Stanisław Wołodźko

O PEWNYM OSZACOWANIU PIERWSZEJ WARTOŚCI WŁASNEJ RÓWNANIA STRUNY NIEJEDNORODNEJ

Wstęp.

W pracy rozważamy zagadnienie następujące:

Niech $u(x)$ będzie rozwiązaniem zagadnienia brzegowego

(1) $$[p(x)u'(x)]' + \lambda k(x)u(x) = 0 \quad \text{dla} \quad |x| \leq R$$

(2) $$u(\pm R) = 0,$$

gdzie funkcje $p(x)$ i $k(x)$ są dodatnie i klasy C^1 w przedziale $[-R,R]$ oraz $0 < R < +\infty$.

Pierwszą wartość własną zagadnienia (1), (2) będziemy oznaczać przez $\lambda(p,k)$.

W pracy [1] B.SCHWARZ podał pewne oszacowania pierwszej wartości własnej równania struny niejednorodnej. Interesujący nas wynik, wraz z uogólnieniem E.ŚLIWIŃSKIEGO podanym w pracy [2], zawiera się w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 1.

Przyjmujemy, prócz powyżej podanych założeń, że funkcja $p(x)$ jest funkcją parzystą w przedziale $[-R,R]$. Jeżeli funkcja $m(x)$ jest dodatnia i klasy C^1 w przedziale $[-R,R]$, oraz dla każdego $x \in [-R,R]$

(3) $$m(x) \leq k^{+}(x),$$

gdzie funkcja $k^+(x)$ oznacza funkcję zsymetryzowaną niemalejąco względem funkcji $k(x)$, to

$$\lambda(p,k) \leq \lambda(p,m). \tag{4}$$

Celem tej pracy jest wykazanie, że nierówność (4) na ogół nie zachodzi w przypadku dowolnej funkcji $p(x)$ dodatniej i klasy C^1 w przedziale $[-R,R]$. Praca składa się z dwu części. W § 1 podamy definicję SCHWARZA funkcji zsymetryzowanej niemalejąco, oraz definicje i twierdzenia, z których skorzystamy w dalszym ciągu. W § 2 skonstruujemy odpowiedni przykład.

§ 1. Podamy teraz definicję SCHWARZA funkcji zsymetryzowanej niemalejąco (zob. [1]).

Definicja 1.

Zakładamy, że funkcja $f(x)$ jest funkcją określoną, ograniczoną i niemierzalną w przedziale $[a,b]$. Funkcję zsymetryzowaną niemalejąco względem funkcji $f(x)$ oznaczamy przez $f^+(x)$. Funkcja $f^+(x)$ jest określona w przedziale $[-R,R]$, gdzie $R = \frac{b-a}{2}$, przez 4 warunki:

1^0 Funkcja $f^+(x)$ jest funkcją parzystą w przedziale $[-R,R]$,

2^0 Funkcja $f^+(x)$ jest funkcją niemalejącą w przedziale $[0,R]$,

3^0 Funkcje $f(x)$ i $f^+(x)$ są równopolowe, tzn. dla każdego z zachodzi

$$A(z) = A^+(z)$$

gdzie

$$A(z) = \text{miara} \underset{x\in[a,b]}{E}\big(f(x)>z\big) \qquad \text{i}$$

$$A^+(z) = \text{miara} \underset{x\in[-R,R]}{E}\big(f^+(x)>z\big),$$

przy czym $\underset{x\in[a,b]}{E}$ oznacza "ogół $x \in [a,b]$".

4^0 $f^+(0) = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ i $f^+(R) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Uwaga 1.

Wiadomo, (zob. [1]), że jeżeli funkcja $f(x)$ jest funkcją ciągłą w przedziale $[a,b]$, to funkcja $f^+(x)$ jest określona jednoznacznie, oraz jest funkcją ciągłą w przedziale $[-R,R]$. Natomiast funkcja $f^+(x)$ na ogół nie jest klasy C^1 nawet w przypadku funkcji $f(x)$ analitycznej w przedziale $[a,b]$.

Definicja 2.

Funkcję $f(x)$ nazywamy funkcją klasy C^1_σ w przedziale $[a,b]$, jeżeli:

1^0 Funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale $[a,b]$.

2^0 W każdym podprzedziale domkniętym przedziału (a,b) funkcja $f'(x)$ jest funkcją ciągłą poza ewentualnymi nieciągłościami dowolnego rodzaju w punktach izolowanych.

Niech K oznacza klasę funkcji $\varphi(x)$ o następujących własnościach:

1^0 $\varphi(x) \not\equiv 0$ dla $x \in (a,b)$.

2^0 $\varphi(x) \in C^1_\sigma$ dla $x \in [a,b]$.

3^0 $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

4^0 Istnieje całka

$$\int_a^b p(x) \left[\varphi'(x)\right]^2 dx .$$

W dalszym ciągu skorzystamy z następującego twierdzenia:

Twierdzenie 2.

Pierwsza funkcja własna $u(x)$ zagadnienia (1), (2) jest funkcją, dla której funkcjonał

$$F[\varphi] = \frac{\int_a^b p(x)[\varphi'(x)]^2 dx}{\int_a^b k(x)\varphi^2(x) dx}$$

osiąga minimum w klasie funkcji $\varphi(x) \in k$, przy czym

$$\lambda(p,k) = F[u].$$

§ 2. Podamy teraz przykład, z którego wynika, że teza twierdzenia 1 nie utrzyma się, jeżeli funkcja $p(x)$ nie jest funkcją parzystą w przedziale $[-R,R]$. W tym celu wystarczy wskazać funkcje $p(x)$ i $k(x)$ dodatnie i klasy C^1 w przedziale $[-1,1]$ takie, że funkcja $k^+(x)$ jest klasy C^1 w przedziale $[-1,1]$ oraz

(5) $$\lambda(p,k) > \lambda(p,k^+).$$

Przyjmijmy, że

$$k(x) = x^2 + 2x + 2 \quad \text{dla} \quad |x| \leq 1.$$

Łatwo stwierdzamy, że funkcja

$$k^+(x) = 4x^2 + 1 \quad \text{dla} \quad |x| \leq 1.$$

spełnia wszystkie warunki definicji 1.

