Józef Tabor

JEDNOZNACZNA ORIENTOWALNOSC GRUP L^s_n

I. Wstep. Niech będzie dana pseudogrupa przekształceń G_r /[1] str.25/ złożona z przekształceń $\eta^i = \varphi^i(\xi^1,\dots,\xi^n)$ dla $i = 1,2,\dots n$ /krótko notowanych $\eta^i = \varphi^i(\xi)$ /klasy C^r w otoczeniu punktu $\xi_0 = (\xi^1_0, \xi^2_0, \dots \xi^n_0)$, o jakobianie $J = \det \frac{\partial \varphi^i}{\partial \xi^j}$ /$i,j = 1,2,\dots n$/ różnym od zera w każdym punkcie $\xi = (\xi^1, \xi^2 \dots \xi^n)$ rozważanego otoczenia punktu ξ_0. Każdemu takiemu przekształceniu można przyporządkować układ liczb:

(1) $$A^i_j,\ A^i_{j_1,j_2}, \dots,\ A^i_{j_1,j_2,\dots j_s} \qquad (i,j,j_1,\dots,j_s = 1,2,\dots n), \quad s \leq r$$

oznaczany w dalszym ciągu A, gdzie

$$A^i_{j_1,\dots,j_k} \overset{df}{=} \frac{\partial \xi^i}{\partial \xi^{j_k}\dots\partial \xi^{j_1}}(\xi_0)$$

W zbiorze układów liczb postaci (1) określamy działanie „$\times$" w sposób następujący. Niech będą dane dwa układy A i B postaci (1). Na tle każdego z tych układów utwórzmy układ n wielomianów n-zmiennych:

(2) $$\omega^i(\xi^1,\dots,\xi^n) = A^i_j\, \xi^j + \frac{1}{2!} A^i_{j_1,j_2}\xi^{j_1}\xi^{j_2} + \dots + \frac{1}{s!} A^i_{j_1,\dots,j_s}\xi^{j_1},\dots,\xi^{j_s}$$

(3) $$\omega^i(\xi^1,\dots,\xi^n) = B^i_j\, \xi^j + \frac{1}{2!} B^i_{j_1,j_2}\xi^{j_1}\xi^{j_2} + \dots + \frac{1}{s!} B^i_{j_1,\dots,j_s}\xi^{j_1},\dots,\xi^{j_s}$$

Uwaga.
Tu i w dalszym ciągu przyjmujemy umowę sumacyjną Einsteina, tzn. należy sumować od 1 do n/ względem tych samych wskaźników występujących na różnych poziomach.
Wielomiany (3) podstawmy w miejsce zmiennych do wielomianów (2) oraz odrzućmy składniki stopnia wyższego niż s. Współczynniki tak utworzonych wielomianów w kolejności występowania analogicznej jak np. w (2) przyjmiemy za $A \times B$. Zbiór układów (1) z tak określonym działaniem tworzy grupę /patrz [2] /, którą oznaczać będziemy L^s_n. Zgodnie z przyjętą definicją związek $A \times B = C$ oznacza, że:

$$C^i_j = A^i_k\, B^k_j$$

$$(4)\qquad C^i_{j_1,j_2} = A^i_{k_1,k_2} B^{k_1}_{j_1} B^{k_2}_{j_2} + A^i_k B^k_{j_1,j_2}$$

$$C^i_{j_1,j_2,j_3} = A^i_{k_1,k_2,k_3} B^{k_1}_{j_1} B^{k_2}_{j_2} B^{k_3}_{j_3} + A^i_{L_1,L_2} B^{L_1}_{j_1} B^{L_2}_{j_2,j_3} + A^i_{m_1,m_2} B^{m_1}_{j_1,j_3} B^{m_2}_{j_2} + A^i_{p_1,p_2} B^{p_1}_{j_1,j_2} B^{p_2}_{j_3} + A^i_k B^k_{j_1,j_2,j_3}$$

Związki (4) mają budowę wzorów na pochodne cząstkowe funkcji złożonej, co ułatwia ich tworzenie.

