Adam Wachułka

TWIERDZENIE O WARTOŚCI ŚREDNIEJ DLA ROZWIĄZAŃ RÓWNANIA $L^2u(X) = 0$

1. W pracy podamy twierdzenie o wartości średniej dla rozwiązań równania eliptycznego o stałych współczynnikach

$$(1)\qquad L^2 u(X) = 0, \quad X(x_1,\dots,x_n),$$

gdzie

$$(2)\qquad Lu = \sum_{ik=1}^{n} a_{ik} u''_{x_i x_k}(X)$$

jest operatorem eliptycznym o stałych współczynnikach

$$(3)\qquad a_{ik} = a_{ki}, \quad L^2u = LLu.$$

Udowodnimy, że rozwiązania równania (1) spełniają twierdzenie o wartości średniej analogiczne do twierdzenia o wartości średniej dla rozwiązań równania $\Delta^2 u(X) = 0$

$$(4)\qquad \frac{1}{\Omega_n R^{n-1}} \iint_S u(X)dS = u(X_o) + \frac{R^2}{2n} \Delta u(X_o),$$

gdzie S jest sferą o środku X_o i promieniu R, Ω_n jest miarą powierzchni kuli n-wymiarowej jednostkowej. Udowodnimy ponadto, że twierdzenie to charakteryzuje rozwiązania

(1) tzn. funkcje spełniające warunek średniej są rozwiązaniami równania (1).

2. Dowód podamy w przypadku n-wymiarowym, $n \geq 3$. Dla $n=2$ twierdzenie jest analogiczne ale dowód należy zmodyfikować. Zamiast funkcji określonej w dalszym ciągu wzorem (8) należy przyjąć funkcję

$$v(r) = \alpha \log \frac{R}{r} = \alpha(\log R - \log r) . \tag{8a}$$

Funkcja $v_1(r)$ określona wzorem (22) jest w przypadku dwuwymiarowym postaci

$$v_1(r) = \int_r^R t\, v(t) \log \frac{t}{r}\, dt . \tag{22a}$$

Rozwiązaniem podstawowym równania

$$L u(X) = 0$$

jest w tym przypadku funkcja $\log \frac{1}{r}$. W związku z tym należy uwzględnić pewne zmiany w oszacowaniu odpowiednich całek we wzorze podstawowym.

3. Rozwiązaniem podstawowym [1] równania

$$L u(X) = 0 \tag{5}$$

jest funkcja

$$\left[\sum_{ik=1}^{n} A_{ik}(x_i - x_i^0)(x_k - x_k^0)\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \tag{6}$$

gdzie A_{ik} są elementami macierzy odwrotnej do macierzy $\| a_{ik} \|$.

4. Niech E_R oznacza obszar ograniczony elipsą e_R o równaniu

$$(7) \qquad f(X) = \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}(x_i - x_i^o)(x_k - x_k^o) - R^2 = 0$$

$$(8) \qquad v(r) = \alpha\left(r^{-(n-2)} - R^{-(n-2)}\right),$$

gdzie α jest stałą, którą dobieramy. Wówczas

$$(9) \qquad L\,v = L\left(r^{-(n-2)}\right) = 0\,, \quad r > 0\,.$$

5. Niech $u(X)$ oznacza funkcję klasy C^2 w obszarze D, klasy C^1 w $\overline{D}$. Udowodnimy [2] następujący

Lemat 1. Jeżeli $u(X) = U(r)$ to

$$(10) \qquad LU = U''(r) + \frac{n-1}{r}\,U'(r)\,.$$

Dowód. Otóż

$$u'_{x_i}(X) = U'(r)\,\frac{\sum_{p=1}^{n} A_{ip}(x_p - x_p^o)}{r}$$

$$u''_{x_i x_k}(X) = U''(r)\,\frac{\sum_{p=1}^{n} A_{ip}(x_p - x_p^o)\sum_{m=1}^{n} A_{km}(x_m - x_m^o)}{r^2} +$$

$$+\,U'(r)\,\frac{A_{ik}\,r - \dfrac{\sum_{s=1}^{n} A_{is}(x_s - x_s^o)\sum_{p=1}^{n} A_{kp}(x_p - x_p^o)}{r}}{r^2}$$

