Irena Lawera, Zenon Moszner

TWIERDZENIA DOTYCZĄCE REGULARNOŚCI KRZYWYCH POŁOŻONYCH NA POWIERZCHNI, II

Praca poświęcona jest kontynuacji [2] rozważań na temat zagadnienia w jakim stopniu regularność powierzchni, na której leży krzywa, wpływa na regularność tej krzywej.

Z twierdzenia 1([2]) dotyczącego regularności krzywych położonych na dowolnych powierzchniach dostatecznie regularnych w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej E_3, został wyciągnięty następujący wniosek dotyczący krzywej płaskiej:

- jeżeli

/1/ krzywa płaska C w przestrzeni E_3 ma równanie parametryczno-wektorowe $\bar{r} = \bar{r}(s)$, gdzie funkcja $\bar{r}(s)$ jest klasy C^n /n jest liczbą naturalną > 1/ w przedziale $[\alpha, \beta]$ oraz $|\bar{r}'(s)| \neq 0$ w każdym punkcie tego przedziału,

/2/ pierwsza krzywizna $\mathcal{H}(s)$ krzywej C w punkcie P_0 o parametrze s_0 z przedziału $[\alpha, \beta]$ jest klasy C^{n-1},

/3/ $\mathcal{H}(s_0) \neq 0$,

to krzywa C jest klasy C^{n+1} w punkcie P_0.

Nasuwa się pytanie: czy założenie /3/ jest istotne w tym wniosku ?

Z poniższych rozważań § 1 wynika, że dla n parzystego założenie to nie jest istotne, natomiast dla n nieparzystego już jest istotne.[x/]

W pracy [2] zostało również udowodnione twierdzenie 2 o charakterze globalnym, dotyczące krzywej położonej na dowolnej dostatecznie regularnej powierzchni oraz twierdzenie 3 o charakterze globalnym, dotyczące krzywej płaskiej. Ponieważ twierdzenie 3 było ogólniejsze od twierdzenia 2 dla krzywej płaskiej, nasunął się problem ujednolicenia tych twierdzeń. W wyniku tego ujednolicenia otrzymaliśmy twierdzenie udowodnione w §.2 niniejszej pracy.

---

x/ Rozważamy tu krzywiznę tzw. bezwzględną krzywej płaskiej zgodnie ze znaczeniem krzywizny w pracy [2]. Przy rozumieniu we wniosku pod krzywizną krzywizny względnej, wniosek byłby oczywiście natychmiastowy, dla każdego n, bez dyskutowanego założenia.

§ 1. Wobec przyjętego w cytowanym we wstępie wniosku założenia, że $r(s_0) \neq 0$ możemy przyjąć, iż krzywa ma w pewnym otoczeniu rozważanego punktu równanie $y=f(x)$. Wtedy

$$\varkappa(x) = \frac{|f''(x)|}{\sqrt{[1+(f'(x))^2]^3}},$$

a stąd

$$|f''(x)| = \varkappa(x)\sqrt{[1+(f'(x))^2]^3}.$$

Dla uzyskania stąd tezy wniosku dla n parzystego wystarczy udowodnić następujący lemat.

Lemat.

Jeżeli dla pewnej liczby k naturalnej funkcja $|g(x)|$ jest klasy C^{2k-1} w punkcie x_0 oraz funkcja $g(x)$ jest klasy C^{2k-2} w pewnym otoczeniu punktu x_0, to funkcja $g(x)$ jest klasy C^{2k-1} w punkcie x_0.

Dowód. Jeżeli $g(x_0) \neq 0$, teza lematu - wobec ciągłości funkcji w punkcie x_0 - jest oczywista.

