Stanisław Wołodźko

O PEWNEJ WŁASNOŚCI PIERWSZEJ FUNKCJI WŁASNEJ RÓWNANIA PŁYTY NIEJEDNORODNEJ

Wstęp. Zakładamy, że D jest obszarem ograniczonym w płaszczyźnie (x,y), o brzegu ∂D klasy C^1 oraz, że $k(x,y)$ jest funkcją dodatnią i klasy C^1 w domknięciu $\bar{D}$ obszaru D. Wiadomo z teorii wariacyjnej Couranta-Hilberta ([1], t.I, str.388), że rozwiązanie $u(x,y)$ zagadnienia

$$\Delta u(x,y) + \lambda k(x,y)\, u(x,y) = 0 \qquad \text{dla} \quad (x,y) \in D,$$
$$u(x,y) = 0 \qquad \text{dla} \quad (x,y) \in \partial D,$$

nie zerujące się wewnątrz obszaru D jest jedyną, z dokładnością do stałej multyplikatywnej, pierwszą funkcją własną tego zagadnienia.

W tej pracy wykażemy, że analogiczną własność posiada pierwsza funkcja własna zagadnienia płyty niejednorodnej w przypadku, gdy funkcja $k(x,y)$ jest funkcją kołowo-symetryczną (twierdzenie 2). Praca składa się z dwóch części. W § 1 podamy definicje i twierdzenia, w których skorzystamy w dalszym ciągu. W § 2 przeprowadzimy dowód wyżej zapowiedzianego twierdzenia.

§ 1. Przyjmujemy poczynione we wstępie założenia dotyczące zbioru D i funkcji $k(x,y)$. Niech $u(x,y)$ będzie rozwiązaniem klasy C^3 w obszarze $\bar{D}$ i klasy C^4 w obszarze D zagadnienia

$$\Delta\Delta u(x,y) = \lambda k(x,y)\, u(x,y) \qquad \text{dla} \quad (x,y) \in D, \tag{1}$$
$$u(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial n} = 0 \qquad \text{dla} \quad (x,y) \in \partial D, \tag{2}$$

gdzie n oznacza normalną wewnętrzną do brzegu ∂D. W dalszym ciągu przez λ_1 będziemy oznaczać pierwszą wartość własną zagadnienia (1), (2) oraz przez $u_1(x,y)$ - pierwszą funkcję własną tego zagadnienia.

Niech Φ oznacza klasę funkcji $\varphi(x,y)$ o następujących własnościach:

1. $\varphi(x,y) \neq 0$ dla $(x,y) \in D$,
2. $\varphi(x,y) \in C^2$ dla $(x,y) \in \bar{D}$,
3. $\varphi(x,y) = \dfrac{\partial \varphi(x,y)}{\partial n} = 0$ dla $(x,y) \in \partial D$.

W dalszym ciągu skorzystamy z następującego twierdzenia.

<u>Twierdzenie 1.</u> Pierwsza funkcja własna $u_1(x,y)$ zagadnienia (1), (2) jest funkcją, dla której funkcjonał

$$F[\varphi] = \frac{\iint\limits_D (\Delta\varphi)^2 dxdy}{\iint\limits_D k\varphi^2 \, dxdy}$$

osiąga minimum w klasie funkcji Φ, zaś pierwsza wartość własna $\lambda_1 = F[u_1]$.

Niech $K_R \overset{df}{=} \{(x,y) : (x^2 + y^2 < R^2)\}$ $(0 < R < +\infty)$.

Funkcję $f(x,y)$ nazywamy funkcją kołowo-symetryczną w kole $\bar{K}_R$, jeżeli

$$f(x,y) = f_1(r) \qquad \text{dla} \quad (x,y) \in \bar{K}_R$$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Zauważmy jeszcze, że jeżeli funkcja $f(x,y)$ klasy C^4 w kole K_R jest funkcją kołowo-symetryczną, to

(3) $$\Delta\Delta f(x,y) = \frac{1}{r}\left\{r\left\{\frac{1}{r}\left[r\, f_1'(r)\right]'\right\}'\right\}'\Big|_{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

dla $(x,y) \in K_R \setminus \{(0,0)\}$, przy czym $f_1'(r) = \dfrac{d\, f_1(r)}{dr}$.

