Stanisław Wołodźko

OSZACOWANIE ODCHYLENIA STANDARDOWEGO ZMIENNEJ LOSOWEJ TYPU CIĄGŁEGO

Wstęp. Rozważmy zmienną losową X o gęstości g(x) i skończonych momentach rzędu pierwszego i drugiego. Niech σ oznacza odchylenie standardowe zmiennej losowej X. W pracy tej podamy dowód nierówności

$$\sigma^- \leqslant \sigma$$

gdzie σ^- oznacza odchylenie standardowe zmiennej losowej X^-, tzn. zmiennej losowej zsymetryzowanej nierosnąco względem zmiennej X. Jako zastosowanie tego twierdzenia podamy dowód pewnego centralnego twierdzenia granicznego.

§ 1. Zaczniemy od definicji funkcji zsymetryzowanych względem funkcji f(x) podanej w pracy SCHWARZA [4]. Niech f(x) oznacza funkcję określoną, mierzalną i ograniczoną w przedziale skończonym $[a,b]$.
Funkcje zsymetryzowane nierosnąco względnie niemalejąco względem funkcji f(x) oznaczamy odpowiednio przez $f^-(x)$ i $f^+(x)$. Są one określone w przedziale $\left[\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}\right]$ przez cztery warunki:

1° Obie funkcje $f^-(x)$ i $f^+(x)$ są parzyste.

2° Funkcja $f^-(x)$ jest nierosnącą a funkcja $f^+(x)$ – niemalejącą w przedziale $\left[0, \frac{b-a}{2}\right]$.

3^{o} Obie funkcje $f^{-}(x)$ i $f^{+}(x)$ są równopolowe względem funkcji $f(x)$, tzn. jeżeli przez $A(z)$ oznaczymy miarę zbioru zawartego w przedziale $[a,b]$, dla którego punktów zachodzi $f(x) > z$ i analogicznie przez $A^{-}(z)$ oraz $A^{+}(z)$ miary zbiorów punktów z przedziału $\left[\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}\right]$, dla których odpowiednio zachodzi $f^{-}(x) > z$ lub $f^{+}(x) > z$, to

$$A(z) = A^{-}(z) = A^{+}(z)$$

dla każdego z.

4^{o} $$f^{-}(0) = f^{+}\left(\frac{b-a}{2}\right) = \sup_{[a,b]} f(x)$$

$$f^{+}(0) = f^{-}\left(\frac{b-a}{2}\right) = \inf_{[a,b]} f(x)$$

B.SCHWARZ w pracy [4] zakładał, że funkcja $f(x)$ jest ciągła i dodatnia w przedziale $[a,b]$.
W pracy tej skorzystamy z następujących własności funkcji zsymetryzowanych (zob. [2], [3], [4]):

1. $$\int_a^b f(x)dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} f^{-}(x)dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} f^{+}(x)dx, \text{ gdzie } \alpha = \frac{b-a}{2}.$$

2. Jeżeli $f(x) \geqslant 0$ dla $x \in [a,b]$, to

$f^{-}(x) \geqslant 0$ i $f^{+}(x) \geqslant 0$ dla $x \in [-\alpha, \alpha]$.

3. Jeżeli $f(x) \geqslant 0$ i $g(x) \geqslant 0$, to

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f^{-}(x)\, g^{+}(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx .$$

4. Jeżeli $f_n(x) \Longrightarrow f(x)$ dla $x \in [a,b]$, to

$$f_n^-(x) \Longrightarrow f^-(x) \quad \text{i} \quad f_n^+(x) \Longrightarrow f^+(x) \quad \text{dla} \quad x \in [-\alpha, \alpha],$$

gdzie „$\Longrightarrow$" oznacza zbieżność jednostajną.

Wprowadzimy jeszcze następujące uogólnienie definicji funkcji zsymetryzowanej nierosnąco:

Niech $f(x)$ oznacza funkcję nieujemną i całkowalną w przedziale /skończonym lub nie/ $[a,b]$. Wówczas przyjmujemy, że

$$f^-(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n^-(x)$$

gdzie funkcja $f_k^-(x)$ $(k=1,\dots,n)$ oznacza funkcję zsymetryzowaną nierosnąco względem funkcji

$$f_k(x) = \begin{cases} k & \text{jeżeli} \quad f(x) > k \\ f(x) & \text{"} \quad \frac{1}{k} \leq f(x) \leq k \\ 0 & \text{"} \quad f(x) < k \end{cases}$$

Można łatwo wykazać, że tak określona funkcja $f^-(x)$ spełnia również własności 1 i 2, oraz, tylko w przedziale skończonym, własność 3.

