Adam Wachułka

O WARTOŚCI ŚREDNIEJ DLA ROZWIĄZAŃ PEWNYCH RÓWNAŃ ELIPTYCZNYCH P-RZĘDU

1. W pracy [3] rozważaliśmy problem wartości średniej dla rozwiązań równania $L^2u(X) = 0$ w przypadku dwu i n-wymiarowym. W pracy obecnej zbadamy to zagadnienie dla rozwiązań równania

(1) $$L^p u(x_1, x_2, x_3) = 0 \qquad p \text{ liczba całk.dod.} \geq 2,$$

gdzie Lu jest operatorem eliptycznym.

$$Lu = \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} u_{x_i x_k}(X) ; \quad L^2u = LLu , \ \dots \ L^p u = LL^{p-1}u$$

$a_{ik} = a_{ki}$, $X(x_1, x_2, x_3)$.

Aby nie odsyłać czytelnika stale do cytowanej pracy [3], powtarzamy pewne jej fragmenty.

Udowodnimy, że rozwiązanie równania (1) spełniają twierdzenie o wartości średniej analogiczne do odpowiedniego twierdzenia dla rozwiązań równania p-harmonicznego [1]

$$\Delta^p u(X) = 0$$

(2) $$\frac{1}{4\pi R^2} \iint_S u \, dS = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\Delta^i u(X_0)}{(2i+1)!} R^{2i} ,$$

gdzie S jest sferą o środku X_0 i o promieniu R.

Udowodnimy ponadto, że twierdzenie to charakteryzuje rozwiązania równania (1) tzn. że funkcje spełniające warunek średniej są rozwiązaniami równania (1).

2. Rozwiązaniem podstawowym [2] równania

(3) $$Lu(X) = 0$$

jest funkcja

(4) $$\left[\sum_{i,k=1}^{3} A_{ik}(x_i - x_i^0)(x_k - x_k^0)\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} .$$

gdzie A_{ik} są elementami macierzy odwrotnej do macierzy $\|a_{ik}\|$. Przez E_R oznaczamy obszar ograniczony elipsoidą e_R o równaniu

(5) $$f(X) = \sum_{i,k=1}^{3} A_{ik}(x_i - x_i^{0})(x_k - x_k^{0}) - R^2 = 0 .$$

3. Niech

(6) $$v(r) = \alpha \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right),$$

gdzie α jest stałą, którą określimy w dalszym ciągu rozważań.
Wówczas

(7) $$Lv = \alpha L \frac{1}{r} = 0$$

Niech $u(X)$ oznacza funkcję klasy C^2 w pewnym obszarze D gwiaździstym, względem punktu X_0, klasy C^1 w $\bar{D}$. Przytoczymy kilka lematów [3].

Lemat 1. Jeżeli $u(X) = U(r)$, to

(8) $$L\, U = U''(r) + \frac{2}{r} U'(r) .$$

Lemat 2. Jeżeli 1° $H(Y)$, $Y(y_1, y_2, y_3)$ jest funkcją jednorodną stopnia pierwszego, dodatnią na e_R dla każdego $R > 0$,

2°
$$\iint_{e_R} \frac{dS}{H(Y)},$$

istnieje, to

(9) $$\frac{\varepsilon}{\iint_{e_\varepsilon} \frac{dS_1}{H(Y_1)}} = \frac{R}{\iint_{e_R} \frac{dS}{H(Y)}}$$

Lemat 3. Jeżeli funkcja $u(X)$ jest klasy C^2 w E_R, klasy C^1 w $\bar{E}_R$ i jeżeli α jest stałą określoną wzorem