§ 2. Rozważamy teraz zagadnienie (1), (2) w przypadku, gdy $D = K_R$ oraz $k(x,y) = k_1(r)|_{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$ dla $(x,y) \in \bar{K}_R$. Wtedy, z uwagi na (3), każde rozwiązanie kołowo-symetryczne $u(x,y)$ zagadnienia (1), (2) jest rozwiązaniem zagadnienia

(1') $$\frac{1}{r}\left\{r\left\{\frac{1}{r}\left[r\, v'(r)\right]'\right\}'\right\}' = \lambda\, k_1(r)\, v(r) \qquad \text{dla} \quad 0 < r < R,$$

(2') $$v(R) = v'(0) = v'(R) = v'''(0) = 0,$$

gdzie $$v'(0) = \lim_{r\to 0+} v'(r) \quad \text{i} \quad v'''(0) = \lim_{r\to 0+} v'''(r).$$

Przyjmijmy teraz, że funkcja $v(r)$ jest rozwiązaniem zagadnienia (1'), (2') takim, że $v(r) \neq 0$ dla $0 < r < R$. Nie zmniejszając ogólności rozważań możemy założyć, że

(4) $$v(r) > 0 \qquad \text{dla} \quad 0 < r < R.$$

Wprowadzimy następujące oznaczenia.

$$v_1(r) = r\, v'(r).$$

$$v_2(r) = \frac{1}{r} v_1'(r) = v''(r) + \frac{1}{r} v'(r).$$

$$v_3(r) = r\, v_2'(r) = r\, v'''(r) + v''(r) - \frac{1}{r} v'(r).$$

$$v_4(r) = \frac{1}{r} v_3'(r) = v''''(r) + \frac{2}{r} v'''(r) - \frac{1}{r^2} v''(r) + \frac{1}{r^3} v'(r).$$

$$q(r) = [v'(r)]^2 - 2\, v(r)\, v''(r).$$

$$h(r) = [v'(r)]^2 - v(r)\, v''(r) - \frac{1}{r} v(r)\, v'(r)\,.$$

Wobec tego równanie (1') możemy zapisać w postaci

(1'') $$v_4(r) = \lambda\, k_1(r)\, v(r)\,.$$

Wykażemy teraz kilka własności funkcji $v(r)$ (lematy 1 - 6).

Lemat 1. $$v'''(r) > 0 \qquad \text{dla} \quad 0 < r < R\,.$$

Dowód. Z (4) i (1'') dostajemy

(5) $$v_4(r) > 0 \qquad \text{dla} \quad 0 < r < R\,,$$

a więc

(6) funkcja $v_3(r)$ jest funkcją rosnącą w przedziale $(0,R)$.

Zauważmy jeszcze, że $\lim\limits_{r\to 0+} v_3(r) = 0$. Stąd i z (6) mamy $v_3(r) > 0$ a zatem

$$r\, v_3(r) = [r^2 v''(r) - r\, v'(r)]' > 0 \qquad \text{dla} \quad 0 < r < R\,.$$

Stąd wynika, że funkcja $r^2 v''(r) - r\, v'(r)$ jest funkcją rosnącą w przedziale $(0,R)$ a ponieważ $\lim\limits_{r\to 0+} [r^2 v''(r) - r v'(r)] = 0$, więc

$$r^2 v''(r) - r\, v'(r) > 0\,,$$

czyli

$$-\frac{1}{r^2} v''(r) + \frac{1}{r^3} v'(r) < 0 \qquad \text{dla} \quad 0 < r < R\,.$$

Stąd, z określenia funkcji $v_4(r)$ oraz z (5) wnioskujemy, że

$$v''''(r) + \frac{2}{r} v'''(r) > 0 \qquad \text{dla} \quad 0 < r < R\,,$$

a zatem

$$r^2 v''''(r) + 2\, r\, v'''(r) > 0\,,$$

czyli

$$[r^2 v'''(r)]' > 0 \qquad \text{dla} \quad 0 < r < R\,.$$

Wobec tego funkcja $r^2 v'''(r)$ jest funkcją rosnącą w przedziale $(0,R)$, a ponieważ z (2') mamy $v'''(0) = 0$, więc

$$r^2 v'''(r) > 0 \qquad \text{dla} \quad 0 < r < R\,.$$

Stąd wynika teza.

Lemat 2. Funkcja $v''(r)$ posiada w przedziale $(0,R)$ dokładnie jedno miejsce zerowe takie, że

(7) $$v''(r) < 0 \qquad \text{dla} \quad 0 \leqslant r < \xi$$

oraz

(8) $\qquad v''(r) > 0 \qquad$ dla $\quad \xi < r \leqslant R$.