Niech Δ będzie tym otoczeniem punktu x_0, w którym istnieje $|g(x)|^{(2k-1)}$ i funkcja $g(x)$ jest klasy C^{2k-2}. Udowodnimy, że dla każdego x z przedziału Δ spełniony jest związek:

$$/4/ \qquad |g(x)|^{(\lambda)} = \varepsilon(x)\, g^{(\lambda)}(x), \quad \text{gdzie} \quad \varepsilon^2(x) = 1, \quad \lambda = 1,2,\ldots,2k-2.$$

Niech $x_1 \in \Delta$. Gdy $g(x_1) \neq 0$, to związek /4/ w punkcie x_1 - wobec ciągłości funkcji w tym punkcie - jest prawdziwy. Jeżeli natomiast $g(x_1) = 0$, to

$$|g(x)|'_{x=x_1} = \lim_{h\to 0} \frac{|g(x_1+h)|}{h} = 0,$$

wobec stałości znaku licznika w powyższym ilorazie różnicowym, więc

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x_1+h)}{h} = 0$$

a stąd

$$/5/ \qquad g'(x_1) = |g(x)|'_{x=x_1} = 0$$

i związek /4/ jest prawdziwy dla $\lambda = 1$ i $x = x_1$.

Związek /4/ będzie również prawdziwy w punkcie x_1 dla $\lambda = 2,3,\ldots,2k-2$ w przypadku, kiedy pochodne funkcji $g(x)$ i $|g(x)|$ tego samego rzędu w punkcie x_1 są równe. Dla dalszego dowodu związku /4/ pozostaje więc rozpatrzyć przypadek, w którym $g(x_1) = 0$ oraz

$$/6/ \qquad \begin{cases} g^{(\nu)}(x_1) \neq |g(x)|^{(\nu)}_{x=x_1} & \text{dla pewnego } \nu \text{ czyniącego zadość warunkom } 2 \leq \nu \leq 2k-2, \text{ oraz} \\ g^{(\mu)}(x_1) = |g(x)|^{(\mu)}_{x=x_1} & \text{dla } \mu = 1,2,\ldots,\nu-1. \end{cases}$$

Wykażemy, że w tym przypadku funkcja $q(x)$ ma ekstremum w punkcie x_1.
Rozważmy dwa podprzypadki:

$$/6a/\quad \begin{cases} q^{(\beta)}(x_1) = |q(x)|^{(\beta)}_{x=x_1} \neq 0 & \text{dla pewnego } \beta \text{ czyniącego zadość warunkom } 2 \leq \beta \leq v, \text{ oraz} \\ q^{(\xi)}(x_1) = |q(x)|^{(\xi)}_{x=x_1} = 0 & \text{dla } \xi = 1,2,\ldots,\beta-1 \end{cases}$$

lub

$$/6b/\quad q^{(\xi)}(x_1) = |q(x)|^{(\xi)}_{x=x_1} = 0 \qquad \text{dla } \xi = 1,2,\ldots, v-1.$$

<u>Ad /6a/</u>. Gdy β jest liczbą parzystą, to funkcja $q(x)$ posiada ekstremum lokalne w punkcie x_1.

Udowodnimy obecnie następujący wniosek $/W_1/$:

\- jeżeli

$$/7/\quad |q(x_1)| = |q(x)|'_{x=x_1} = |q(x)|''_{x=x_1} = \ldots\ldots = |q(x)|^{(\alpha-1)}_{x=x_1} = 0$$

przy pewnym α nieparzystym i $1<\alpha \leq 2k-1$, to

$$/8/\quad |q(x)|^{(\alpha)}_{x=x_1} = 0$$

Rozwinięcie funkcji $|q(x)|$ w szereg Taylora aż do wyrazu $\alpha-1$ w punkcie x_1 będzie miało postać:

$$|q(x_1+h)| = \frac{h^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\;|q(x)|^{(\alpha-1)}_{x=x_1+\theta h}$$

gdzie $0<\theta<1$.