(10) $$\alpha = \frac{R}{\iint_{e_R} \frac{dS}{g(X)}}, \qquad g(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left[\sum_{j=1}^{3} A_{ij}(x_j - x_j^{0})\right]^2},$$

to

$$\iint_{\partial_R} u \frac{d\,v}{d\,\nu}\, dS = u(X_0) + \iiint_{E_R} v\, L\, u\, dx_1 dx_2 dx_3 \,, \tag{11}$$

gdzie $\frac{d\,v}{d\,\nu}$ oznacza pochodną tranwersalną funkcji v.
i

$$\frac{d\,v}{d\,\nu} = - \frac{\alpha}{r\, g(X)} \,.$$

4. Niech

$$v_0(r) = v\,(r) \tag{12}$$

i niech $v_i(r)$ $i = 1,2,\ldots.$ oznacza ciąg funkcji, z których każda spełnia warunek

$$L\, v_{i+1} = v''_{i+1} + \frac{2}{r}\, v'_{i+1} = v_i \,. \tag{13}$$

Udowodnimy

<u>Lemat 4.</u> [1] Funkcje v_i wyrażające się wzorem

$$v_i(r) = \frac{\alpha}{(2i+1)!} \; \frac{(R-r)^{2i+1}}{Rr} \tag{14}$$

spełniają równania (13).

<u>Dowód.</u>

Otóż

$$v'_{i+1}(r) = \frac{\alpha}{(2i+3)!} \; \frac{(R-r)^{2i+3}}{Rr} \tag{15}$$

a więc

$$v'_{i+1}(r) = \frac{\alpha}{(2i+3)!} \; \frac{(2i+3)(R-r)^{2i+1}\, r + (R-r)^{2i+3}}{R\, r^2} \tag{16}$$

$$v''_{i+1}(r) = \left[\frac{\alpha}{R(2i+3)!} \; (R-r)^{2i+3} \; r^{-1} \right]'' = \tag{17}$$

$$= \frac{\alpha}{(2i+3)!} \; \frac{(2i+3)(2i+2)(R-r)^{2i+1} r^2 + 2(2i+3)(R-r)^{2i+2} r + (R-r)^{3i+3}}{R\, r^3}$$

Mnożąc (16) przez $\frac{2}{r}$ oraz dodając do (17) otrzymamy (13) a stąd wynika teza lematu.

5. Niech

$$C_i(R) = \frac{R^{2i}}{(2i+1)\,!} \qquad i = 1,2,\ldots. \tag{18}$$

Udowodnimy

Lemat 5. Jeżeli funkcja $u(X)$ jest klasy C^{2i+2} w E_R, klasy C^{2i+1} w $\bar{E}_R$, to

$$C_i(R)\, L^i u(X_0) = \iiint_{E_R} \left(v_{i-1}\, L^i u - v_i\, L^{i+1} u \right) dx_1 dx_2 dx_3 . \tag{19}$$

Dowód. Stosujemy wzór podstawowy do funkcji v_i oraz $L^i u$ w obszarze $E_R - E_\varepsilon$. Otrzymujemy równość

$$\iiint_{E_R - E_\varepsilon} \left(L\, v_i\, L^i u - v_i L^{i+1} u \right) dx_1 dx_2 dx_3 = - \iint_{e_R} \left(L^i u \frac{d\, v_i}{d\, \nu} - v_i \frac{d\, L^i u}{d\, \nu} \right) dS - \tag{20}$$

$$- \iint_{e_\varepsilon} \left(L^i u \frac{d\, v_i}{d\, \nu} - v_i \frac{dL^i u}{d\, \nu} \right) dS$$

czyli wzór

$$\iiint_{E_R - E_\varepsilon} \left(v_{i-1} L^i u - v_i L^{i+1} u \right) dx_1 dx_2 dx_3 = - \iint_{e_R} L^i u \frac{d\, v_i}{d\, \nu}\, dS + \iint_{e_R} v_i \frac{d\, L^i u}{d\, \nu}\, dS -$$

$$- \iint_{e_\varepsilon} L^i u \frac{d\, v_i}{d\, \nu}\, dS + \iint_{e_\varepsilon} v_i \frac{d\, L^i u}{d\, \nu}\, dS .$$