Wobec tego

$$LU = \sum_{ik=1}^{n} a_{ik} \quad U''(r) \frac{\sum_{p=1}^{n} A_{ip}(x_p - x_p^o) \sum_{m=1}^{n} A_{km}(x_m - x_m^o)}{r^2} +$$

$$+ U'(r) \frac{A_{ik} r^2 - \sum_{s=1}^{n} A_{is}(x_s - x_s^o) \sum_{p=1}^{n} A_{kp}(x_p - x_p^o)}{r^3} =$$

$$= U''(r) + \frac{n-1}{r} U'(r) .$$

Lemat 2. Jeżeli 1^o $H(Y)$, $Y(y_1,\dots,y_n)$ jest funkcją jednorodną stopnia pierwszego dodatnią na zbiorze e_R dla każdego $R > 0$.

2^o istnieje $\iint\limits_{e_R} \frac{dS}{H(Y)}$

to

$$(11) \qquad \frac{\varepsilon^{n-2}}{\iint\limits_{e_\varepsilon} \frac{dS_1}{H(Y_1)}} = \frac{R^{n-2}}{\iint\limits_{e_R} \frac{dS}{H(Y)}}$$

Dowód. Niech stosunek podobieństwa elipsoid e_R oraz e_ε wynosi $a > 0$, tzn.

$$(12) \qquad \varepsilon = aR, \quad dS_1 = a^{n-1} dS, \quad H(Y_1) = aH(Y).$$

Niech

$$(13) \qquad Y(x_1 - x_1^o,\dots,x_n - x_n^o),$$

wówczas

(14) $$Y_1\left(a(x_1 - x_1^o),\ldots,a(x_n - x_n^o)\right)$$

Z (12) oraz (14) wynika, że

$$\frac{\varepsilon^{n-2}}{\iint\limits_{e_\varepsilon} \frac{dS_1}{H(Y_1)}} = \frac{a^{n-2} R^{n-2}}{\iint\limits_{e_R} \frac{a^{n-1} dS}{a\, H(Y)}} = \frac{R^{n-2}}{\iint\limits_{e_R} \frac{dS}{H(Y)}}$$

c.b.d.c.

<u>Lemat 3</u>. Jeżeli funkcja $u(X)$ jest klasy C^2 w E_R, klasy C^1 w $\overline{E}_R$ i jeżeli α jest określone wzorem

(15) $$\alpha = \frac{R^{n-2}}{(n-2)\iint\limits_{e_R} \frac{dS}{g(X)}}$$

$$g(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x_j - x_j^o)\right]^2}$$

to

(16) $$\iint\limits_{e_R} u\,\frac{dv}{d\nu}\,dS = u(X_o) + \iiint\limits_{E_R} v\,Lu\;dx_1\ldots dx_n,$$

gdzie

(17) $$\frac{dv}{d\nu} \equiv \sum_{i=1}^{n} u'_{x_i}(X)\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cos(n,x_j)$$

oznacza pochodną transwersalną funkcji $v(r)$.

<u>Dowód</u>. Stosując wzór podstawowy do funkcji $v(r)$ oraz $u(X)$ w obszarze $E_R - E_\varepsilon$, $0 < \varepsilon < R$, przy założeniu, że normalna jest zorientowana do wnętrza obszaru otrzymujemy

$$\iiint\limits_{E_R - E_\varepsilon} (u\,Lv - v\,Lu)\,dx_1\ldots dx_n = -\iint\limits_{e_R}\left(u\frac{dv}{d\nu} - \frac{du}{d\nu}v\right) dS -$$

(18)

$$-\iint\limits_{e_\varepsilon}\left(u\frac{dv}{d\nu} - v\frac{du}{d\nu}\right) dS = -\iint\limits_{e_R} u\frac{dv}{d\nu}\,dS + \iint\limits_{e_R} v\frac{du}{d\nu}\,dS -$$

$$-\iint\limits_{e_\varepsilon} u\frac{dv}{d\nu}\,dS + \iint\limits_{e_\varepsilon} v\frac{du}{d\nu}\,dS .$$

Otóż $v(R) = 0$ skąd wynika, że

$$\iint\limits_{e_R} v\frac{du}{d\nu}\,dS = 0 .$$

Obliczamy

$$\iint\limits_{e_\varepsilon} v\frac{du}{d\nu}\,dS = v(\varepsilon)\iint\limits_{e_\varepsilon}\frac{du}{d\nu}\,dS = d\left(\frac{1}{\varepsilon^{n-2}} - \frac{1}{\;^{n-2}}\right),$$

$$\iint\limits_{e}\left[\sum_{i=1}^{n} u_{x_i} \cdot \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij}(x_j - x_j^o)}{g(X)}\right] dS$$