W szczególności mamy

(9) $\qquad v''(0) < 0$.

Dowód. Z lematu 1 wynika, że funkcja $v''(r)$ jest funkcją rosnącą w przedziale $(0,R)$. Z drugiej strony z (2') wynika, że

$$v'(0) = v'(R) = 0 .$$

Z powyższych wniosków mamy tezę.

Lemat 3. $\quad v'(r) < 0 \qquad$ dla $\quad 0 < r < R$.

Dowód. Z lematu 2 wynika, że funkcja $v'(r)$ jest funkcją malejącą w przedziale $(0,\xi)$ i funkcją rosnącą w przedziale (ξ, R). Stąd i z faktu, że $v'(0) = v'(R) = 0$ wynika teza.

Zauważmy jeszcze, że z lematu 3 wynika, iż funkcja $v(r)$ jest funkcją malejącą w przedziale $(0,R)$. Stąd i z (4) mamy

(10) $\qquad v(0) > 0$.

Lemat 4. $\quad q(r) > 0 \qquad$ dla $\quad 0 \leqslant r < R$.

Dowód. Ponieważ

$$q'(r) = - 2\, v(r)\, v'''(r) ,$$

więc z (4) i lematu 1 mamy

$$q'(r) < 0 \qquad \text{dla} \quad 0 < r < R ,$$

a zatem funkcja $q(r)$ jest funkcją malejącą w przedziale $(0,R)$. Z drugiej strony z (2') wnosimy, że $q(R) = 0$. Stąd wynika teza.

Lemat 5. $\quad h(r) > 0 \qquad$ dla $\quad 0 \leqslant r < R$,

gdzie $h(0) \overset{df}{=} \lim\limits_{r\to 0+} h(r)$ i granica ta istnieje.

Dowód. Niech ξ oznacza jedyne miejsce zerowe funkcji $v''(r)$. Rozważymy dwa przypadki:

a) $\quad 0 \leqslant r \leqslant \xi$

b) $\quad \xi < r < R$.

Ad a/. Dla $r > 0$ teza wynika z określenia funkcji $h(r)$, z (4), (7) i lematu 3. Ponadto mamy

$$\lim_{r\to 0+} h(r) = - v(0)\, v'(0) > 0 ,$$

przy czym nierówność wynika z (9) i (10).

Ad b/. Z lematu 4 i z określenia funkcji $g(r)$ dostajemy

$$[v'(r)]^2 - v(r)v''(r) > v(r)v''(r).$$

Stąd i z określenia funkcji $h(r)$ mamy

$$h(r) > v(r)v''(r) - \frac{1}{r} v(r)v'(r),$$

a stąd, oraz z (4), (8) i lematu 3 wynika teza.

Niech teraz

$$u(x,y) = v(r)\Big|_{r = \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Wprowadzimy następujące oznaczenie.

$$F[\xi,\eta;\, u] = (\mathrm{grad}^2 u - 2uu_{xx})\xi^2 + (\mathrm{grad}^2 u - 2uu_{yy})\eta^2 - 4uu_{xy}\xi\eta,$$

gdzie ξ, η oznaczają dowolne liczby rzeczywiste. Przy ustalonym punkcie (x,y) wyrażenie F jest formą kwadratową zmiennych ξ, η.

Lemat 6. Forma kwadratowa $F[\xi,\eta;\, u]$ jest dodatnio określona w każdym punkcie $(x,y) \in K_R$.

Dowód. Rozważmy macierz danej formy

$$M = \begin{Vmatrix} \mathrm{grad}^2 u - 2uu_{xx}, & -2uu_{xy} \\ -2uu_{xy}, & \mathrm{grad}^2 u - 2uu_{yy} \end{Vmatrix}.$$

Ponieważ

$$\mathrm{grad}^2 u = [v'(r)]^2\Big|_{r = \sqrt{x^2 + y^2}},$$

oraz

$$\Delta u,(x,y) = \left[v''(r) + \frac{1}{r} v'(r)\right]\Big|_{r = \sqrt{x^2 + y^2}},$$

zatem

$$(\mathrm{grad}^2 u - 2uu_{xx}) + (\mathrm{grad}^2 u - 2uu_{yy}) = 2h(r)\Big|_{r = \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Stąd i z lematu 5 wynika, że w dowolnym punkcie $(x,y) \in K_R$

(11) przynajmniej jeden z elementów głównej przekątni macierzy M jest dodatni.