Jak wynika z (15) i (16) pierwsza i druga całka prawej strony tego wzoru równa się zero- natomiast

$$\left| \iint_{e_\varepsilon} v_i \frac{d\, L^i u}{d\, \nu}\, dS \right| \leq \left| \frac{d\, L^i u(Q)}{d\, \nu} \right| \left| \iint_{e_\varepsilon} v_i\, dS \right| \leq M \frac{\alpha}{(2i+1)\,!} \frac{(R-\varepsilon)^{2i+1}}{R} K \varepsilon^2 ,$$

gdzie $M = \sup \left| \frac{d\, L^i u(Q)}{d\, \nu} \right|$ zaś K stała dodatnia,

a więc

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{e_\varepsilon} v_i \frac{d\, L^i u}{d\, \nu}\, dS = 0 .$$

Dla oszacowania przedostatniej całki wykonamy pewne obliczenia. Otóż

$$\frac{d v_i}{d \nu} = v_i'(r) \frac{d r}{d \nu} = v_i'(r) \frac{r}{g(x)} = - \frac{\alpha}{(2i+1)} \frac{(2i+1)(R-r)^{2i} r (R-r)^{2i+1}}{R r^2} \frac{r}{g(x)} =$$

$$= - \frac{\alpha}{(2i+1)!} \frac{(2i+1)(R-r)^{2i}}{R\, g(x)} - \frac{\alpha}{(2i+1)!} \frac{(R-r)^{2i+1}}{Rr\, g(x)} .$$

Wobec tego

$$-\iint\limits_{e_\varepsilon} L^i u \frac{d v_i}{d \nu} dS = \frac{\alpha}{R(2i)!} (R-\varepsilon)^{2i} L^i u(Q) \iint\limits_{e_\varepsilon} \frac{dS}{g(x)} + \frac{\alpha}{(2i+1)!} \frac{(R-\varepsilon)^{2i+1}}{R\varepsilon} L^i u(Q) \iint\limits_{e_\varepsilon} \frac{dS}{g(x)} =$$

$$= \frac{\alpha}{R(2i)!} (R-\varepsilon)^{2i} L^i u(Q) \frac{\varepsilon}{\alpha} + \frac{\alpha}{(2i+1)!} \frac{(R-\varepsilon)^{2i+1}}{R\varepsilon} L^i u(Q) \frac{\varepsilon}{\alpha} ,$$

a więc

$$- \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{e_\varepsilon} L^i u \frac{d v_i}{d \nu} dS = \frac{R^{2i}}{(2i+1)!} L^i u(X_0) = C_i(R) L^i u(X_0) . \qquad i = 1,2,\ldots .$$

Przechodząc po obu stronach (20) do granicy przy $\varepsilon \to 0$, otrzymujemy wzór (19) c.n.u.

6. W dalszym ciągu udowodnimy dwa lematy, z których będziemy korzystać.

Lemat 6. Jeżeli funkcja $u(X)$ jest klasy C^{2m} w E_R, klasy C^{2m-1} w $\bar{E}_R$, to

$$\text{(21)} \qquad \frac{\iint\limits_{e_R} \frac{u(X)}{g(X)} dS}{\iint\limits_{e_R} \frac{dS}{g(X)}} = \sum_{i=0}^{m} C_i(R) L^i u(X_0) + \frac{\alpha}{(2m+1)!} \iiint\limits_{E_R} \frac{(R-r)^{2m+1}}{R\, r} L^{m+1} u(X)\, dx_1 dx_2 dx_3$$

Dowód. Przyjmując we wzorze (19) $i = 1,\ldots, m$ i dodając stronami otrzymane równości otrzymamy po uwzględnieniu (11) wzór (21).

Lemat 7. Jeżeli funkcja $u(X)$ jest klasy C^{2m+2} w $\bar{E}_R$, to istnieje stała $K > 0$ oraz punkt $Q \in \bar{E}_R$ takie, że

$$\text{(22)} \qquad \frac{\iint\limits_{e_R} \frac{u(X)}{g(X)} dS}{\iint\limits_{e_R} \frac{dS}{g(X)}} = \sum_{i=0}^{m} C_i(R) L^i u(X_0) + K R^{2m+2} L^{m+1}(Q) .$$

