ROCZNIK NAUKOWO – DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE

Zeszyt 41 Prace matematyczne VI Rok 1970

Dobiesław Brydak

MONOTONICZNE ROZWIĄZANIA UOGÓLNIONEGO RÓWNANIA EULERA

1. Wstęp. W pracach [1] i [2] podałem wszystkie ciągłe rozwiązania uogólnionego równania Eulera

$$\varphi\{F[x, \varphi(x)]\} = \varphi(x), \tag{1}$$

gdzie $F(x,y)$ jest funkcją daną, a $\varphi(x)$ jest funkcją szukaną. W pracy [1] omówiony został przypadek, gdy $F(x,y)$ jest funkcją silnie rosnącą ze względu na pierwszą zmienną i w tej pracy podane zostały twierdzenia dotyczące rozwiązań monotonicznych równania (1), a w szczególności warunki konieczne i dostateczne na to, by każde ciągłe rozwiązanie równania [1] było monotoniczne. W tej pracy przez funkcję monotoniczną będziemy rozumieć funkcję słabo monotoniczną. Przypadek, gdy funkcja $F(x,y)$ jest silnie malejąca ze względu na pierwszą zmienną był tematem pracy [2]. Nie zostały tam jednak podane twierdzenia dotyczące rozwiązań monotonicznych, ani też żadne warunki kiedy jedynymi rozwiązaniami ciągłymi równania (1) są funkcje stałe. Uzupełnienie tych braków jest celem obecnej pracy.

2. W tym punkcie podamy założenia i definicje, którymi będziemy się posługiwać, a także twierdzenia dotyczące wprowadzonych pojęć i twierdzenia dotyczące ciągłych rozwiązań równania (1). Podanie tych twierdzeń tutaj jest konieczne dla zrozumienia dalszego ciągu pracy. Ponieważ jednak wszystkie podane w tym punkcie twierdzenia pochodzą z pracy [2], więc podam je bez dowodów, które znaleźć można w pracy [2].

W dalszym ciągu przyjmować będziemy następujące założenia

(H_1) Funkcja $F(x,y)$ jest określona i ciągła w prostokącie $K = \langle\alpha, \beta\rangle \times (\gamma, \delta)$.

(H_2) Funkcja $F(x,y)$ jest malejąca ze względu na pierwszą zmienną i silnie monotoniczną ze względu na drugą zmienną.

(H_3) $F(x,y) \in \langle\alpha,\beta\rangle$ dla $x \in \langle\alpha,\beta\rangle$ i $y \in (\gamma,\delta)$.

(H_4) Funkcja $F_2(x,y) \stackrel{df}{=} F[F(x,y),y]$ jest silnie monotoniczna ze względu na drugą zmienną.

Własności funkcji $F(x,y)$ i $F_2(x,y)$ podaje

Lemat 1. Obie funkcje, $F(x,y)$ i $F_2(x,y)$ są ściśle monotoniczne ze względu na drugą zmienną. Jeśli funkcja $F(x,y)$ (lub $F_2(x,y)$) jest ściśle rosnąca (ściśle malejąca) dla pewnego $x_0 \in \langle\alpha,\beta\rangle$, to jest ściśle rosnąca (ściśle malejąca) dla każdego $x \in \langle\alpha,\beta\rangle$. Funkcja $F_2(x,y)$ spełnia założenia H_1 - H_3, a także równość

$$F[F_2(x,y),y] = F_2[F(x,y),y] \quad \text{dla} \quad x \in \langle\alpha,\beta\rangle, y \in (\gamma,\delta).$$

Definicja 1. Dla ustalonego K i ustalonej funkcji $F(x,y)$ oznaczamy

$$E_1 = \{x:\ x \in \langle\alpha,\beta\rangle \text{ i istnieje } y \in (\gamma,\delta) \text{ takie, że } F(x,y) = x\},$$

$$E_2 = \{x:\ x \in \langle\alpha,\beta\rangle \text{ i istnieje } y \in (\gamma,\delta) \text{ takie, że } F_2(x,y) = x\}.$$

Własności zbiorów E_1, E_2 ustala następujący

Lemat 2. 1. Zbiory $E_1 \setminus (\{\alpha\} \cup \{\beta\})$ i $E_2 \setminus (\{\alpha\} \cup \{\beta\})$ są otwarte.

2. $E_1 \neq \emptyset$.

3. $E_1 \subset E_2$.