Z drugiej strony mamy

$$\det M = g(r)\left\{[v'(r)]^2 - \frac{1}{r} v(r)\, v'(r)\right\}\Big|_{r = \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Stąd, z (4) i lematów 3 oraz 4 wnioskujemy, że

(12) $$\det M > 0 .$$

Z (11) i (12) na podstawie warunku Sylvestera mamy tezę.

Wykażemy teraz następujące

Twierdzenie 2. Zakładamy, że obszar D jest kołem K_R oraz, że funkcja $k(x,y)$ jest funkcją klasy C^1 dodatnia i kołowo-symetryczna w kole K_R. Jeżeli istnieje rozwiązanie $u(x,y)$ zagadnienia (1), (2) kołowo-symetryczne i takie, że

(13) $$u(x,y) \neq 0 \quad \text{dla} \quad (x,y) \in K_R,$$

to funkcja $u(x,y)$ jest jedyna, z dokładnością do stałej multyplikatywnej, pierwszą funkcją własną tego zagadnienia.

Dowód. Niech $u(x,y)$ oznacza funkcję własną zagadnienia (1), (2) taką, że zachodzi (13), zaś λ - wartość własną tego zagadnienia odpowiadającą funkcji własnej $u(x,y)$. Z uwagi na twierdzenie 1 wystarczy pokazać, że

(14) $$\iint_{K_R} (\Delta\varphi)^2 \, dx\, dy \geq \lambda \iint_{K_R} k\varphi^2 \, dx\, dy \quad \text{dla } \varphi \in \Phi,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\varphi(x,y) = c \cdot u(x,y),$$

gdzie c jest dowolną stałą rzeczywistą.

Przyjmijmy, że $\varphi(x,y)$ jest dowolnie ustaloną funkcją z klasy Φ. Niech

(15) $$\eta(x,y) = \frac{\varphi(x,y)}{u(x,y)} \quad \text{dla} \quad (x,y) \in K_R.$$

Stąd i z (13) dostajemy, że funkcja $\eta(x,y)$ jest funkcją klasy C^2 w kole K_R. Ponadto mamy

$$\varphi(x,y) = \eta(x,y)\, u(x,y).$$

Wobec tego

$$\Delta\varphi = u\,\Delta\eta + \eta\,\Delta u + 2 \operatorname{grad} u \operatorname{grad}\eta,$$

a więc

(16) $$(\Delta\varphi)^2 = \eta^2(\Delta u)^2 + u^2(\Delta\eta)^2 + 4(\operatorname{grad} u \operatorname{grad}\eta)^2 + 2u\eta\,\Delta u\,\Delta\eta + \\ + 4u\,\Delta\eta \operatorname{grad} u \operatorname{grad}\eta + 4\eta\,\Delta u \operatorname{grad} u \operatorname{grad}\eta.$$

Z drugiej strony dostajemy

$$\Delta(\eta^2 u)\Delta u = \eta^2(\Delta u)^2 + 2u\eta\,\Delta u\,\Delta\eta + 4\eta\,\Delta u \operatorname{grad} u \operatorname{grad}\eta + 2u\,\Delta u \operatorname{grad}^2\eta.$$

Stąd i z (16) wnosimy, że

(17) $$(\Delta\varphi)^2 = u^2(\Delta\eta)^2 + 4(\operatorname{grad} u \operatorname{grad}\eta)^2 + 4u\,\Delta\eta \operatorname{grad} u \operatorname{grad}\eta - \\ - 2u\,\Delta u \operatorname{grad}^2\eta + \Delta(\eta^2 u)\Delta u.$$

Obieramy teraz dowolne $\varepsilon > 0$. Niech

$$K_{R-\varepsilon} = \{(x,y) : [x^2 + y^2 < (R-\varepsilon)^2]\}.$$

Zatem z (17) mamy

$$\iint\limits_{K_{R-\varepsilon}} (\Delta \varphi)^2 \, dxdy = I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon) + I_3(\varepsilon),$$

gdzie

$$I_1(\varepsilon) = \iint\limits_{K_{R-\varepsilon}} u^2(\Delta \eta)^2 \, dxdy ,$$

$$I_2(\varepsilon) = 2\iint\limits_{K_{R-\varepsilon}} \left[2(\text{grad } u \text{ grad} \eta)^2 + 2u \Delta \eta \text{ grad } u \text{ grad} \eta - u \Delta u \text{ grad}^2 \eta \right] dxdy,$$

oraz

$$I_3(\varepsilon) = \iint\limits_{K_{R-\varepsilon}} \Delta(\eta^2 u) \Delta u \, dxdy.$$