Ale

$$\left|\frac{du}{d\nu}\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} u'_{x_i}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij}(x_j - x_j^o)}{g(X)}\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\left|u'_{x_i}\right|\left|\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij}(x_j - x_j^o)}{g(X)}\right|$$

Wobec tego

$$\left| \iint_{e_\varepsilon} v \frac{du}{d\nu} \, dS \right| \leq M\alpha\left(\frac{1}{\varepsilon^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}} \right) \iint_{e_\varepsilon} dS - M\alpha\left(\frac{1}{\varepsilon^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}} \right) \varepsilon^{n-1} B \,, \quad \text{gdzie}$$

$$M = \sup \sum_{i=1}^{n} \left| u'_{x_i} \right| , \quad B \text{ stała dodatnia}$$

A więc

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{e_\varepsilon} v \frac{du}{d\nu} \, dS = 0$$

Obliczymy teraz

$$\iint_{e_\varepsilon} u \frac{dv}{d\nu} \, dS \, .$$

Otóż

$$\frac{dv}{d\nu} = \frac{d\, r^{2-n}}{d\nu} = \sum_{i=1}^{n} \left(r^{2-n} \right)'_{x_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cos(n, x_j)$$

$$\cos(n, x_j) = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_{ij} (x_i - x_i^0)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} A_{ij} (x_j - x_j^0) \right]^2}}$$

Wobec tego

(18a)

$$\frac{dv}{d\nu} = - \sum_{i=1}^{n} r^{-n} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} (x_k - x_k^0) \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \sum_{p=1}^{n} A_{pj} (x_p - x_p^0)}{g(X)}$$

$$= - \frac{\alpha}{r^{n-2}\, g(X)} .$$

Natomiast po uwzględnieniu lematu 2 oraz twierdzenia o wartości średniej otrzymujemy

$$-\iint_{e_\varepsilon} u \frac{dv}{d\nu} dS = \iint_{e_\varepsilon} \frac{\alpha}{\varepsilon^{n-2}\, g(X)} u\, dS = \iint_{e_\varepsilon} \frac{\alpha}{\varepsilon^{n-2}\, g(X)} u\, dS$$

$$= \frac{\alpha}{\varepsilon^{n-2}} \underset{Q \in e_\varepsilon}{u(Q)} \iint_{e_\varepsilon} \frac{dS}{g(X)} = u(Q) \longrightarrow u(X_o) \quad \text{gdy } \varepsilon \longrightarrow 0$$

Wobec tego otrzymujemy wzór

$$(19) \quad \iiint_{E_R} \left[uLv - vLu \right] dx_1 \ldots dx_n = - \iint_{E_R} u \frac{dv}{d\nu} dS + u(X_o)$$

a stąd wzór (16).

6. Niech $v_1(r)$ będzie rozwiązaniem równania różniczkowego zwyczajnego

$$(20) \qquad L v_1 = v_1''(r) + \frac{n-1}{r} v_1'(r) = v(r)$$

przy czym $v_1(r)$ spełnia warunki początkowe

$$(21) \qquad v_1(R) = 0 , \qquad \frac{dv_1(R)}{dr} = 0 .$$

Udowodnimy, że

$$(22) \qquad v_1(r) = \frac{1}{(n-2)r^{n-2}} \int_r^R t\, v(t) \left(t^{n-2} - r^{n-2} \right) dt .$$

Istotnie łatwo widać, że $v_1(R) = 0$, $v_1'(R) = 0$ gdyż

$$v_1'(r) = r^{1-n} \int_r^R t\, v(t)(t^{n-2} - r^{n-2})\,dt - r^{2-n} \int_r^R t\, v(t) r^{n-3}\,dt$$

Udowodnimy, że $v_1(r)$ spełnia równanie (20).