Dowód. Stosujemy twierdzenie o wartości średniej do wyrażenia

$$(23)\qquad \frac{\alpha}{(2m+1)!}\iiint\limits_{E_R}\frac{(R-r)^{2m+1}}{Rr}\,L^{m+1}u(X)\;dx_1dx_2dx_3 =$$

$$= \frac{\alpha}{(2m+1)!}\,\frac{1}{R}\,L^{m+1}u(Q)\iiint\limits_{E_R}\frac{(R-r)^{2m+1}}{r}\;dx_1dx_2dx_3$$

W całce

$$(24)\qquad \iiint\limits_{E_R}\frac{(R-r)^{2m+1}}{r}\;dx_1dx_2dx_3 = I$$

stosujemy zamianę zmiennych

$$(25)\qquad \begin{aligned} x_1 - x_1^0 &= B_{11}y_1 + B_{12}y_2 + B_{13}y_3\,,\\ x_2 - x_2^0 &= B_{21}y_1 + B_{22}y_2 + B_{23}y_3\,,\\ x_3 - x_3^0 &= B_{31}y_1 + B_{32}y_2 + B_{33}y_3\,,\end{aligned}$$

o wyznaczniku B, który przekształca formę kwadratową

$$(26)\qquad \sum_{i,k,1}^{3} A_{ik}(x_i - x_i^0)(x_k - x_k^0)$$

we formę kwadratową

$$(27)\qquad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \rho^2\,.$$

Po zamianie zmiennych otrzymujemy

$$(28)\qquad I = B\iiint\limits_{K(R)}\frac{(R-\rho)^{2m+1}}{\rho}\;dy_1dy_2dy_3\,,$$

gdzie $K(R)$ oznacza kulę o promieniu R i środku w początku układu, zaś ρ jest określone przez (27).

Stosując w całce (28) zamianę zmiennych na współrzędne sferyczne

$$(29)\qquad \begin{aligned} y_1 &= \rho\cos\varphi\,\cos v\,, & 0 < \rho \le R\,,\\ y_2 &= \rho\sin\varphi\,\cos v\,, & 0 \le \varphi \le 2\pi\,,\\ y_3 &= \rho\sin v\,, & 0 \le v \le \pi\,,\end{aligned}$$

otrzymujemy

$$(30) \qquad I = B \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \frac{(R-\varrho)^{2m+1}}{\varrho} \varrho^2 \sin v \, d\varrho \, d\varphi \, dv =$$

$$= B \, 4\pi \int_0^R (R-\varrho)^{2m+1} \varrho \, d\varrho = 4\pi B \frac{R^{2m+3}}{(2m+2)(2m+3)},$$

a więc przyjmując

$$k = \frac{4\pi B \alpha}{(2m+3)!},$$

otrzymujemy tezę lematu 7.

7. Udowodnimy obecnie

Twierdzenie 1.

Jeżeli $u(X)$ jest klasy C^{2p} w obszarze D i spełnia równanie (1), to dla każdej elipsoidy $E_R \subset D$

$$(31) \qquad \frac{\iint_{e_R} \frac{u(Y)}{g(Y)} dS}{\iint_{e_R} \frac{dS}{g(Y)}} = \sum_{i=0}^{p-1} c^i(R) \, L^i u(X)$$

Dowód. Przyjmując we wzorze (21) $m=p-1$, po uwzględnieniu warunku (1) otrzymujemy (31) c.b.d.o.

8. Zanim przejdziemy do twierdzenia odwrotnego do twierdzenia (1) udowodnimy

Lemat 8. Jeżeli funkcja $u(X)$ jest klasy C^{2p-2} w obszarze D i dla każdej elipsoidy E_R spełniony jest warunek (31), to funkcja $u(X)$ jest klasy C^{2p}.

Dowód. Ponieważ $g(Y)$ jest pierwiastkiem kwadratowym wielomianu o wartościach dodatnich, przeto można obie strony (31) zróżniczkować dwukrotnie, a stąd wynika teza lematu.

Udowodnimy teraz

Twierdzenie 2. Jeżeli funkcja $u(X)$ jest klasy C^{2p-2} w D i spełnia warunek (31), to funkcja $u(X)$ spełnia równanie (1) w D.