Jeżeli za wyjściową pseudogrupę przekształceń przyjąć pseudogrupę G^{∞} złożoną z przekształceń klasy C^{∞} w otoczeniu punktu ξ_o, o nie znikającym jakobianie, to zbiór ciągów nieskończonych

(5) $A^i_j, A^i_{j_1,j_2}, \dots, A^i_{j_1,\dots,j_k}, \dots, \quad (i,j_1,j_2,\dots,j_k,\dots = 1,2,\dots n)$ oznaczanych w dalszym ciągu też krótko A, z działaniem „$\circ$" podobnie jak poprzednio określonym /z tym tylko, że posługujemy się "wielomianami nieskończonymi" i w utworzonym "wielomianie" nie odrzuca się żadnych składników/ stanowi grupę, którą oznaczać będziemy L^{∞}_n. Podobnie jak w przypadku L^s_n spełnione są związki (4).

Grupy L^s_n oraz L^{∞}_n występują w teorii obiektów geometrycznych przy definiowaniu specjalnych obiektów geometrycznych /patrz [1]./.

Przypomnijmy następującą definicję:

Grupę G nazywamy orientowalną, jeśli zawiera podgrupę o indeksie dwa. Podgrupę tą nazywamy wtedy orientującą grupę G. Jeśli grupa G nie zawiera podgrupy ją orientującej, to grupę G nazwiemy nieorientowalną. Jeśli grupa G zawiera co najmniej dwie podgrupy orientujące grupę G, to mówimy że grupa G jest orientowalna niejednoznacznie.

W nocie [3] rozważano m.in. zagadnienie równoważności dwu definicji biskalarów:

Def.1. Biskalarem nazywamy obiekt geometryczny postaci $\Omega = a\omega + b$, gdzie jest ilorazem W-gęstości przez G-gęstość o tych samych wagach, natomiast a, b są skalarami.

Def.2. Biskalarem nazywamy obiekt geometryczny o jednej współrzędnej, który przyjmuje co najwyżej dwie różne wartości.

W nocie tej udowodniono twierdzenie:

Definicje 1 i 2 biskalarów /określonych na tej samej grupie E/ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy grupa E nie jest orientowalna, albo jest orientowalna jednoznacznie.

W związku z przytoczonym twierdzeniem zostało postawione przez Z.Mosznera pytanie, czy grupy L^s_n i L^{∞}_n są orientowalne jednoznacznie? W niniejszej nocie pokazuję, że odpowiedź na to pytanie jest pozytywna. Wynika stąd, że definicje 1 i 2 biskalara są równoważne dla biskalarów określonych na grupie L_n^s dla $s = 1,2,\dots$ lub na grupie L_n^∞.

II. Udowodnię twierdzenie.

Grupy L_n^s dla $s = 1,2,\dots$ oraz grupa L_n^∞ są jednoznacznie orientowalne.

Dowód.

Zauważmy na wstępie, że każdy zadany ciąg /skończony lub nie/ liczb

$$A_j^i,\ A_{j_1,j_2}^i, \dots A_{j_1,j_2\dots j_s}, \dots$$

możemy traktować jako układ pochodnych cząstkowych odpowiednio dobranego układu n funkcji n-zmiennych /patrz [4] /, a więc w konsekwencji, przy założeniu, że det $(A_j^i) \neq 0$, jako układ postaci (1) względnie (5). Wynika stąd, że związki (4) są równoważne definicji działania „x".

Bezpośrednio z definicji działania „x" w grupie $L_{n_1}^s$ /L_n^∞/ wynika, że zbiór układów postaci (1) /postaci (5) / dla których det $(A_j^i) > 0$ stanowi podgrupę orientującą grupę L_n^s /L_n^∞/. Podgrupę tą oznaczać będziemy $\overset{+}{L}{}_n^s$ /$\overset{+}{L}{}_n^\infty$/. Wykażemy w dalszym ciągu, że podgrupa $\overset{+}{L}{}_n^s$ /$\overset{+}{L}{}_n^\infty$/ jest jedyną podgrupą orientującą grupę L_n^s / L_n^∞ /

W tym celu wystarczy wykazać /patrz [3] /, że grupa $\overset{+}{L}{}_n^s$ /$\overset{+}{L}{}_n^\infty$/ jest generowana przez zbiór kwadratów /w sensie działania grupowego/ elementów grupy $\overset{+}{L}{}_n^s$ /$\overset{+}{L}{}_n^\infty$/, tzn., że każdy element grupy $\overset{+}{L}{}_n^s$ /$\overset{+}{L}{}_n^\infty$/ może być przedstawiony w postaci iloczynu kwadratów elementów L_n^s /L_n^∞/.