Otóż

$$v_1''(r) = (n-1) r^{-n} \int_r^R t\, v(t)(t^{n-2} - r^{n-2})\,dt + (n-2)\, r^{1-n} \cdot$$

$$\int_r^R t\, v(t)\, r^{n-3}\,dt - (n-2) r^{1-n} \int_r^R t\, v(t)\, r^{n-3}\,dt - (n-3)\, r^{2-n} \cdot$$

$$\int_r^R t\, v(t)\, r^{n-4}\,dt + v(r) = (n-1) r^{-n} \int_r^R t\, v(t)(t^{n-2} - r^{n-2})\,dt +$$

$$+ (n-1) \int_r^R t\, v(t)\, dt + v(r).$$

Wynika stąd, że funkcja $v_1(r)$ spełnia równanie (20).

Udowodnimy teraz

<u>Lemat 4.</u>

(23) $$\left.\frac{dv_1}{d\vartheta}\right/_{r=R} = 0$$

<u>Dowód.</u> Ponieważ $v_1'(R) = 0$, zaś $\frac{dr}{d\vartheta}$ jest funkcją

ograniczoną więc słuszność lematu 4 wynika ze wzoru

$$\frac{dv_1}{d\nu} = v_1(r)\frac{dr}{d\nu} .$$

Udowodnimy z kolei

Lemat 5. Jeżeli $u(X)$ jest klasy C^4 w E_R, klasy C^3 w $\overline{E}_R$, $u(X)$ spełnia równanie (1), to

$$(24) \qquad \iiint_{E_R} v\,Lu\,dx_1\ldots dx_n = \frac{R^2}{2n}\,Lu(X_o).$$

Dowód. Stosujemy wzór podstawowy do funkcji Lv_1 oraz Lu w obszarze $E_R - E_\varepsilon$. Otrzymujemy równość

$$\iiint_{E_R-E_\varepsilon}\left[Lu\,Lv_1 - v_1\,L^2u\right]dx_1\ldots dx_n =$$

$$= -\iint_{e_R}\left[\frac{dv_1}{d\nu}\,Lu - v_1\,\frac{dLu}{d\nu}\right]dS - \iint_{e_\varepsilon}\left[\frac{dv_1}{d\nu}\,Lu - v_1\,\frac{dLu}{d\nu}\right]dS$$

Po uwzględnieniu (20),(21), (23), (24) otrzymujemy wzór

$$(25) \qquad \iiint_{E_R-E_\varepsilon} vLu\,dx_1\ldots dx_n = -\iint_{e_\varepsilon}\frac{dv_1}{d\nu}\,Lu\,dS + \iint_{e_\varepsilon} v_1\,\frac{dLu}{d\nu}dS .$$

Obliczymy całki z prawej strony wzoru (25). Otóż

$$\iint_{e_\varepsilon} v_1\,\frac{dLu}{d\nu}\,dS = \frac{1}{n-2}\,\frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\iint_{e_\varepsilon}\left[\int_\varepsilon^R t\,v(t)(t^{n-2}-\varepsilon^{n-2})dt\right]\frac{dLu}{d\nu}dS .$$

$$= \frac{\alpha}{(n-2)\,\varepsilon^{n-2}} \iint_{e_\varepsilon} \left| \int_{\varepsilon}^{R} t\,(t^{2-n} - R^{2-n})(t^{n-2} - \varepsilon^{n-2})\,dt\, \frac{dIu}{d\nu}\, dS = \right.$$

$$= \frac{\alpha}{(n-2)\,\varepsilon^{n-2}}\, k\, \varepsilon^{n-1} \left[\frac{1}{2}(R^2 - \varepsilon^2) - \frac{R^n - \varepsilon^n}{nR^{n-2}} - \frac{\varepsilon^{n-2}}{n-2} \,\cdot \right.$$

$$\left. \cdot\, (R^{2-n} - \varepsilon^{2-n}) + \frac{R^2 - \varepsilon^2}{2R^{n-1}} \right] \frac{dIu(Q)}{d\nu} = o(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0 \,.$$