Całkę $I_1(\varepsilon)$ pozostawiamy bez zmian. Dla obliczenia całki $I_2(\varepsilon)$ zauważmy, że

(18) $$2(\text{grad } u \text{ grad} \eta)^2 + 2 u \Delta \eta \text{ grad} u \text{ grad} \eta - u \Delta u \text{ grad}^2 \eta - F[\eta x, \eta y; u] = Px(x,y) + Qy(x,y),$$

gdzie

$$P(x,y) = uu_x \eta_x^2 + 2uu_y \eta_x \eta_y - uu_x \eta_y^2 ,$$

$$Q(x,y) = uu_y \eta_x^2 + 2 uu_x \eta_x \eta_y + uu_y \eta_y^2 .$$

Z twierdzenia Greena ([2], str.133) dostajemy

$$\iint\limits_{K_{R-\varepsilon}} \left[P_x(x,y) + Q_y(x,y)\right] dxdy = - \int\limits_{\partial K_{R-\varepsilon}} \left[P(x,y) \cos(n,x) + Q(x,y)\cos(n,y)\right] d\sigma .$$

Stąd, z (18) oraz z faktu, że

$$\cos(n,x) = -\frac{x}{R-\varepsilon} \quad \text{i} \quad \cos(n,y) = -\frac{y}{R-\varepsilon} \quad \text{dla} \quad (x,y) \in \partial K_{R-\varepsilon}$$

mamy

$$I_{2\varepsilon} = 2 \iint\limits_{K_{R-\varepsilon}} F\left[\eta x, \eta y; u\right] dxdx + \frac{2}{R-\varepsilon} \int\limits_{\partial K_{R-\varepsilon}} \left[P \cdot x + Q \cdot y\right] d\sigma.$$

Całkę $I_3(\varepsilon)$ obliczymy całkując dwukrotnie przez części ([2], str.136). Otrzymujemy

$$I_3(\varepsilon) = - \int\limits_{\partial K_{R-\varepsilon}} \eta^2 u (\Delta u)_r \, d\sigma + \int\limits_{\partial K_{R-\varepsilon}} (\eta^2 u)_r \Delta u \, d\sigma + \iint\limits_{K_{R-\varepsilon}} \eta^2 u \Delta \Delta u \, dxdy.$$

Stąd, uwzględniając fakt, że funkcja $u(x,y)$ jest rozwiązaniem równania (1), dostajemy

$$I_3(\varepsilon) = -\int\limits_{\partial K_{R-\varepsilon}} \eta^2 u(\Delta u)_r \, d\sigma + \int\limits_{\partial K_{R-\varepsilon}} (\eta^2 u)_r \Delta u \, d\sigma + \lambda \iint\limits_{K_{R-\varepsilon}} k\varphi^2 dxdy.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$(19) \quad \iint\limits_{K_{R-\varepsilon}} (\Delta\varphi)^2 dxdy = \iint\limits_{K_{R-\varepsilon}} \left\{\eta^2 (\Delta u)^2 + 2F\left[\eta_x, \eta_y; u\right]\right\} dxdy + \lambda \iint\limits_{K_{R-\varepsilon}} k\varphi^2 dxdy +$$

$$+ J_1(\varepsilon) - J_2(\varepsilon) + J_3(\varepsilon),$$

gdzie

$$J_1(\varepsilon) = \int\limits_{\partial K_{R-\varepsilon}} \eta^2 u(\Delta u)_r \, d\sigma,$$

$$J_2(\varepsilon) = \int\limits_{\partial K_{R-\varepsilon}} (\eta^2 u)_r \Delta u \, d\sigma$$

oraz

$$J_3(\varepsilon) = \frac{2}{R-\varepsilon} \int\limits_{\partial K_{R-\varepsilon}} (P x + Q \cdot y) \, d\sigma.$$

Zauważmy, co następnie udowodnimy, że

$$(20) \quad \lim_{\varepsilon \to 0+} J_1(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0+} J_2(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0+} I_3(\varepsilon) = 0.$$