Niech będzie dany dowolny ciąg C /skończony lub nie/:

$C_j^i,\ C_{j_1,j_2}^i, \dots C_{j_1,j_2,\dots j_k} \dots$ gdzie det $(C_j^i) > 0$

Z rozważań poczynionych w nocie [3] wynika, że każda macierz kwadratowa o dodatnim wyznaczniku może być przedstawiona w postaci iloczynu kwadratów macierzy. Korzystając ponadto z faktu, że macierz jednostkowa jest elementem neutralnym dla iloczynu macierzy wnioskujemy, że C_j^i można przedstawić w postaci:

$$C_j^i = D_{k_1}^i D_{k_2}^{k_1} A_{k_3}^{k_2} A_{k_4}^{k_3} \dots A_{k_{2p+1}}^{k_{2p}} A_j^{k_{2p+1}} \tag{6}$$

gdzie $[D_{k_1}^i]$ jest macierzą jednostkową, tzn.

$$D_{k_1}^i = \delta_{k_1}^i \qquad /\delta \text{ symbol Kroneckera/.} \tag{7}$$

Dla $s = 1$ twierdzenie zostało związkiem (6) udowodnione. W dalszym ciągu zakładamy więc, że $s > 1$.

Zadanie nasze sprowadza się do wyznaczenia takich elementów

$D, \underset{1}{A}, \underset{2}{A}, \dots, \underset{p}{A}$ grupy L_n^s /L_n^∞/, że

$$C = D \times D \times \underset{1}{A} \times \underset{1}{A} \times \underset{2}{A} \times \underset{2}{A} \times \dots \times \underset{p}{A} \times \underset{p}{A} \tag{8}$$

Przyjmijmy za D^i_j, A^i_{1j}, A^i_{2j}, ... A^i_{pj} odpowiednio elementy spełniające związek (6) oraz przyjmijmy, że $A^i_{l j_1, j_2, \dots j_k}$ są dowolnie ustalone dla $k > 1$, $l = 1,2,\dots p$, $i, j_1, j_2, \dots j_k = 1,2, \dots n$.

Wyznaczać będziemy kolejne $D^i_{j_1,j_2}$, $D^i_{j_1,j_2,j_3}$, ... $D^i_{j_1,j_2,\dots j_k}$, ... tak, by spełniony był związek (8). Ze względu na to, że L^s_n /L^∞_n/ jest grupą, z (8) otrzymujemy związek równoważny:

$$C * A_p^{-1} * A_p^{-1} * \dots * A_2^{-1} * A_2^{-1} * A_1^{-1} * A_1^{-1} = D * D$$

Oznaczając lewą stronę tego związku przez P mamy:

(9) $$P = D * D$$

Z (9) wyznaczymy D traktując P jako dane. Wyznaczmy najpierw $D^i_{j_1,j_2}$. Na podstawie (4) mamy:

$$P^i_{j_1,j_2} = D^i_{k_1,k_2} D^{k_1}_{j_1} D^{k_2}_{j_2} + D^i_k D^k_{j_1,j_2}$$

Ze względu na (7) z powyższego związku otrzymujemy:

$$P^i_{j_1,j_2} = D^i_{j_1,j_2} + D^i_{j_1,j_2}$$

a więc

$$D^i_{j_1,j_2} = \frac{1}{2} P^i_{j_1,j_2}$$

Mając dane D^i_j, $D^i_{j_1,j_2}$, ... $D^i_{j_1, \dots j_{l-1}}$ wyznaczymy $D^i_{j_1,\dots j_l}$ podobnym do poprzedniego rozumowaniem. Na podstawie związków (4) z (9) otrzymujemy:

$$P^i_{j_1,j_2,\dots j_l} = D^i_{k_1,k_2,\dots k_l} D^{k_1}_{j_1} D^{k_2}_{j_2} \dots D^{k_l}_{j_l} + D^i_k D^k_{j_1,j_2,\dots j_l}$$

Łatwo wykazać indukcyjnie, że po prawej stronie wypisanego związku tylko w dwóch składnikach będą występować czynniki postaci $D^i_{j_1,j_2,\dots j_l}$ /tzn. pochodne cząstkowe rzędu l/.

