sposób jednoznacznie odwracalny.

Dowód: Druga część tezy wynika z transformacji (16). Istotnie dylatacja (16) przekształca zbiór miejsc zerowych funkcji $V(\xi, \eta)$ w zbiór miejsc zerowych funkcji $\bar{V}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ w sposób jednoznacznie odwracalny. To samo dotyczy zbiorów D_1 i zbioru przekształconego D_2, przy czym zbiór CD_2 jest zbiorem ograniczonym.

Dla dowodu części pierwszej tezy stosujemy transformację (16) do równania (14). Po obliczeniu odpowiednich pochodnych, po podstawieniu ich do równania (14), po przyjęciu oznaczenia

$$p_2(\sqrt{A}\bar{\xi}, \sqrt{C}\bar{\eta}) = p_3(\bar{\xi}, \bar{\eta})$$

otrzymujemy równanie (18), którego niezerowym rozwiązaniem klasy C^2 w D_2 jest funkcja $\bar{V}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ c.b.d.o.

4. Udowodnimy teraz

Twierdzenie 3. Jeżeli funkcja $m(r)$ określona wzorem (1a) spełnia warunki twierdzenia 1, to każde niezerowe rozwiązanie $u(x,y)$ równania (1) klasy C^2 w obszarze D nieograniczonym o dopełnieniu CD ograniczonym jest oscylujące w D.

Dowód: Jeżeli założenia twierdzenia 3 są spełnione, to na podstawie twierdzenia 1, funkcja $\bar{V}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ będąca rozwiązaniem niezerowym równania (18) klasy C^2 w obszarze D_2 jest oscylująca w D_2. Na podstawie lematów 1, 2,3 funkcja $u(x,y)$ będąca niezerowym rozwiązaniem równania (1) klasy C^2 w D jest rozwiązaniem oscylującym w D.

W analogiczny sposób udowadnia się

Twierdzenie 4. Jeżeli funkcja $m(r)$ określona wzorem (1a) spełnia warunki twierdzenia 2, to każde niezerowe rozwiązanie równania (1), $u(x,y)$ klasy C^2 w obszarze nieograniczonym D o dopełnieniu CD ograniczonym jest oscylujące w D.

II

W tej części pracy podamy warunki wystarczające oscylacyjności niezerowych rozwiązań równania

(20) $\Delta u(x,y)+ a(x)u'_x(x,y)+ b(y)u'_y(x,y)+ p(x,y)\cdot u(x,y) = 0$

gdzie $a(x)$ oraz $b(y)$ są funkcjami klasy C^1 na całej płaszczyźnie.

Udowodnimy najpierw następujący

Lemat 4. Jeżeli $u(x,y)$ jest niezerowym rozwiązaniem równania

(20) klasy C^2 na całej płaszczyźnie, to 1^o funkcja

(21) $$v(x,y) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\int_0^x a(t)\,dt + \int_0^y b(s)\,ds\right]\right)$$

jest niezerowym rozwiązaniem klasy C^2 na całej płaszczyźnie równania

(22) $$\Delta v(x,y) + p_1(x,y)\, v(x,y) = 0$$

gdzie

(23) $$p_1(x,y) = p(x,y) - \frac{1}{4}\left[a^2(x)+ b^2(y)- \frac{1}{2}\left(a'(x) + b'(y)\right)\right]$$

2^0 zbiory miejsc zerowych funkcji $u(x,y)$ oraz $v(x,y)$ są identyczne.

Dowód: Druga część tezy wynika wprost z transformacji (22). Dla dowodu pierwszej części tezy zastosujemy transformację (22) do równania (20). Po obliczeniu odpowiednich pochodnych i podstawieniu ich do równania (20) otrzymujemy po przyjęciu (23) równanie (22).

Udowodnimy teraz

Twierdzenie 5. Jeżeli funkcja $m(r)$ określona wzorem (1a) spełnia warunki twierdzenia 1, to każde niezerowe rozwiązanie równania (20) klasy C^2 na całej płaszczyźnie jest oscylujące na całej płaszczyźnie.

Dowód: Z twierdzenia 1 wynika, że funkcja $v(x,y)$ jest oscylującym rozwiązaniem równania (22) na całej płaszczyźnie. Z lematu 4-go wynika identyczność zbiorów miejsc zerowych funkcji $u(x,y)$ i $v(x,y)$. Wobec tego funkcja $u(x,y)$ będąca niezerowym rozwiązaniem równania (20) jest oscylująca na całej płaszczyźnie c,b,d,o.

W analogiczny sposób można udowodnić

Twierdzenie 6. Jeżeli funkcja $m(r)$ spełnia warunki twierdzenia 2, to każde niezerowe rozwiązanie $u(x,y)$ równania (20) klasy C^2 na całej płaszczyźnie jest na niej oscylujące.