$Q \in e_\varepsilon$ i $k > 0$ stała

Zanim obliczymy wartość pozostałej całki po prawej stronie wzoru (25) podamy pewne przekształcenia. Otóż

$$(26) \quad \frac{dv_1}{d\nu} = -\frac{1}{r^n} \int_r^R v(t)\, t^{n-1}\, dt \sum_{i=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} A_{ip}(x_p - x_p^o) \,\cdot$$

$$\cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \frac{\sum_{k=1}^{n} A_{jk}(x_k - x_k^o)}{g(X)} =$$

$$= -\frac{1}{r^n g(X)} \int_r^R v(t)\, t^{n-1} dt\; r^2 = -\frac{1}{r^{n-2}}\, \frac{}{g(X)} \int_r (t^{-n+2} - R^{2-n})\, t^n$$

$$= -\frac{1}{r^{n-2}} \cdot \frac{\alpha}{g(X)} \left[\frac{1}{2}(R^2 - r^2) - \frac{R^{n-} r^n}{nR^{n-2}} \right] \cdot$$

a więc na podstawie twierdzenia o wartości średniej

$$-\iint_{e_\varepsilon} \frac{dv_1}{d\nu} Lu\, dS = \frac{\alpha}{n-2}\left[\frac{1}{2}(R^2-\varepsilon^2)-\frac{R^n-\varepsilon^n}{nR^{n-2}}\right] Lu(Q) \cdot \iint_{e_\varepsilon} \frac{dS}{g(X)}, \quad Q \in e_\varepsilon .$$

Uwzględniając lemat 2 otrzymujemy

$$(27) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0}\left[-\iint_{e_\varepsilon} \frac{dv_1}{d\nu} Lu\, dS\right] = \frac{R^2}{2n} Lu(X_o).$$

7. Udowodnimy teraz

Twierdzenie 1. Jeżeli $u(X)$ jest rozwiązaniem klasy C^4 w obszarze D równania (1), to dla każdej elipsoidy $E_r \subset D$ spełniony jest warunek

$$(28) \qquad \frac{\displaystyle\iint_{e_R} \frac{u(X)}{g(X)} dS}{\displaystyle\iint_{e_R} \frac{dS}{g(X)}} = u(X_o) + \frac{R^2}{2n} Lu(X_o).$$

Dowód. Uwzględniając wzór (24) w równości (16) otrzymujemy

$$(29) \qquad \iint_{e_R} u \frac{dv}{d\nu} dS = u(X_o) + \frac{R^2}{2n} Lu(X_o),$$

ale na podstawie (18a) oraz (15)

$$\iint\limits_{e_R} u \frac{dv}{d\nu} dS = \frac{\iint\limits_{e_R} \frac{u(X)}{g(X)} dS}{\iint\limits_{e_R} \frac{1}{g(X)} dS}$$

a stąd wynika wzór (28).

8. Zanim przejdziemy do twierdzenia odwrotnego do twierdzenia poprzedniego udowodnimy najpierw

Lemat 6. Jeżeli $u(X)$ jest klasy C^4 w $\bar{E}_R \subset D$, to istnieje punkt $Q \in \bar{E}_R$ oraz stała $K > 0$ takie, że

$$(30) \qquad \frac{\iint\limits_{e_R} \frac{u(X)}{g(X)} dS}{\iint\limits_{e_R} \frac{dS}{g(X)}} = u(X_o) + \frac{R^2}{2n} Lu(X_o) + KR^4 L^2 u(Q)$$

Dowód. Ze wzoru podstawowego zastosowanego do funkcji Lv_1 oraz Lu w obszarze $E_R - E_\varepsilon$ otrzymujemy

$$(31) \qquad \iiint\limits_{E_R - E_\varepsilon} (Lu\, Lv_1 - v_1 L^2 u)\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= - \iint\limits_{e_R} \left(Lu \frac{dv_1}{d\nu} - \frac{dLu}{d\nu}\right) dS - \iint\limits_{e_\varepsilon} \left(Lu \frac{dv_1}{d\nu} - v_1 \frac{dLu}{d\nu}\right) dS$$

Z wzoru (27) wynika, że

$$(32) \qquad \iint\limits_{E_R} vLu\, dx_1 \ldots dx_n - \iint\limits_{E_R} v_1 L^2 u\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \frac{R^2}{2n} Lu(X_o).$$

Na podstawie wzoru (16)

$$(33) \qquad \iint_{e_R} u \frac{dv}{d\nu} dS - u(X_o) - \iint_{E_R} v_1 L^2 u \, dx_1 \ldots dx_n = \frac{R^2}{2n} Lu(X_o).$$

Na podstawie twierdzenia o wartości średniej zastosowanego do całki

$$\iiint_{E_R} v_1 L^2 u \, dx_1 \ldots dx_n$$

otrzymujemy tezę lematu.