Przenieśmy wszystkie pozostałe składniki na lewą stronę. Otrzymamy związek postaci

$$W^i_{j_1,j_2,\dots j_l} = D^i_{k_1,k_2,\dots k_l} D^{k_1}_{j_1} D^{k_2}_{j_2} \dots D^{k_l}_{j_l} + D^i_k D^k_{j_1,j_2,\dots j_l} ,$$

gdzie $W^i_{j_1,j_2,\dots j_l}$ jest dane. Korzystając z (7) i z ostatniego związku otrzymujemy:

$$W^i_{j_1,j_2,\dots j_l} = D^i_{j_1,j_2,\dots j} + D^i_{j_1,j_2,\dots j_l} .$$

a więc

$$D^{i}_{j_1,j_2,\ldots,j_l} = \frac{1}{2} W^{i}_{j_1,j_2,\ldots,j_l}$$

Tym postępowaniem możemy więc kolejno wyznaczyć D^i_j, $D^i_{j_1,j_2}$, ... $D^i_{j_1,j_2,\ldots,j_k}$, ... w ilości skończonej lub nie, w zależności od tego, czy rozpatrujemy grupę L^s_n czy L^{∞}_n. Ze sposobu ich wyznaczania widoczne jest, że spełniają one związki (4) utworzone dla związku (9). Ze względu na fakt, że związki (4) są równoważne definicji działania „$*$" oznacza to, że spełniony jest związek (8), co kończy dowód.

<u>Uwaga w korektach</u>

Niech $\bar{\bar{G}}_1$ będzie grupą różnowartościowych przekształceń klasy C^1 przestrzeni R^1 na przestrzeń R^1, a G^{+}_1 podgrupę $\bar{G}_1$ funkcji o dodatniej pochodnej. Łatwo widać, że $\dot{G}_1$ jest podzbiorem znanej, klasycznej w rozważaniach geometrii różniczkowej, pseudogrupy G_1 /zob. [1] str.26/.

Prostym wnioskiem z twierdzenia M.Kuczmy /patrz [5]/ jest stwierdzenie, że zbiór kwadratów /w sensie składania/ funkcji z $\bar{G}_1$ generuje grupę G^{+}_1. Oznacza to, że /patrz [3]/ grupa $\bar{G}_1$ jest jednoznacznie orientowalna. W przypadku przestrzeni więcej wymiarowej powyższe stwierdzenie pozostaje problemem otwartym.

PRACE CYTOWANE

[1] S.Gołąb, Rachunek tensorowy, /1966/.

[2] J.Haantjes, G.Laman, On the definition of geometric objects, Indagationes Math. 15 /1953/, str. 208-215.

[3] Z.Moszner et J.Tabor, Sur la notion du biscalaire, Ann.Pol,Math.XIX 1967

[4] A.Pliś and T.Ważewski, Functions with all partial derivatives arbitrarily prescribed at a point, Ann. Pol. Math. XII /1962/, str. 155-157.

[5] M.Kuczma, On squares of differentiable function, Ann.Pol.Math./w druku/.

SUMMARY

The unique orientability of the group L_n^s.

In this paper we prove that for each group L_n^s $/L_n^\infty/$ there exist one and only one subgroup with the index equal to 2 - which means that such a group is uniquely orientable. This result is connected with the problem of the equivalence of various definitions of the geometric object called biscalar.

Резюме

Однозначная ориентируемость групп L_n^s

В этой работе доказывается, что группа L_n^s $/L_n^\infty/$ является однозначно ориентируемой, то есть существует в ней точно одна подгруппа с индексом 2. Этот факт применяется при определении геометрических объектов, названных бискалярами.