§ 2. Z własności funkcji zsymetryzowanej nierosnąco wynika, że jeżeli funkcja $g(x)$ jest funkcją gęstości pewnej zmiennej losowej X, to funkcja $g^-(x)$ jest również funkcją gęstości pewnej zmiennej losowej, którą oznaczamy przez X^-. Zmienną X^- będziemy nazywać zmienną losową zsymetryzowaną nierosnąco względem zmiennej X. Odchylenie standardowe zmiennej X^- oznaczymy przez σ^-.

Wykażemy teraz twierdzenie następujące:

Twierdzenie 1. Jeżeli X jest zmienną losową o skończonych momentach rzędu pierwszego i drugiego, gęstości $g(x)$ i odchyleniu standardowym σ, X^- - zmienną losową o gęstości $g^-(x)$ i odchyleniu standardowym σ^-, to

(1) $$\sigma^- \leq \sigma$$

Dowód. Przyjmujemy najpierw, że funkcja $g(x)$ jest określona i ograniczona w przedziale skończonym $[a,b]$. Wykażemy, że $(\sigma^-)^2 \leq \sigma^2$, tzn. że

(2) $$\int_{-\alpha}^{\alpha} x^2\, g^-(x)dx \leq \int_a^b x^2\, g(x)dx - \left[\int_a^b x\, g(x)dx\right]^2$$

gdzie $\alpha = \frac{b-a}{2}$

Nierówność (2) jest równoważna następującej nierówności:

(3) $$\int_{-\alpha}^{\alpha} x^2\, f^-(x)dx \leq \int_a^b x^2\, f(x)dx - \frac{1}{C}\left[\int_a^b x\, f(x)dx\right]^2$$

gdzie $f(x) = C \cdot g(x)$, a zatem

$$C = \int_a^b f(x)dx$$

Nierówność (3) wykażemy w trzech etapach (zob. [2]):

1^0 Dla funkcji $f(x)$ zerowo-jedynkowych.

2^0 Dla funkcji $f(x)$ schodkowych.x/

3^0 Dla dowolnych funkcji $f(x)$ ograniczonych i nieujemnych w przedziale $[a,b]$.

Ad. 1^0 Niech

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in A \subset [a,b] \\ 0 & \text{dla } x \notin A. \end{cases}$$

---

x/ Funkcją schodkową nazywamy funkcję $f(x)$, która przyjmuje skończoną ilość wartości w przedziale $[a, b]$. Szczególnym przypadkiem funkcji schodkowych są funkcje zerowo-jedynkowe.

Wówczas

$$f^-(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |x| \leqslant \frac{1}{2}|A| \\ 0 & \text{dla } |x| > \frac{1}{2}|A| \end{cases}$$

gdzie $|A|$ oznacza miarę zbioru A.

a/ Zbiór A otwarty.

Wówczas $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$, gdzie przedziały (a_i, b_i) są rozłączne, przy czym może być, że $a_i = b_i$ dla i większych od pewnego I.

Wtedy mamy:

$$\int_a^b x^2 f(x)dx - \frac{1}{c}\left[\int_a^b x f(x)dx\right]^2 = \int_A x^2 dx - \frac{1}{c}\left[\int_A xdx\right]^2 =$$

$$(4) \qquad = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{\infty}(b_i^3 - a_i^3) - \frac{1}{4c}\left[\sum_{i=1}^{\infty}(b_i^2 - a_i^2)\right]^2 \geqslant \frac{1}{12}\left[\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i)\right]^3 =$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}|A|}^{\frac{1}{2}|A|} x^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f^-(x) dx$$

Nierówność (4) dla większej przejrzystości rozumowania wykażemy na zakończenie dowodu.

b/ A - dowolny zbiór mierzalny.

Wówczas istnieje ciąg zbiorów otwartych A_n, takich, że

$$A \subset A_n \quad \text{i} \quad |A_n - A| \longrightarrow 0.$$

Stąd na podstawie przypadku a/ mamy

$$\int_{A_n} x^2 dx - \frac{1}{c_n}\left[\int_{A_n} xdx\right]^2 \geqslant \int_{-\frac{1}{2}|A_n|}^{\frac{1}{2}|A_n|} x^2 dx$$

gdzie $C_n = |A_n|$.