4. Jeśli przedział otwarty (a,b) zawiera się w zbiorze E_2 i $(a,b) \cap E_1 \neq \emptyset$, to $(a,b) \subset E_1$.

Definicja 2. Dla ustalonego K i ustalonej funkcji $F(x,y)$ oznaczamy:

przez $\varphi_1(x)$ funkcję określoną na zbiorze E_1 i spełniającą warunek

$$F[x, \varphi_1(x)] = x \quad \text{dla} \quad x \in E_1,$$

przez $\varphi_2(x)$ funkcję określoną na zbiorze E_2 i spełniającą warunek

$$F_2[x, \varphi_2(x)] = x \quad \text{dla} \quad x \in E_2.$$

Własności obu podanych w definicji 2 funkcji zebrane są jako

Lemat 3. 1. Funkcja $\varphi_i(x)$ jest określona i ciągła na zbiorze E_i dla $i = 1,2$.

2. Funkcja $\varphi_1(x)$ spełnia równanie (1) na zbiorze E_1.

3. Funkcja φ_2 x spełnia równanie

$$\varphi_2\{F_2[x, \varphi_2(x)]\} = \varphi_2(x) \quad \text{dla} \quad x \in E_2. \tag{2}$$

4. $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ dla $x \in E_1$.

5. Jeśli funkcja $F(x,y)$ jest ściśle rosnąca (ściśle malejąca) ze względu na drugą zmienną, to funkcja $\varphi_1(x)$ jest ściśle rosnąca (ściśle malejąca) na zbiorze E_1.

Definicja 3. Jeśli funkcja $\varphi(x)$ jest określona na zbiorze $X \subset \langle\alpha,\beta\rangle$ i jej wartości należą do przedziału (γ,δ), to funkcję

$$\overline{\varphi}(x) = F\left[x, \varphi(x)\right], \tag{3}$$

określoną na zbiorze X, nazywamy sprzężoną z funkcją $\varphi(x)$.

Lemat 4. Jeśli $x \in E_2$, to

$$\overline{\varphi}_2(x) \in E_2, \tag{4}$$

$$\varphi_2(x) = \varphi_2\left[\overline{\varphi}_2(x)\right], \tag{5}$$

$$\overline{\varphi}_2\left[\overline{\varphi}_2(x)\right] = x. \tag{6}$$

Definicja 4. Punkt b nazywamy sprzężonym z punktem a, jeżeli $a \in E_2$ i $\overline{\varphi}_2(a) = b$.

Lemat 5. 1. Jeśli b jest sprzężone z a, to a jest sprzężone z b.

2. Dla każdego punktu $a \in E_2$ istnieje jeden i tylko jeden punkt sprzężony z a.

Definicja 5. Przez $\underline{Z}$ oznaczamy rodzinę wszystkich zbiorów Z takich, że $Z \subset \langle\alpha,\beta\rangle$ oraz jeśli $x \in Z$, to $\overline{\varphi}_2(x) \in Z$.

Definicja 6. Przez $\underline{R}$ oznaczamy klasę rodzin R przedziałów domkniętych spełniających następujące warunki:

1. Jeśli $I \in R$, to $I \subset \langle\alpha,\beta\rangle$ i $I \neq \langle\alpha,\beta\rangle$.
2. Jeśli $I_1, I_2 \in R$, to $I_1 = I_2$ lub $I_1 \cap I_2 = \emptyset$.
3. $\langle\alpha,\beta\rangle \setminus E_2 \subset \bigcup_{I \in R} I$.
4. Jeśli $I = \langle a,b\rangle \in R$, $a \neq \alpha$ i $b \neq \beta$, to $\varphi_2(a) = \varphi_2(b)$.
5. Jeśli $I = \langle a,b\rangle \in R$, to $a = \alpha$ lub $a \in E_2$ oraz $b = \beta$ lub $b \in E_2$.
6. $K_R \overset{\mathrm{df}}{=} \langle\alpha,\beta\rangle \setminus \bigcup_{I \in R} I \in \underline{Z}$.
7. $L_R \overset{\mathrm{df}}{=} \left\{x\colon x \neq \alpha,\ x \neq \beta \text{ i } \bigvee_{I \in R}\left[I = \langle a,x\rangle \text{ lub } I = \langle x,b\rangle\right]\right\} \in \underline{Z}$.
8. $L_R \cap \overline{E}_1 = \emptyset$.

Jak widać z definicji zbioru L_R, zbiór ten jest zbiorem końców wszystkich przedziałów należących do rodziny R i różnych od α i od β.