Dowód. Na podstawie lematu 8 funkcja $u(X)$ jest klasy C^{2p} w D, na podstawie zaś lematu 7 i warunku (31) otrzymujemy

$$L^p u(Q) = 0, \quad Q \in E_R .$$

Przy $Q \longrightarrow X$ z powodu ciągłości funkcji $L^p u(X)$ otrzymujemy (1) c.b.d.o.

PRACE CYTOWANE

[1] R.Courant, D.Hilbert, Methods of Mathematical Physics, t.II, 1933.

[2] M.Krzyżański, Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego, cz.1,1957.

[3] A.Wachułka, Twierdzenie o wartości średniej dla rozwiązań równania $L^2u(X) = 0$, Rocznik Nauk.Dydakt.WSP w Krakowie, zesz.nr 25, 1966, str. 239-253.

SUMMARY

On the mean value theorem for the solutions of the certain elliptic equations of order p

Let

$$Lu(X) = \sum_{ik=1}^{3} a_{ik} u_{x_i x_k}, \qquad a_{ik} = a_{ki}, \quad X(x_1, x_2, x_3)$$

denotes the elliptic operator with constans coefficientes and

$$L^p u = L(L^{p-1}u), \quad p \text{ boeing positive integer.}$$

Let

$$m(R, X_o, u) = \frac{\iint\limits_{e_R} \frac{u(X)}{g(X)}\, dS}{\iint\limits_{e_R} \frac{dS}{g(X)}}$$

where e_R denotes the ellipsoid

$$f(X) = \sum_{ik=1}^{3} A_{ik}(x_i - x_i^o)(x_k - x_k^o), - R^2 = 0 ,$$

A_{ik} boeing elements od the matrix $\|a_{ik}\|^{-1}$,

$$g(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \left[\sum_{j=1}^{3} A_{ij}(x_j - x_j^o)\right]^2} .$$

The author proves the folloving theorems:

Theorem 1. If $u(X) \in C^{2p}(D)$ and satisfies the equation

(1) $$L^p u = 0 ,$$

then

(2) $$m(R, X_o, u) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{L^i u(X_o)}{(2i + 1)!} R^{2i} .$$

Theorem 2. If $u(X)$ $C^{2p-2}(D)$ and satisfies the condition (2) for every $e_R \subset D$, then $u(X)$ is a solution of the equation (1).

Резюме

Теорема о среднем для решении уравнения $\mathcal{L}^p_u = 0$

Пусть

$$\mathcal{L}_u(X)=\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} u_{x_i x_k} \quad a_{ik}=a_{ki} : X(x_1,x_2,x_3);\ \mathcal{L}^p_u=\mathcal{L}(\mathcal{L}^{p-1}_u)$$

будет эллиптическим оператором с постоянными коэффициентами.

Пусть

$$m(R,X_0 u)=\frac{\iint_{e_R}\frac{u(X)}{\varrho(X)}\,ds}{\iint_{e_R}\frac{ds}{\varrho(X)}}$$

e_R является эллипсоидом $\alpha(X)=\sum_{i,k=1}^{3} A_{ik}(x_i-x_i^0)(x_k-x_k^0)-R^2=0$

A_{ik} - элемент матрицы $\|a_{ik}\|^{-1}$

$$\varrho(X)=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left[\sum_{j=1}^{3} A_{ij}(x_i-x_j^0)\right]^2}$$

Автор доказывает следующие теоремы:

Теорема I. Если $u(X)\in C^{2p}(D)$ является решением уравнения

(1) $\mathcal{L}^p_u=0$

тогда

(2) $$m(R,X_0,u)=\sum_{i=0}^{p-1}\frac{\mathcal{L}^i_u(X_0)}{(2i+1)!}R^{2i}$$

Теорема 2. Если $u(X)\in C^{2}C^{p-2}D)$ выполняет условие /2/ для каждого $C_r\subset D$, тогда $u(X)$ является решением уравнения /1/.