Udowodnimy

Lemat 7. Jeżeli funkcja $u(X)$ jest klasy C^2 w D i jeżeli dla każdej elipsoidy $E_R \subset D$ spełniony jest warunek (28), to funkcja $u(X)$ jest klasy C^4 w D.

Dowód. Z warunku (28) wynika, że

$$(34) \iint_{e_R} \frac{u(Y)}{g(Y)} dS - u(X) = \left(\frac{R^2}{2n} Lu(X)\right)(n-2) \iint_{e_R} \frac{dS}{g(Y)}$$

Ponieważ $u(Y)$ jest klasy C^2, $g(Y)$ jest pierwiastkiem wielomianu o wartościach dodatnich, przeto we wzorze (34) można dwukrotnie różniczkować pod znakiem całki. Stąd wynika, że $u(X)$ jest klasy C^4.

9. Udowodnimy teraz

Twierdzenie 2. Jeżeli funkcja $u(X)$ jest klasy C^2 w D i spełnia warunek (28), to $u(X)$ spełnia równanie

$$(35) \qquad L^2 u(X) = 0 \quad w \ D.$$

Dowód. Na podstawie lematu 7 funkcja $u(X)$ jest klasy C^4 w D, na podstawie zaś lematu 6 oraz warunku (28) $L^2u(Q)=0$. Przy $Q \longrightarrow X$ na podstawie ciągłości funkcji $L^2u(Y)$ otrzymujemy (35) c.b.d.o.

PRACE CYTOWANE

[1] HILBERT-COURANT, Methods of Mathematical Physics, t.II, New York, 1963.

[2] M.KRZYŻAŃSKI, Równania różniczkowe cząstkowe, cz.I, W-wa, PWN, 1957.

SUMMARY

On the mean value theorem for the solutions of the equation $L^2u(X) = 0$

Let

$$Lu(X)=\sum_{ik=1}^{n} a_{ik}u''_{x_i x_k}\ , \quad a_{ik} = a_{ki}\ , \quad X(x_1,\dots,x_n)$$

denotes the elliptic operator with constants coefficients and

$$L^2u = L\,L\,u\,.$$

Let

$$m(R,X_o,u) = \frac{\displaystyle\iint_{e_R} \frac{u(X)}{g(X)}}{\displaystyle\iint_{e_R} \frac{dS}{g(X)}}$$

where e_R denotes the ellipsoid

$$f(X)=\sum_{ik=1}^{n} A_{ik}(x_i - x_i^o)(x_k - x_k^o) - R^2 = 0\ ,$$

A_{ik} boeing elements of the matrix $\|a_{ik}\|^{-1}$,

$$g(X)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x_j - x_j^o)\right]^2}\ .$$

The author proves the following theorems:

Theorem 1. If $u(X) \in C^4(D)$ and satysfies the equation

$$(1) \qquad L^2 u = 0$$

then

$$(2) \qquad m(R, X_o, u) = u(X_o) + \frac{R^2}{2n} Lu(X_o).$$

Theorem 2. If $u(X) \in C^2(D)$ and satysfies the condition (2) for every $e_R \subset D$ then $u(X)$ is a solution of the equation (1).

Резюме

Теорема о среднем для решений уравнения $L^2 u(X) = 0$

Пусть

$$L u(X) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u''_{x_i x_k}, \quad a_{ik} = a_{ki}, \quad X(x_1 x_2, \ldots, x_n)$$

будет эллитический оперетор с постоянными коэфициентами.

Пусть

$$m(R, X_o, u) = \frac{\iint\limits_{e_R} \frac{u(x)}{g(x)} dS}{\iint\limits_{e_R} \frac{dS}{g(x)}}$$

e_R есть эллипсоид

$$f(x) = \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}(x_i - x_i^o)(x_u - x_u^o) - R^2 = 0,$$

A_{ik} есть элемент матрицы $\left\| a_{ik} \right\|^{-1}$

$$\varepsilon(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x_j - x_j^0) \right]^2} .$$

Автор доказывает следующие теоремы:

Теорема 1. Если $u(X) \in C^4(D)$ есть решение уравнения

(1) $$L^2 u(X) = 0$$

тогда

(2) $$m(R, X_0, u) = u(X_0) + \frac{R^2}{2n} L u(X_0)$$

Теорема 2. Если $u(X) \in C^2(D)$ выполняет условие (2) для каждого $e_R \subset D$, тогда $u(X)$ есть решение уравнения (1