Stosując przejście graniczne otrzymujemy

$$\int x^2\,dx - \frac{1}{C}\Big[\int\limits_A x\,dx\Big]^2 \geqslant \int\limits_{-\frac{1}{2}|A|}^{\frac{1}{2}|A|} x^2\,dx$$

a to należało wykazać.

Ad.2° Niech teraz $f(x) = a_i$ dla $x \in A_i$; $i=1,\dots,n$, przy czym $0 \leqslant a_1 < a_2 < \dots, < a_n$ oraz $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = [a,b]$. Wówczas (zob. [2]) mamy

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) \tag{5}$$

gdzie $\alpha_i = a_i - a_{i-1}$ dla $i = 1,\dots, n$ i $a_o = 0$. oraz

$$f_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \in \bigcup\limits_{k=1}^{i-1} A_k \\ 1 & \text{dla} \quad x \in \bigcup\limits_{k=i}^{n} A_k \end{cases}$$

Podobnie jak w pracy [2] otrzymujemy:

$$f^-(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i^-(x) \tag{6}$$

Ponieważ (na podstawie przypadku 1°)

$$\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} x^2 f_i^-(x)dx \leqslant \int\limits_a^b x^2 f_i(x)dx - \frac{1}{C_i}\Big[\int\limits_a^b x f_i(x)dx\Big]^2$$

gdzie $C_i = \int_a^b f_i(x)dx \qquad (i = 1,\dots, n)$ więc też

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 f_i^-(x)dx \le \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_a^b x^2 f_i(x)dx - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i C_i}\left[\alpha_i \int_a^b x\, f_i(x)\, dx\right]^2$$

albo

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i^-(x)dx \le \int_a^b x^2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)dx - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i C_i}\left[\alpha_i \int_a^b x\, f_i(x)\, dx\right]^2$$

Uwzględniając (5) i (6) dostaniemy

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 f^-(x)\, dx \le \int_a^b x^2 f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i C_i}\left[\alpha_i \int_a^b x\, f_i(x)\, dx\right]^2 ,$$

a stąd

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 f^-(x)\, dx \le \int_a^b x^2 f(x)\, dx . \tag{7}$$

Ponieważ odchylenie standardowe jest niezmiennikiem przesunięcia więc można przyjąć, że $\int_a^b x\, f(x)dx = 0$. x/

Z powyższej uwagi oraz z (7) wynika, że

$$(\sigma^-)^2 \le \sigma^2$$

w przypadku funkcji $g(x)$ schodkowych, a zatem

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 f^-(x)dx \le \int_a^b x^2 f(x)dx - \frac{1}{c}\left[\int_a^b x\, f(x)dx\right]^2 .$$

x/ Nasuwa się pytanie, dlaczego tego upraszczającego założenia nie przyjęto na początku dowodu. Okazuje się jednak, że wówczas warunek $\int_a^b x\, f(x)dx = 0$ znacznie komplikuje rozumowanie.

Ad. 3^0 Niech teraz $f(x)$ oznacza dowolną funkcję nieujemną, ograniczoną i całkowalną w przedziale $[a,b]$. Rozważamy następujący ciąg funkcji

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{k}{n} & \text{gdy } \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n}\ ; \quad k = 0,\ldots, n^2-1 \\ n & \text{"} \quad f(x) \geq n, \end{cases}$$

Ponieważ

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad \text{dla} \quad x \in [a,b] ,$$

więc też

$$f_n^-(x) \rightrightarrows f^-(x) \quad \text{dla} \quad x \in [-\alpha,\alpha] .$$

Z drugiej strony /na podstawie 2^0/ zachodzi

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 f_n^-(x)dx \leq \int_a^b x^2 f_n(x)dx - \frac{1}{C_n}\left[\int_a^b x f_n(x)\, dx\right]^2$$

gdzie

$$C_n = \int_a^b f_n(x)dx ,$$

więc też

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 f^-(x)dx \leq \int_a^b x^2 f(x)dx - \frac{1}{C}\left[\int_a^b x f(x)dx\right]^2$$

a to należało dowieść.