Stąd $|q(x)|^{(\alpha-1)}_{x=x_1+\theta h} \geqslant 0$ dla każdego h dostatecznie małego i θ stosownie do niego dobranego. Ponieważ prócz tego funkcja $|q(x)|^{(\alpha-1)}$ - z założenia lematu - posiada pochodną w punkcie x_1 $(1<\alpha<2k-1)$, więc

$$|q(x)|^{(\alpha)}_{x=x_1} = \lim_{h\to 0} \frac{|q(x)|^{(\alpha-1)}_{x=x_1+\theta h}}{\theta h} = 0.$$

Niech obecnie β będzie liczbą nieparzystą. Przyjmując w udowodnionym wniosku $/W_1/$ $\alpha=\beta$, otrzymamy wobec /8/ sprzeczność z założeniem /6a/. Rozważany przez nas przypadek /6a/ nie może więc zachodzić dla β nieparzystego.

<u>Ad /6b/</u>. Gdy v jest liczbą nieparzystą, funkcja $|q(x)|$ spełnia warunek /7/ dla $\alpha=v$ a zatem na podstawie wniosku $/W_1/$ zachodzi:

$$/8a/\quad |q(x)|^{(v)}_{x=x_1} = 0.$$

Rozwijając w szereg Taylora funkcje $q(x)$ oraz $|q(x)|$ do wyrazu v w punkcie x_1, uwzględniając przypadek, który rozważamy i porównując lewe strony otrzymanych związków, otrzymamy:

/9/ $$\left|q(x)\right|^{(v)}_{x=x_1+\theta h} = \left|q^{(v)}(x_1 + \theta_1 h)\right|$$

gdzie $0 < \theta < 1$ oraz $0 < \theta_1 < 1$.

Przechodząc w związku /9/ z h do zera, mamy, wobec tego, że $2 \leq v \leq 2k-2$ oraz, że zachodzi /8a/,

$$0 = \left|q(x)\right|^{(v)}_{x=x_1} = \left|q^{(v)}(x_1)\right| = q^{(v)}(x_1),$$

a więc sprzeczność z /6/. Sprzeczność z /6/ otrzymamy w ten sam sposób, gdy v będzie liczbą parzystą oraz gdy

$$q^{(v)}(x_1) = 0.$$

Pozostaje rozpatrzyć przypadek, gdy v występujące w /6/ oraz w /6b/ będzie liczbą parzystą oraz gdy $q^{(v)}(x_1) \neq 0$.

W tym jednak przypadku funkcja $q(x)$ posiada ekstremum lokalne w punkcie x_1.

A zatem udowodniliśmy wniosek /W_2/:

- jeżeli funkcja $q(x)$ spełnia warunek /6/ oraz $q(x_1) = 0$, to funkcja $q(x)$ posiada ekstremum lokalne w punkcie x_1.

Stąd - wobec $q(x_1) = 0$ - $q(x) \geqslant 0$ czyli $q(x) = |q(x)|$ w pewnym otoczeniu punktu x_1 lub $q(x) \leqslant 0$ czyli $q(x) = -|q(x)|$ w pewnym otoczeniu tego punktu, a więc związek /4/ jest prawdziwy w rozpatrywanym przypadku /6/. Dowód związku /4/ został więc zakończony w całej ogólności. Obecnie przystąpimy do dowodu tezy naszego lematu w przypadku gdy $q(x_0) = 0$.

Niech $\bar{x}$ będzie dowolnym punktem z otoczenia Δ.

Jeżeli $q(\bar{x}) \neq 0$, to wobec ciągłości funkcji $q(x)$ w punkcie $\bar{x}$ i założenia lematu - istnieje $q^{(2k-1)}(\bar{x})$. Jeżeli natomiast $q(\bar{x}) = 0$, to dla punktu $\bar{x}$ jest również prawdziwy związek /5/, a więc pozostaje rozważyć następujące przypadki:

/10/ $$\begin{cases} q^{(i)}(\bar{x}) \neq \left|q(x)\right|^{(i)}_{x=\bar{x}} & \text{dla pewnego } i \text{ czyniącego zadość warunkom } 2 \leq i \leq 2k-2, \text{ oraz} \\ q^{(j)}(\bar{x}) = \left|q(x)\right|^{(j)}_{x=\bar{x}} & \text{dla } j = 1,2,\ldots, i-1; \end{cases}$$

lub

/11/ $$\begin{cases} q^{(i)}(\bar{x}) = \left|q(x)\right|^{(i)}_{x=\bar{x}} \neq 0 & \text{dla pewnego } i \text{ czyniącego zadość warunkom } 2 \leq i \leq 2k-2 \text{ oraz} \\ q^{(j)}(\bar{x}) = \left|q(x)\right|^{(j)}_{x=\bar{x}} = 0 & \text{dla } j = 1,2,\ldots, i-1, \text{ oraz} \\ q^{(j)}(\bar{x}) = \left|q(x)\right|^{(j)}_{x=\bar{x}} & \text{dla } j = i+1,\ldots, 2k-2; \end{cases}$$

lub

/12/ $$q^{(j)}(\bar{x}) = \left|q(x)\right|^{(j)}_{x=\bar{x}} = 0 \quad \text{dla } j = 1,2,\ldots, 2k-2.$$

Przypadek /10/ z warunkiem $q(\bar{x})=0$ sprowadza się do przypadku /6/ z warunkiem $q(x_1)=0$ gdy w nim przyjmiemy $v=i$, $\mu=j$, $x_1=\bar{x}$, a zatem, wobec wniosku $/W_2/$ funkcja $q(x)$ posiada ekstremum lokalne w punkcie $\bar{x}$. W przypadku /11/ z warunkiem $q(\bar{x})=0$, gdy i jest liczbą nieparzystą, funkcja $|q(x)|$ spełnia warunek /7/ dla $\alpha=i$, $x_1=\bar{x}$, a zatem wobec wniosku $/W_1/$:

$$|q(x)|^{(i)}_{x=\bar{x}}=0,$$

co jest sprzeczne z /11/. Gdy i występujące w przypadku /11/ jest liczbą parzystą, to funkcja $q(x)$ posiada ekstremum lokalne w punkcie $\bar{x}$. Zbierając powyższe wyniki, otrzymane przy rozważaniu przypadków /10/ i /11/, otrzymamy wniosek $/W_3/$:

- w przypadkach /10/ lub /11/ funkcja $q(x)$ posiada ekstremum lokalne w punkcie $\bar{x}$ i wtedy $q(x)=|q(x)|$ w pewnym otoczeniu punktu $\bar{x}$ lub $q(x)=-|q(x)|$ w pewnym otoczeniu punktu $\bar{x}$.

Stąd i z założeń lematu istnieje $q^{(2k-1)}(\bar{x})$ oraz

$$q^{(2k-1)}(\bar{x})=\varepsilon(\bar{x})\,|q(x)|^{(2k-1)}_{x=\bar{x}} \quad \text{gdzie} \quad \varepsilon^2(\bar{x})=1.$$

Obecnie udowodnimy istnienie $q^{(2k-1)}(\bar{x})$ gdy zachodzi przypadek /12/ oraz $q(\bar{x})=0$. Ponieważ w tym przypadku funkcja $|q(x)|$ spełnia warunek /7/ dla $\alpha=2k-1$ a zatem wobec wniosku $/W_1/$:

$$/13/ \qquad |q(x)|^{(2k-1)}_{x=\bar{x}}=0.$$

Z /12/ i /13/ otrzymamy:

$$|q(x)|^{(2k-1)}_{x=\bar{x}}=\lim_{h\to 0}\frac{|q(x)|^{(2k-2)}_{x=\bar{x}+h}}{h}=0,$$