Z drugiej strony, ponieważ funkcje $k(x,y)$ i $\varphi(x,y)$ są odpowiednio klasy C^1 i C^2 w kole $\bar{K}_R$, więc

$$(21) \quad \lim_{\varepsilon \to 0+} \iint\limits_{K_{R-\varepsilon}} k\varphi^2 \, dxdy = \iint\limits_{K_R} k\varphi^2 \, dxdy$$

oraz

$$(22) \quad \lim_{\varepsilon \to 0+} \iint\limits_{K_{R-\varepsilon}} (\Delta\varphi)^2 \, dxdy = \iint\limits_{K_R} (\Delta\varphi)^2 \, dxdy.$$

Z (19), (20), (21) i (22) wnioskujemy, że istnieje całka

$$\iint\limits_{K_R} \left\{\eta^2 (\Delta u)^2 + 2F\left[\eta_x, \eta_y; u\right]\right\} dxdy$$

oraz, że

$$\iint\limits_{K_R} (\Delta\varphi)^2 dxdy = \iint\limits_{K_R} \left\{\eta^2 (\Delta u)^2 + 2F\left[\eta_x, \eta_y; u\right]\right\} dxdy + \lambda \iint\limits_{K_R} k\varphi^2 \, dxdy.$$

Stąd i z lematu 6 wynika (14), przy czym

$$\iint_{K_R} (\Delta\varphi)^2 \, dxdy = \Lambda \iint_{K_R} k\varphi^2 \, dxdy$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Delta \eta(x,y) = \eta_x(x,y) = \eta_y(x,y) = 0 \qquad \text{dla} \qquad (x,y) \in K_R ,$$

a więc, gdy $\eta(x,y) = \text{const.}$

Pozostało do wykazania, że zachodzi (20). W tym celu udowodnimy cztery lematy (lematy 7 - 10).

Lemat 7. Jeżeli funkcja $f(x,y)$ jest funkcją ciągłą w kole K_R oraz, jeżeli dla dowolnego punktu $(x_0,y_0) \in \partial K_R$ mamy $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$, to

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\partial K_{R-\varepsilon}} f(x,y) \, d\sigma = 0 .$$

Dowód. Niech

$$J(\varepsilon) = \int_{\partial K_{R-\varepsilon}} f(x,y) \, d\sigma .$$

Wprowadzając przekształcenie $x = (R-\varepsilon)\cos\theta$, $y = (R-\varepsilon)\sin\theta$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$, dostajemy

$$J(\varepsilon) = (R-\varepsilon)\int_0^{2\pi} f\left[(R-\varepsilon)\cos\theta, (R-\varepsilon)\sin\theta\right] d\theta.$$

Obierzmy teraz dowolny ciąg (ε_n) taki, że $0 < \varepsilon_n < R$ dla $n = 1,2,\dots$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Stosując twierdzenie o wartości średniej dla całek otrzymamy

$$J(\varepsilon_n) = 2\pi(R-\varepsilon_n) f(P_n),$$

gdzie

$$P_n = \left[(R-\varepsilon_n)\cos\theta_n, (R-\varepsilon_n)\sin\theta_n\right]$$

oraz $0 \leq \theta_n \leq 2\pi$ dla $n = 1,2,\dots$.

Wystarczy pokazać, że $J(\varepsilon_n) \to 0$, a do tego wystarczy dowieść, że $f(P_n) \to 0$.

Dla dowodu niewprost przyjmijmy, że ciąg $(f(P_n))$ nie jest zbieżny do zera. Wtedy ciąg ten posiada podciąg $(f(P_{k_n}))$ zbieżny do granicy (skończonej lub nie) q różnej od zera. Z kolei ciąg (P_{k_n}) jest ciągiem ograniczonym, gdyż jest podciągiem ciągu ograniczonego (P_n). Zatem, stosując twierdzenie Bolzano-Weierstrassa, dostajemy, że ciąg (P_{k_n}) posiada podciąg $(\bar{P}_{k_n})$ zbieżny i to do punktu P_0 należącego do koła $\bar{K}_R$. Ale punkt P_0 jest punktem skupienia ciągu (P_n), zatem $P_0 \in \partial K_R$. Stąd i z założenia dostajemy, że $f(\bar{P}_{k_n}) \to 0$, a to jest niemożliwe, gdyż ciąg $(f(\bar{P}_{k_n}))$ jest podciągiem ciągu $(f(P_{k_n}))$ zbieżnego do granicy różnej od zera.

Przypominamy teraz, że funkcja $\varphi(x,y)$ jest ustaloną funkcją z klasy Φ oraz, że funkcja $u(x,y)$ jest rozwiązaniem kołowo-symetrycznym zagadnienia (1), (2), nie zerującym się w kole K_R.