Pozostała jeszcze do wykazania nierówność (4).

Z uwagi na to, że

$$C = \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i)$$

nierówność (4) jest równoważna następującej nierówności

$$(6)\ 4\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)\sum_{i=1}^{\infty}(b_i^3-a_i^3) - 3\left[\sum_{i=1}^{\infty}(b_i^2-a_i^2)\right]^2 - \left[\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)\right]^4 \geq 0$$

Wystarczy pokazać, że dla każdego n zachodzi

$$(9)\qquad 4\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)\sum_{i=1}^{n}(b_i^3-a_i^3)-3\left[\sum_{i=1}^{n}(b_i^2-a_i^2)\right]^2-\left[\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)\right]^4\geq 0$$

bowiem stosując przejście graniczne otrzymamy (8).
Ponieważ

$$4(b_i-a_i)(b_i^3-a_i^3)-3(b_i^2-a_i^2)^2-(b_i-a_i)^4=0\quad(i=1,2\ldots)$$

więc też

$$(10)\qquad 4\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)(b_i^3-a_i^3)-3\sum_{i=1}^{n}(b_i^2-a_i^2)^2-\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^4=0$$

Poszczególne składniki lewej strony nierówności (9) możemy zapisać w postaci następującej:

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)\sum_{i=1}^{n}(b_i^3-a_i^3)=\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)(b_i^3-a_i^3)+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(b_i-a_i)(b_j^3-a_j^3),$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(b_i^2-a_i^2)\right]^2=\sum_{i=1}^{n}(b_i^2-a_i^2)^2+2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}(b_i^2-a_i^2)(b_j^2-a_j^2),$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)\right]^4=\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^4+4\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(b_i-a_i)^3(b_j-a_j)+$$

$$+6\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}(b_i-a_i)^2(b_j-a_j)^2+12\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i\neq j<k\neq i}}^{n}(b_i-a_i)^2(b_j-a_j)(b_k-a_k)+$$

$$+24\sum_{i,j,k,l=1}^{n}(b_i-a_i)(b_j-a_j)(b_k-a_k)(b_l-a_l)\,.$$

Stąd uwzględniając /10/ otrzymujemy nierówność równoważną /9/:

$$2\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(b_i-a_i)(b_j^3-a_j^3)-3\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}(b_i^2-a_i^2)(b_j^2-a_j^2)-2\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(b_i-a_i)^3(b_j-a_j)$$

$$-3\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}(b_i-a_i)^2(b_j-a_j)^2-6\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i\neq j<k\neq i}}^{n}(b_i-a_i)^2(b_j-a_j)(b_k-a_k)-$$

$$(11)\qquad -12\sum_{\substack{i,j,k,l=1\\ i<j<k<l}}^{n}(b_i-a_i)(b_j-a_j)(b_k-a_k)(b_l-a_l)\geq 0.$$

Dodając pierwsze cztery składniki lewej strony nierówności (11) otrzymujemy:

$$2\sum_{i,j=1}^{n}(b_i-a_i)(b_j^3-a_j^3)-3\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}(b_i^2-a_i^2)(b_j^2-a_j^2)-2\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(b_i-a_i)^3(b_j-a_j)$$

$$-3\sum_{i,j=1}^{n}(b_i-a_i)^2(b_j-a_j)^2=$$

$$=\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}(b_i-a_i)(b_j-a_j)\Big[2(b_i^2+b_ia_i+a_i^2)+2(b_j^2+b_ja_j+a_j^2)-$$

$$-2(b_i^2-a_i^2)-2(b_j^2-a_j^2)-3(b_i+a_i)(b_j+a_j)-3(b_i-a_i)(b_j-a_j)\Big]$$

$$(12)\qquad =6\sum_{i,j=1}^{n}(b_i-a_i)(b_j-a_j)(a_j-b_i)(b_j-a_i)\quad .$$

Możemy przyjąć, że liczby a_k i b_k $(k=1,\dots,n)$ spełniają nierówności

$$a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \dots \le a_n < b_n .$$

Wówczas dla $i < j$ otrzymujemy

$$(13) \quad a_j - b_i \ge \sum_{k=i+1}^{j-1} (b_k - a_k) \quad \text{oraz} \quad b_j - a_i \ge \sum_{l=i}^{j} (b_l - a_l)$$