a ponieważ w przedziale Δ zachodzi związek /4/, więc

$$\lim_{h\to 0}\frac{q^{(2k-2)}(\bar{x}+h)}{h}=0,$$

a stąd, wobec /12/, wynika, że istnieje $q^{(2k-1)}(\bar{x})$ oraz

$$/14/ \qquad q^{(2k-1)}(\bar{x})=0.$$

Funkcja $q(x)$ ma więc pochodną /2k-1/-go rzędu w każdym punkcie przedziału Δ oraz w każdym punkcie tego przedziału zachodzi związek:

$$/15/ \qquad q^{(2k-1)}(x)=\varepsilon(x)\,|q(x)|^{(2k-1)} \quad \text{gdzie} \quad \varepsilon^2(x)=1.$$

Pozostaje do udowodnienia ciągłość funkcji $q^{(2k-1)}(x)$ w punkcie x_0 gdy $q(x_0) = 0$ w rozważanych przypadkach /10/, /11/ i /12/ /dla $\bar{x} = x_0$/. W przypadku /10/ i /11/ - wobec założeń lematu i wniosku /W_3/ dla $\bar{x} = x_0$ - teza dowodzona będzie prawdziwa. Gdy $q(x_0) = 0$ i zachodzi przypadek /12/, to z /13/ i /14/ dla punktu $\bar{x} = x_0$ otrzymamy związek:

$$q^{(2k-1)}(x_0) = |{}_1(x)|^{(2k-1)}_{x=x_0} = 0.$$

Ale stąd wobec założenia klasy C^{2k-1} funkcji $|q(x)|$ w punkcie x_0 oraz z /15/ mamy:

$$\lim_{x\to x_0} q^{(2k-1)}(x) = \lim_{x\to x_0}\left\{\varepsilon(x)\,|q(x)|^{(2k-1)}\right\} = 0 = q^{(2k-1)}(x_0)$$

co dowodzi ciągłości funkcji $q^{(2k-1)}(x)$ w punkcie x_0 i w tym przypadku. Tym samym dowód lematu został zakończony.

Uwaga 1.

Założenie, że funkcja $q(x)$ jest klasy C^{2k-2} w otoczeniu punktu x_0, a nie tylko w samym punkcie jest istotne w udowodnionym lemacie. Pokażemy to dla $k = 1$. Rozważmy funkcję:

$$q(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \text{ wymiernego} \\ -x^2 & \text{dla } x \text{ niewymiernego.} \end{cases}$$

Funkcja $|q(x)|$ jest klasy C^{∞} dla dowolnego x, funkcja $q(x)$ ma pochodną dla $x = 0$, jest więc w tym punkcie klasy C^0 /nie będąc klasy C^0 w otoczeniu tego punktu/, natomiast nie jest klasy C^1 w tym punkcie /bo pochodna funkcji $g(x)$ nie istnieje w żadnym otoczeniu punktu 0/.

Uwaga 2.

Poniższy przykład pokazuje, że dla n nieparzystego założenie /3/ jest istotne w podanym we wstępie wniosku. Funkcja

$$f(x) = |x|\, x^{2k-1} \qquad \text{dla } x \in [-1,1] \text{ i } k \text{ naturalnego}$$

jest klasy C^{2k+1} dla każdego x, oraz pierwsza krzywizna

$$\varkappa(x) = \frac{(2k+2)(2k+1)\,x^{2k}}{\sqrt{\left(1 + (2k+2)\,x^{4k+2}\right)3}},$$

krzywej K o równaniu $y = f(x)$ jest klasy C^{2k} /a nawet C^{∞}/ dla każdego x, natomiast funkcja $f(x)$, a więc i krzywa K, nie jest klasy C^{2k+2} w punkcie 0. Podany tu przykład funkcji $f(x)$ pokazuje też, że założenie nieparzystości klasy regularności występującej w tezie lematu jest istotne.

§ 2. Obecnie udowodnimy twierdzenie o charakterze globalnym, z którego wynikają analogiczne dwa twierdzenia przedstawione w pracy [2] /tw.2 i 3/.