Wprowadzając współrzędne biegunowe $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(0 \le r \le R,$ $0 \le \theta \le 2\pi)$ otrzymujemy, że funkcje

$$\psi(r,\theta) = \varphi(r\cos\theta,\ r\sin\theta) \quad \text{i} \quad v(r) = u(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$

są odpowiednio klasy C^2 i C^3 w prostokącie $\Delta = \{(r,\theta):\ 0 < r \le R,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$ (funkcja $v(r)$ jest również klasy C^4 wewnątrz prostokąta Δ) oraz, że

(23) $\qquad \psi(R,\theta) = \psi_r(R,\theta) = 0 \qquad$ dla $\quad 0 \le \theta \le 2\pi,$

(24) $\qquad v(R) = v_r(R) = 0$

i (zob. lemat 2)

(25) $\qquad v_{rr}(R) \ne 0.$

Zauważmy jeszcze, że z (23) i z definicji pochodnej wynika, że

(26) $\qquad \psi_\theta(R,\theta) = 0 \qquad$ dla $\quad 0 \le \theta \le 2\pi.$

Lemat 8. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\varphi^2(x,y)}{u(x,y)} = 0,$ gdzie $(x_0,y_0) \in \partial K_R$.

Dowód. W współrzędnych biegunowych punktowi (x_0,y_0) odpowiada punkt (R,θ_0), gdzie $\theta_0 = \mathrm{Arg}(x_0 + y_0 i)$. Zatem wystarczy dowieść, że

(27) $$\lim_{(r,\theta)\to(R,\theta_0)} \frac{\psi^2(r,\theta)}{v(r)} = 0.$$

W tym celu zauważmy, że stosując twierdzenia Taylora i uwzględniając (23) i (24) dostajemy

$$\psi(r,\theta) = \psi(r,\theta) - \psi(R,\theta) = (r-R)\,\psi_r(r_1,\theta)$$

oraz

$$v(r) = v(r) - v(R) = \tfrac{1}{2}(r-R)^2\, v_{rr}(r_2),$$

gdzie $\qquad r_1,\ r_2 \in [r,\ R].$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{\psi^2(r,\theta)}{v(r)} = \frac{2\psi_r^2(r_1,\theta)}{v_{rr}(r_2)} \tag{28}$$

Ale gdy $(r,\theta) \to (R,\theta_0)$, to $(r_1,\theta) \to (R,\theta_0)$ i $r_2 \to R$. Stąd oraz z (23), (25) i (28) wynika (27).

<u>Lemat 9.</u> $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\varphi^2(x,y)}{u(x,y)}\right] = 0$, gdzie $(x_0,y_0) \in \partial K_R$.

<u>Dowód.</u> Podobnie jak w dowodzie lematu 8 zauważmy, że wystarczy pokazać, iż

$$\lim_{(r,\theta)\to(R,\theta_0)} \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\psi^2(r,\theta)}{v(r)}\right] = 0, \tag{29}$$

gdzie $\theta_0 = \operatorname{Arg}(x_0 + y_0 i)$.

Ale

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\psi^2(r,\theta)}{v(r)}\right] = \frac{1}{v^2(r)}\left[2\psi(r,\theta)\,\psi_r(r,\theta)\,v(r) - \psi^2(r,\theta)\,v_r(r)\right] \tag{30}$$

Rozumując analogicznie jak w dowodzie lematu 8 stwierdzamy, że

$$\lim_{(r,\theta)\to(R,\theta_0)} \frac{2\psi(r,\theta)\,\psi_r(r,\theta)}{v(r)} = \lim_{(r,\theta)\to(R,\theta_0)} \frac{\psi^2(r,\theta)\,v_r(r)}{v^2(r)} = 0$$

a stąd i z (30) wynika (29).

Niech

$$H(x,y) = \left\{uu_x\left[\left(\frac{\varphi}{u}\right)_x\right]^2 + 2uu_y\left(\frac{\varphi}{u}\right)_x\left(\frac{\varphi}{u}\right)_y uu_x\left[\left(\frac{\varphi}{u}\right)_y\right]^2\right\}\frac{x}{r} + \left\{-uu_y\left[\left(\frac{\varphi}{u}\right)_x\right]^2 + 2uu_x\left(\frac{\varphi}{u}\right)_x\left(\frac{\varphi}{u}\right)_y + uu_y\left[\left(\frac{\varphi}{u}\right)_y\right]^2\right\}\frac{y}{r}$$

<u>Lemat 10.</u> $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} H(x,y) = 0$, gdzie $(x_0,y_0) \in \partial K_R$.