Wobec tego otrzymujemy nierówność

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} (b_i - a_i)(b_j - a_j)(a_j - b_i)(b_j - a_i) \ge$$

$$\ge \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} (b_i - a_i)(b_j - a_j) \sum_{k=i+1}^{j-1} (b_k - a_k) \sum_{l=i}^{j} (b_l - a_l) =$$

$$(14) \qquad = \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \sum_{k=i+1}^{j-1} \sum_{l=i}^{j} (b_i - a_i)(b_j - a_j)(b_k - a_k)(b_l - a_l).$$

Z (12), (13) i (14) wynika, że na to, by zachodziła nierówność (11) wystarcza, by zachodziła następująca nierówność:

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \sum_{k=i+1}^{j-1} \sum_{l=i}^{j} (b_i - a_i)(b_j - a_j)(b_k - a_k)(b_l - a_l) \ge$$

$$(15) \le \sum_{\substack{i,j,k=1\\ i\ne j<k\ne i}}^{n} (b_i - a_i)^2 (b_j - a_j)(b_k - a_k) +$$

$$+ 2 \sum_{\substack{i,j,k,l=1\\ i<j<k<l}}^{n} (b_i - a_i)(b_j - a_j)(b_k - a_k)(b_l - a_l)$$

Weźmy pod uwagę dowolny składnik pierwszej sumy z prawej strony nierówności (15)

$$(b_s-a_s)^2\,(b_t-a_t)(b_r-a_r)$$

gdzie $s \neq t < r \neq s$.

Wykażemy, że ten wyraz jest składnikiem sumy z lewej strony nierówności (15) dobierając wskaźniki i, j, k, l następująco:

$$i = \min(r,s,t), \quad j = \max(r,s,t) \quad \text{oraz:}$$

jeżeli $i = s$, to $k = s$ i $l = t$,

jeżeli $i = t < s < r$, to $k = l = s$,

jeżeli $i = t < r < s$, to $k = r$ i $l = s$.

Łatwo widać, że powyższy dobór wskaźników i, j, k, l jest jedyny. Podobnie dowolny składnik

$$(b_s-a_s)(b_t-a_t)(b_r-a_r)(b_p-a_p) \quad \text{gdzie} \quad s < t < r < p$$

drugiej sumy z prawej strony nierówności (15) występuje dwukrotnie jako składnik sumy z lewej strony (15), co stwierdzamy kładąc $i=s$, $j=p$ oraz $k=t$ i $l=r$ lub $k=r$ i $l=t$. Ten dobór wskaźników jest również jedyny.

Stąd wynika prawdziwość nierówności (15), a zatem i (4) . W ten sposób wykazaliśmy (1) w przypadku, gdy funkcja $g(x)$ jest określona i ograniczona w przedziale skończonym $[a,b]$. Prawdziwość tezy w przypadku ogólnym wynika z definicji funkcji symetryzowanej nierosnąco.

§ 3. W tym punkcie podamy zastosowanie twierdzenia 1. Zauważmy najpierw, że jeżeli odchylenie standardowe σ zmiennej losowej X jest równe od zera, to również $\sigma^- \neq 0$.

Wynika to z własności 1 dla funkcji zsymetryzowanych. Rozważmy ciąg niezależnych zmiennych losowych $\{X_k\}$, $(k=1,2,\ldots)$ równopolowych x/, o skończonych momentach rzędu pierwszego i drugiego i niech $g_k(x)$, m_k, $\sigma_k \neq 0$ oznaczają odpowiednio gęstość, wartość przeciętną i odchylenie standardowe zmiennej losowej X_k.

Oznaczmy dalej

$$C_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2}$$

Zachodzi wówczas następujące

Twierdzenie 2. Jeżeli $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{C_n^2}{n} = \sigma^2$, gdzie $\sigma = \sigma_1^-$ oznacza odchylenie standardowe zmiennej X_1^-, to dla ciągu $F_n(z)$ dystrybuant zmiennych losowych Z_n określonych wzorem

$$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} (X_k - m_k)}{C_n}$$

mamy

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Dowód. Ciąg zmiennych $\{X_k^-\}$ $(k=1,2,\ldots)$ określamy w ten sposób, że zmienna losowa n wymiarowa $(X_1^-,\ldots,X_n^-)$, $(n = 1,2,\ldots)$, jest zmienną o gęstości

$$g(x_1,\ldots x_n) = g^-(x_1)\ldots g^-(x_n)$$

---

x/ Zmienne losowe X_1, X_2 nazywamy równopolowymi, jeżeli ich gęstości $g_1(x_1)$ i $g_2(x_2)$ są funkcjami równopolowymi.