Twierdzenie

Jeżeli

/16/ krzywa C w przestrzeni E_3 ma równanie parametryczno-wektorowe $\bar{r} = \bar{r}(s)$, gdzie funkcja $\bar{r}(s)$ jest klasy C^n /n jest liczbą naturalną $>$ 1/ w przedziale $[\alpha, \beta]$ oraz $|\bar{r}'(s)| \neq 0$ w każdym punkcie tego przedziału.

/17/ krzywa C leży na powierzchni o równaniu parametryczno-wektorowym $\bar{\varrho} = \bar{\varrho}(u,v)$ dla (u,v) należącego do obszaru D, gdzie $\bar{\varrho}(u,v)$ jest klasy C^{n+1} w obszarze D,

/18/ wszystkie punkty należące do krzywej C są punktami regularnymi powierzchni,

/19/ pierwsza krzywizna $\varkappa(s)$ krzywej C w każdym punkcie przedziału $[\alpha, \beta]$ jest klasy C^{n-1},

to krzywa C jest klasy C^{n+1} w niemal każdym punkcie przedziału $[\alpha, \beta]$, tzn. zbiór tych punktów przedziału $[\alpha, \beta]$, w których krzywa C nie jest klasy C^{n+1} jest nigdziegęsty w $[\alpha, \beta]$.

Dowód. Na podstawie założenia /16/, /17/ i /18/ krzywizna geodezyjna $\varkappa_q(s)$ krzywej C jest funkcją ciągłą w przedziale $[\alpha, \beta]$. Stąd oraz z założenia/19/ wnioskujemy, że zbiory:

$$Z_1 \overset{df}{=} (E)_s (s \in [\alpha, \beta] \quad \text{i} \quad \varkappa_q(s) = 0$$

$$Z_2 \overset{df}{=} (E)_s (s \in Z_1 \quad \text{i} \quad \varkappa(s) = 0$$

są domknięte. W każdym punkcie zbioru $[\alpha, \beta] \setminus Z_1$, oraz w każdym punkcie wewnętrznym zbioru $Z_1 \setminus Z_2$ i w każdym punkcie wewnętrznym zbioru Z_2 krzywa C jest klasy C^{n+1} /[2] tw.1/. Zbiór U tych punktów przedziału $[\alpha, \beta]$, w których krzywa C nie jest klasy C^{n+1} zawiera się więc w sumie mnogościowej brzegu $B([\alpha,\beta] \setminus Z_1)$ zbioru $[\alpha, \beta] \setminus Z_1$, brzegu $B(Z_1 \setminus Z_2)$ zbioru $Z_1 \setminus Z_2$ oraz brzegu $B(Z_2)$ zbioru Z_2. Ponieważ jednak

$$B([\alpha, \beta] \setminus Z_1) \subset B(Z_1) \cup \{\alpha\} \vee \{\beta\} \quad \text{oraz}$$

$$B(Z_1 \setminus Z_2) \subset B(Z_1) \cup B(Z_2)$$

więc ostatecznie zbiór U zawiera się w sumie $B(Z_1) \vee B(Z_2) \cup \{\alpha\} \cup \{\beta\}$. Ponieważ brzeg zbioru domkniętego jest zbiorem nigdziegęstym /[1] str.38/ oraz suma mnogościowa skończonej ilości zbiorów nigdziegęstych też jest zbiorem nigdziegęstym /[1] str.37/, więc zbiór U, jako zawarty w zbiorze nigdziegęstym, jest też zbiorem nigdziegęstym, c.n.o.

PRACE CYTOWANE

[1] C.Kuratowski "Topologie", tom I, 1952.

[2] I.Lawera "Twierdzenia dotyczące regularności krzywych położonych na powierzchni" cz.I - złożone do druku w Zeszytach Naukowych WSP w Katowicach.