<u>Dowód.</u> Wprowadzając współrzędne biegunowe dostajemy

$$H_1(r,\theta) = H(r\cos\theta,\ r\sin\theta) =$$

$$= \frac{1}{v^3}\left(v^2 v_r \psi_r^2 + \psi^2 v_r^3 - 2v\,v_r^2\psi\psi_r - \frac{1}{r^2}\,v^2 v_r \psi_\theta^2\right.$$

Podobnie jak w dowodach lematów 8 i 9 stwierdzamy, że

$$\lim_{(r,\theta)\to(R,\theta)} \frac{v_r\psi_r^2}{v} = \lim_{(r,\theta)\to(r,\theta_0)} \frac{\psi^2 v_r^3}{v^3} = \lim_{(r,\theta)\to(r,\theta_0)} \frac{v_r^2\psi\psi_r}{v^2} = \lim_{(r,\theta)\to(r,\theta_0)} \frac{v_r\psi_\theta^2}{v} = 0$$

a stąd wynika, że

$$\lim_{(r,\theta)\to(R,\theta_0)} H_1(r,\theta) = 0 \qquad (\theta_0 = \mathrm{Arg}\,(x_0 + y_0 i))$$

co należało dowieść.

Ostatecznie z określenia (15) funkcji $\eta(x,y)$ oraz z lematów 7 i 8 mamy $J_1(\varepsilon)\to 0$. Podobnie z lematów 7 i 9 wnosimy, że $J_2(\varepsilon)\to 0$, a z lematów 7 i 10 wynika, że $J_3(\varepsilon)\to 0$. Tak więc twierdzenie 2 zostało udowodnione.

PRACE CYTOWANE

[1] Р. Курант, Д. Гильберт – Методы математической физики, Москва - Ленинград, 1951

[2] M.Krzyżański, Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego, cz.I; 1957.

SUMMARY

On a property of the first eigenfunction of the equation of the inhomogeneous plate.

Let $K_R \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{(x,y) : (x^2 + y^2) < R^2\}$ $(0 < R < +\infty)$.

We assume that the function $u(x,y)$ is a solution of class C^3 in the set $\bar{K}_R$ and it is of class C^4 in K_R of the problems

/1/ $\Delta\Delta u(x,y) = \lambda k(x,y)\, u(x,y)$ for $(x,y) \in K_R$,

/2/ $u(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial n} = 0$ for $(x,y) \in \partial K_R$,

where the function $k(x,y)$ is positif and of class C^1 in the set $\bar{K}_R$. We assume that $k(x,y) = k_1(r)\,|_{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$.

We prove the theorem:

If it exist a solution $u(x,y)$ of the problems /1/,/2/ such that $u(x,y) \neq 0$ for $(x,y) \in K_R$ and $u(x,y) = u_1(r)\,|_{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$ then the function $u(x,y)$ is the only /up tu a multiplicatif constant/ first eigenfunction of the problem.

Резюме

О некотором свойстве первой собственной функции уравнения неоднородной пластинки

Пусть $K_R \overset{df}{=} \{(x,y) : (x^2+y^2 < R^2)\}$ $(0 < R < +\infty)$.

Предполагается, что функция $u(x,y)$ являетвся решением класса C^3 в области $\bar{K}_R$ и класса C^4 в области K_R следующей краевой задачи:

/1/ $\Delta\Delta u(x,y) = \lambda k(x,y)\, u(x,y)$ для $(x,y) \in K_R$,

/2/ $u(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial m} = 0$ " $(x,y) \in \partial K_R$,

где функция $K(x,y)$ является положительной и класса C^1 в области $\bar{K}_R$. Предполагается тоже, что $k(x,y) = k_1(r)\big|_{r=\sqrt{x^2+y^2}}$.

Автор доказывает следующую теорему:

- если существует решение $u(x,y)$ краевой задачи /1/,/2/ такое что

$u(x,y) \neq 0$ для $(x,y) \in K_R$ и $u(x,y) = u_1(r)\big|_{r=\sqrt{x^2+y^2}}$)

то функция $u(x,y)$ является единственной / с точностью к мультипликативной постоянной/ первой собственной функцией этой задачи.