Tak określony ciąg $\{X_k^-\}$ jest ciągiem zmiennych losowych niezależnych o jednakowym rozkładzie, przy czym odchylenie standardowe każdej zmiennej X_k^- jest równe $\sigma = \sigma_1^-$. Obieramy dowolne $\varepsilon > 0$. Niech

$$g_{k,n}(x) = \begin{cases} g_{k,n}^-(x) & \text{dla} \quad |x| \leq \varepsilon\sigma\sqrt{n} \\ g_1^-(x) & \text{dla} \quad |x| > \varepsilon\sigma\sqrt{n}, \end{cases}$$

gdzie $g_{k,n}^-(x)$ oznacza funkcję zsymetryzowaną nierosnąco względem gęstości $g_k(x)$ w przedziale $[-\varepsilon\sigma\sqrt{n} - m_k, \varepsilon\sigma\sqrt{n} + m_k]$ oraz $g_1^-(x)$ - funkcję zsymetryzowaną nierosnąco względem gęstości $g_1(x)$ w przedziale $(-\infty, +\infty)$ x/. Wówczas mamy dla $k = 1, \ldots, n$:

$$(16) \int\limits_{|x-m_k| \leq \varepsilon C_n} (x-m_k)^2 g_k(x)dx \geq \int\limits_{|x-m_k| \leq \varepsilon\sigma\sqrt{n}} (x-m_k)^2 g_k(x)dx \geq \int\limits_{|x| \leq \varepsilon\sigma\sqrt{n}} x^2 g_{k,n}^-(x)\,dx$$

Pierwsza nierówność w (16) wynika z relacji $C_n \geq \sigma\sqrt{n}$, druga - z własności 3° funkcji zsymetryzowanych. Oznaczmy dalej:

$$(17) \qquad (\sigma_{k,n}^-)^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_{k,n}(x)\,dx .$$

Z definicji funkcji $g_{k,n}(x)$ wynika relacja

$$(18) \qquad \lim_{n \to +\infty} (\sigma_{k,n}^-)^2 = \sigma^2 .$$

Z drugiej strony mamy:

x/ Funkcja $g_{k,n}(x)$ nie musi być gęstością zmiennej losowej.

$$\int\limits_{|x-m_k|>\varepsilon C_n}(x-m_k)^2 g_k(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-m_k)^2 g_k(x)dx - \int\limits_{|x-m_k|\le \varepsilon C_n}(x-m_k)^2 g_k(x)dx =$$

$$(19) \quad = \sigma_k^2 - \int\limits_{|x-m_k|\le\varepsilon C_n}(x-m_k)^2 g_k(x)dx$$

Z (16), (17) i (19) wnioskujemy, że

$$\int\limits_{|x-m_k|>\varepsilon C_n}(x-m_k)^2 g_k(x)dx = \sigma^2 - (\sigma_{k,n}^-)^2 + \int\limits_{|x|>\varepsilon\sigma\sqrt{n}} x^2 g_1^-(x)dx \qquad (k=1,\ldots$$

Stąd otrzymujemy:

$$0 \le \frac{1}{C_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x-m_k|>\varepsilon C_n}(x-m_k)^2 g_k(x)dx \le 1 - \frac{1}{C_n^2}\sum_{k=1}^{n}(\sigma_{k,n}^-)^2 +$$

$$+ \frac{1}{C_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|>\varepsilon\sigma\sqrt{n}} x^2 g_k^-(x)dx,$$

a stąd, z uwagi na nierówność $\frac{1}{C_n^2} \le \frac{1}{n\sigma^2}$ x/, mamy:

$$(20) \quad 0 \le \frac{1}{C_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x-m_k|>\varepsilon C_n}(x-m_k)^2 g_k(x)dx \le 1 - \frac{1}{C_n^2}\sum_{k=1}^{n}(\sigma_{k,n}^-)^2 +$$

$$+ \frac{1}{n\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|>\varepsilon\sigma\sqrt{n}} x^2 g_1^-(x)dx$$

---

x/ Nierówność ta wynika z twierdzenia 1.