PRACE CYTOWANE

[1] F.BARAŃSKI, O własnościach oscylacyjnych i liniach węzłów rozwiązań pewnych równań różniczkowych cząstkowych typu eliptycznego, Prace Mat.t.VII /1962/,str.71-96.

[2] C.OLECH, Z.OPIAL, T.WAŻEWSKI, Sur le problème d oscillation des intégrales de l équation $y'' + g(t)y = 0$, Bull.Acad.Polon.Sci.5 /1957/, str.621-626.

[3] E.HILLE, Nonoscillation theorems, Trans.Amer. Math. Soc.64 /1948/, str.234-252.

SUMMARY

Some sufficient conditions for the oscillatory behaviour of non trivial solutions of certain elliptic equations .

The non trivial solution of the elliptic equation

$$(1) \qquad a_{11}u''_{xx}(x,y) + 2a_{12}u''_{xy}(x,y) + a_{22}u''_{yy}(x,y) +$$

$$+ b_1u'_x(x,y) + b_2u'_y(x,y) + p(x,y)\,u(x,y) = 0$$

$a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2$ boeing costans ,

is called oscillating in the domain D for which the complementary domain CD is bounded if : 1^o $u(x,y) = 0$ at one point at least on the exterior of every circle

2^o the zeros of $u(x,y)$ do not fill any domain.

Let

$$m(r) = \min p(x,y) \quad \text{for} \quad x^2 + y^2 = r^2 \ , \ r \geq r_o > 0$$

The author proves the following theorems:

Theorem 1. If

$$\lim_{r \to \infty} \text{apr} \int_{r_o}^{r} m(t)\,dt = \infty$$

or this limit does not exist, then every non trivial solution of the equation (1) is oscillating in the domain $x^2 + y^2 > r_o^2$.

Let

$$p_1(x,y) = p(x,y) - \frac{1}{4}\left[a^2(x) + b^2(y)\right] - \frac{1}{2}\left[(a'(x) + b'(y)\right]$$

$$m_1(r) = \min p_1(x,y) \quad \text{for} \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad r \geq r_o > 0,$$

$p(x,y)$, $a'(x,)$ $b'(y)$ boeing continuos functions for all(x,y)

Theorem 2. If

$$\lim_{r\to\infty} \text{apr} \int_{r_o}^{r} m_1(t)\,dt = \infty$$

or this limit does not exist, then every non trivial solution of the equation

(2) $u(x,y) + a(x)u'_x(x,y) + b(y)u'_y(x,y) + p(x,y)\,u(x,y) = 0$

is oscillating in whole plan.

Резюме

<u>О достаточных условиях осциллирования ненулевых решений некоторых эллиптических уравнений.</u>

Ненулевое решение $u(x,y)$ эллиптического уравнения

(1) $a_{11}\,u''_{xx}(x,y) + 2a_{12}\,u''_{xy}(x,y) + a_{22}\,u''_{yy}(x,y) + b_1 u'_x(x,y) +$

$+ b_2\,u'_y(x,y) + p(x,y)\,u(x,y) = 0$

a_{ik}, b_j константы

называется осциллирующим в неограниченной области, дополнение которой CD ограниченно если 1° $u(x,y) = 0$ по крайней мере в одной внешней точке каждого круга, 2° нуля функции $u/x,y/$ не выполняют никакой области.

Пусть $$m(r) = \min_{x^2+y^2=r^2} p(x,y) \; , \quad r \geqslant r_0 > 0 \; .$$

Автор доказывает следующие теоремы:

<u>Теорема 1</u>. Если

$$\lim_{r \to \infty} \operatorname{apr} \int_{r_0}^{r} m(t)dt = \infty$$

или этот аппроксимативный предел не существует тогда каждое ненулевое решение уравнения (1) является осциллирующим в области $x^2 + y^2 > r_0^2$.

Пусть

$$p_1(x,y) = p(x,y) - \frac{1}{4}\left[a^2(x) + b^2(y)\right] - \frac{1}{2}\left[a'(x) + b'(y)\right],$$

$p(x,y)$, $a'(x)$, $b'(y)$ непрерывные функции на целой плоскости,

$$m_1(r) = \min_{x^2+y^2=r^2} p_1(x,y) \; , \quad r \geqslant r_0 > 0 \; .$$

Теорема 2. Если

$$\lim_{r \to \infty} \operatorname{apr} \int_{r_0}^{r} m_1(t)\,dt = \infty$$

или этот аппроксимативный предел не существует тогда каждое ненулевое решение уравнения

(2) $\Delta u(x,y) + a(x)u'_x(x,y) + b(y)u'_y(x,y) + p(x,y)u(x,y) = 0$

является осциллирующим на целой плоскости.