Z drugiej strony zauważmy, że funkcja

$$u(x) = (1-x^2)(1-x+x^2) \text{dla} \quad |x| \leq 1$$

posiada następujące własności:

a/ $u(x) > 0$ dla $|x| < 1$ i $u(\pm 1) = 0$, b/ $\int_{-1}^{1} k^{+}(x)u^{2}(x)\,dx > \int_{-1}^{1} k(x)\,u^{2}(x)dx$.

c/ funkcja $u'(x)$ posiada dokładnie jedno miejsce zerowe ξ w przedziale $[-1,1]$ takie, że $-\frac{1}{2}<\xi<0$.

d/ $u''(\xi) < 0$.

Wykażemy teraz, że funkcja

$$(6) \qquad p(x) = -\frac{\int_{\xi}^{x} k(x)\,u(x)\,dx}{u'(x)}$$

jest funkcją dodatnią i klasy C^1 w przedziale $[-1,1]$. Ponieważ ξ jest zerem jednokrotnym funkcji $u'(x)$, zatem funkcja $p(x)$ jest funkcją analityczną w przedziale $[-1,1]$. Wystarczy sprawdzić, że $\lim\limits_{x\to\xi} p(x) > 0$, a to zachodzi gdyż

$$\lim_{x\to\xi} p(x) = -\lim_{x\to\xi} \frac{k(x)u(x)}{u''(x)} = -\frac{k(\xi)u(\xi)}{u''(\xi)} > 0 .$$

Z (6) wynika, że funkcja $u(x)$ jest funkcją własną zagadnienia (1), (2). Ponieważ funkcja $u(x)$ nie posiada zer w przedziale $(-1,1)$, więc $u(x)$ jest pierwszą funkcją własną tego zagadnienia.

Dalej mamy:

$$(7) \qquad \lambda(p,k) = \frac{\int_{-1}^{1} p(x)[u'(x)]^2\,dx}{\int_{-1}^{1} k(x)u^2(x)\,dx} > \frac{\int_{-1}^{1} p(x)[u'(x)]^2\,dx}{\int_{-1}^{1} k^{+}(x)u^2(x)\,dx} \geqslant$$

$$\geqslant \min_{\varphi\in k} \frac{\int_{-1}^{1} p(x)[\varphi'(x)]^2\,dx}{\int_{-1}^{1} k^{+}(x)\,\varphi^2(x)\,dx} = \lambda(p,k^{+}) .$$

Pierwsza i ostatnia równość w (7) wynika z twierdzenia 2. Pierwsza nierówność jest wnioskiem z własności b/, druga nierówność wynika z faktu, że $u(x) \in K$.
Z (7) wynika (5), a to należało wykazać.

PRACE CYTOWANE

[1] B.SCHWARZ, Bounds for the principal frequency of the nonhomogeneous membrane and for the generalized dirichlet integral Pacific Journal of Mathematics 7 /1957/, nr 4, str.16-53.

[2] E.ŚLIWIŃSKI, O pewnym oszacowaniu dla pierwszej wartości własnej membrany kołowej. Kraków 1960 /praca nie publikowana/.

[3] R.COURANT, D.HILBERT, Metody matiematiczeskoj fizyki, Moskwa-Leningrad, 1951.

SUMMARY

On some estimation of the first eigen-value of the equation for a non-homogeneous string.

In Paper [1] B.Schwartz has given estimations of the first eigen-value of the equation

$$u''(x) + \lambda k(x) u(x) = 0 \quad \text{for } |x| \leq R,$$

with the boundary condition

$$u(-R) = u(R) = 0.$$

From the work [2] it follows that one of the above mentioned estimations is true for the equation

$$[p(x)u'(x)]' + \lambda k(x)u(x) = 0 \quad \text{for } |x| \leq R$$

with the condition

$$u(-R) = u(R) = 0.$$

where the function $p(x)$ is even in the interval $[-R,R]$.

The subject of this note is to show, by means of an example, that the generalization of Schwartz s estimations given by E.Sliwiński cannot be transfered to the above mentioned string equation when $p(x)$ is an arbitrary function of the class C^1 in $[-R,R]$.

Резюме

<u>О некоторой оценке первого собственного значения уравнения струны неоднородной.</u>

В статье [1] В.Шварц дал некоторые оценки первого соственного значения уравнения струны

$$u''(x) + \lambda k(x)u(x) = 0 \text{ для } |x| \leq R$$

с краевум условием

$$u(-R) = u(R) = 0 .$$

Из работы [2] вытекает, что одна из этих оценок правильна для уравнения

$$[p(x)u'(x)]' + \lambda k(x)u(x) = 0 \quad \text{для} \quad |x| \leq R$$

с условием

$$u(-R) = u(R) = 0 .$$

причём функция p(x) является чётной в интервале [-R,R].

Целью этой статьи является построение примера, из которого вытекает, что обобщения Э.Сливиньского оценки В.Шварца не могут быть перенесены на уравнения струны с произвольной функцией p(x) с непрерывной производной в интервале [-R,R].