RÉSUMÉ

Théorèmes concernants la régularité des courbes situées sur la surface. II

Dans la note [2] a été demontré le colloraire suivant:

- si l'on suppose que

/1/ la courbe plane C dans l'espace euclidien E_3 à 3 dimensions a l'équation $\bar{r} = \bar{r}(s)$ pour les $s \in [\alpha, \beta]$, où $\bar{r}(s)$ est une fonction de classe $C^n(n > 1)$ en tout point de l'intervalle $[\alpha, \beta]$ et $|\dot{\bar{r}}(s)| \neq 0$ en tout point de l'intervalle $[\alpha, \beta]$,

/2/ la courbure $\varkappa(s)$ de la courbe C est une fonction de classe C^{n-1} en point P_o de paramètre s_o de l'intervalle $[\alpha, \beta]$,

/3/ $\varkappa(s_o) \neq 0$,

dans ce cas la courbe C est une fonction de classe C^{n+1} en point P_o. On montre dans cette note que la supposition /3/ du colloraire ci-dessus n'est pas essentielle pour n paire, mais il devient déjà essentielle pour n impaire.
Outre cela on a démontre le théorème suivant:

- si la courbe plane C remplit la supposition /1/ du colloraire ci-dessus et si

/4/ elle est située sur une surface à l'équation $\bar{\rho} = \bar{\rho}(u,v)$ pour les (u,v) appartenant au domaine D, où $\bar{\rho}(u,v)$ est une fonction de classe C^{n+1} en tout point du domaine D,

/5/ tous les points de la courbe C sont des points réguliers de cette surface,

/6/ la courbure $\varkappa(s)$ de la courbe C est une fonction C^{n-1} en tout point de l'intervalle $[\alpha, \beta]$,

dans ce cas la courbe C est de classe C^{n+1} en presque tout point de l'intervalle $[\alpha, \beta]$, c'est-à-dire l'ensemble des points de l'intervalle $[\alpha, \beta]$, où la courbe n'est pas de classe C^{n+1}, est non-dense dans $[\alpha, \beta]$.

Ce théorème est une généralisation des théorèmes 2 et 3 de la note [2].

Резюме

Теоремы относящиеся к регулярности кривых, лежащих на поверхности II

В работе [2] доказано следующее следствие:

- если

/1/ плоская кривая C в трёхмерном евклидовом пространстве E_3 имеет векторно-параметрическое уравнение $\bar{r} = \bar{r}(s)$, где функция $\bar{r}(s)$ является класса C^n /n - натуральное число больше единицы / в интервале $[\alpha, \beta]$ и $|\bar{r}'(s)| \neq 0$ в каждой точке этого интервала.

/2/ первая кривизна $\varkappa(s)$ кривой C в точке P_0 соотвествующей параметру s_0 из интервала $[\alpha, \beta]$ является класса C^{n-1},

/3/ $\varkappa(s_0) \neq 0$,

то кривая C является класса C^{n+1} в точке P_0.

В данной работе показано, что предположение /3/ в указанном выше следствии для чётного n несущественно, зато для n нечётного существенно.

Доказана также теорема:

- если кривая выполняет предположение /1/ и

/4/ кривая C лежит на поверхности с векторно-параметрическим уравнением $\bar{\varrho} = \bar{\varrho}(u, v)$ для (u, v) принадлежащего к области D, где $\bar{\varrho}(u, v)$ является класса C^{n+1} в области D,

/5/ все точки, принадлежащие к кривой C являются регулярными точками поверхности,

/6/ первая кривизна $\varkappa(s)$ кривой C в каждой точке интервала $[\alpha, \beta]$ является класса C^{n-1},

то кривая C является класса C^{n+1} почти в каждой точке интервала $[\alpha, \beta]$, то значит множество этих точек интервала $[\alpha, \beta]$, в которых кривая не является класса C^{n+1} является нигде не плотным в интервале $[\alpha, \beta]$.

Эта теорема является обобщением теорем 2 и 3 в работе [2]