Ponieważ istnieją α_n, β_n takie, że $1 \leq \alpha_n \leq n$ i $1 \leq \beta_n \leq n$ oraz

$$\left(\sigma^-_{\alpha_n, n}\right)^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\sigma^-_{k,n}\right)^2 \leqslant \left(\sigma^-_{\beta_n, n}\right)^2$$

więc, z uwagi na (18), dostajemy:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\sigma^-_{k,n}\right)^2 = \sigma^2 .$$

Stąd i z założenia wynika, że

$$(21) \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^{n} \left(\sigma^-_{k,n}\right)^2 = 1$$

Ponieważ na podstawie twierdzenia LINDEBERGA-LEVY'ego dla ciągu zmiennych losowych

$$Z^-_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X^-_k$$

mamy

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

więc na podstawie warunku LINDEBERGA-FELLERA wnioskujemy, że

$$(22) \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| > \varepsilon\sigma\sqrt{n}} x^2 g^-_1(x)dx = 0$$

z (20), (21) i (22) wynika, że

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{C_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-m_k| > \varepsilon C_n} (x-m_k)^2 \, g_k(x)dx = 0 \tag{23}$$

Z (23) na podstawie warunku LINDEBERGA-FELLERA wynika teza.

PRACE CYTOWANE

[1] M.FISZ, Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna, wyd.II, Warszawa 1958.

[2] G.HARDY, J.LITTLEWOOD, G.POLYA, Inequalities, Cambridge, 1934.

[3] G.POLYA, G.SZEGÖ, Isoperimetric inequalities in mathematical physics, Princeton 1951.

[4] B.SCHWARZ, Bounds for the principal frequency of the nonhomogeneous membrane and for the generalized Dirichlet integral, Pacific Journal of Mathematics 7 /1957/, nr 4, str.1653.

[5] R.SIKORSKI, Funkcje rzeczywiste, tom I, Warszawa 1959.

SUMMARY

On some estimationc the random variable of the continuous type

In this work we give some estimation of the random variable of the continuous type. This estimation deals with the process of symmetrization of the function in the sense of Schwarz [4].

The author proves the following:

Theorem 1. If Y, X denote the random variables with densities $g(x)$, $\bar{g}(x)$ and dispersions $\sigma, \bar{\sigma}$, respectively, then $\bar{\sigma} \leq \sigma$.

This theorem has been used in the paper to prove one of the central limitary theorems.

let us denote $\{X_k\}$, $(k = 1,2,\ldots)$ the sequence of independent equimeasurable random variables with the finite moments of the first and second order $m_k, \sigma_k \neq 0$ the mean value and the dispersion of the random variable X_k, respectively, and

Then we have the following $C_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2}$.

Theorem 2. If

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{C_n^2}{n} = \sigma^2$$

where $\sigma = \bar{\sigma}_1$ is the dispersion of the variable $\bar{X}_1$, and $F_n(z)$ is the sequence of the cumulative distribution functions of the variables Z_n defined by

$$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k - M_k)}{C_n}$$

then we have

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int^{z} C^{-\frac{z^2}{2}} dz .$$

Резюме

Оценка дисперсии непрерывной случайной величины

В этой статье дается оценка дисперсии непрерывной случайной величины. Эта оценка связана с симметризацией функции по Шварцу [4].

Автор доказал следующую теорему:

Теорема 1. Если X является случайной величиной с плотностью $g(x)$ и дисперсией σ, X^- - случайной величиной с плотностью $g^-(x)$ и дисперсией σ^-, то $\sigma^- \leq \sigma$.

Эта теорема послужила для доказательства некоторой центральной предельной теоремы.

Пусть $\{X_k\}$, $(k = 1,2..)$ обозначает последовательность независимых сохраняющих площадей случайных величин с конечными моментами первого и второго порядка, m_k, $\sigma_k \neq 0$ обознвчает соответственно среднее значение и дисперсию случайной величины X_k и

$$C_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2}$$

Тогда имеет место

Теорема 2. Если

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{C_n^2}{n} = \sigma^2,$$

Где $\sigma = \sigma_1^-$ обозначает дисперсию величины X_1^-, то для последовательности $F_n(z)$ функции распределения случайных величин Z_n определенных уравнением

$$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} (X_k - m_k)}{C_n}$$

имеем

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$