Definicja 7. Niech $R \in \underline{R}$. Przez $\varphi_R(x)$ oznaczamy funkcję określoną następująco:

$$\varphi_R(x) = \begin{cases} \varphi_2(a) & \text{dla } x \in I = \langle a,b\rangle \in R \text{ i } a \neq \alpha, \\ \varphi_2(b) & \text{dla } x \in I = \langle a,b\rangle \in R \text{ i } a = \alpha, \\ \varphi_2(x) & \text{dla } x \in K_R. \end{cases}$$

<u>Uwaga 1</u>. Ta sama funkcja $\varphi_R(x)$ może odpowiadać różnym rodzinom R. Dla każdej jednak takiej funkcji istnieje jedna i tylko jedna rodzina R taka, że funkcja $\varphi_R(x)$ nie może być stała w żadnym przedziale nie należącym do R (patrz [2], str.3).

3. Dokładniejsze badanie ciągłych rozwiązań równania (1) wymaga poznania dodatkowych własności zbiorów podanych w definicjach 1 i 6. Udowodnimy teraz te własności.

<u>Lemat 6</u>. $E_2\setminus E_1 = E_2\setminus\overline{E}_1$.

<u>Dowód</u>. Niech $x_0\in E_2\setminus E_1$. Wystarczy pokazać, że x_0 musi należeć także do prawej strony wzoru, którego dowodzimy. Załóżmy, że tak nie jest. W takim razie istnieje ciąg x_n zbieżny do x_0, którego wszystkie wyrazy należą do E_1 oraz $x_0\in E_2$. Z definicji 1 i 2 oraz z lematów 2 i 3 otrzymujemy teraz, że $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_1(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\varphi_2(x_n) = \varphi_2(x_0)$, skąd, z kolei, $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} F[x_n, \varphi_1(x_n)] = \lim\limits_{n\to\infty} F[x_n, \varphi_2(x_n)] = F[x_0, \varphi_2(x_0)]$. Stąd, znów na mocy definicji 1, otrzymujemy, że $x_0\in E_1$, co przeczy założeniu, że $x_0\in E_2\setminus E_1$.

<u>Lemat 7</u>. Niech $R\in \underline{R}$. Jeśli $L_R\neq\emptyset$, to $L_R\cup K_R\subset E_2\setminus E_1$.

<u>Dowód</u>. Niech $x_0\in L_R\cup K_R$. Pokażemy, że $x_0\notin\overline{E}_1$. Przypuśćmy, że $x_0\in\overline{E}_1$. Z definicji 6 (punkt 8) wynika, że $x_0\notin L_R$, a zatem $x_0\in K_R$. Również z definicji 6 (punkty 3 i 6) wynika teraz, że $x_0\in E_2$. Z lematu 2 wnioskujemy, że istnieje przedział otwarty (w $\langle\alpha,\beta\rangle$) (a,b) taki, że

$$x_0\in (a,b)\subset E_2. \tag{7}$$

Skoro $x_0\in\overline{E}_1$, więc $(a,b)\cap E_1\neq\emptyset$, a zatem z lematu 2 wynika, że

$$x_0\in (a,b)\subset E_1. \tag{8}$$

Z założenia zbiór L_R nie jest pusty. Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy przyjąć, że istnieją punkty zbioru L_R mniejsze od a (z definicji 6 (punkt 8) i z (8) wynika, że wszystkie punkty zbioru L_R muszą się znajdować na zewnątrz przedziału (a,b)). Oznaczmy $y = \sup\{c\colon c\in L_R,\ c<a\}$, $z = \inf\{d\colon x_0\in(d,b)\subset E_1, d\geqslant y\}$. Z określenia liczb y i z wynika, że liczby te są skończone i

$$y<z. \tag{9}$$

W dalszym ciągu pokażemy, że

$$(y,b)\subset E_2. \tag{10}$$

W tym celu wystarczy pokazać, że

$$(y,b)\subset K_R. \tag{11}$$

Przypuśćmy, że tak nie jest, to znaczy, że istnieje punkt $t \in (y,b)$, który nie należy do K_R. Z definicji 6 (punkt 6) wynika, że istnieje przedział $\langle a_1,b_1\rangle \in R$ taki, że $t \in \langle a_1,b_1\rangle$ i $a_1 \in L_R$ lub $b_1 \in L_R$ zaś z określenia y mamy $L_R \cap (y,b) = \emptyset$. Wobec tego $(y,b) \subset \langle a_1,b_1\rangle \in R$, co przeczy temu, że w przedziale (y,b) znajduje się punkt x_0 należący do K_R (porównaj punkt 6 definicji 6).

Z (10) i z lematu 2 otrzymujemy, w oparciu o (8), że $(y,b) \subset E_1$, a stąd i z (9) wynika, że $z \in E_1$, co przeczy określeniu z. A zatem $x_0 \in E_2 \setminus \bar{E}_1$, co, w oparciu o lemat 6, kończy dowód.

Natychmiastowym wnioskiem z lematów 2 i 6 jest następujący

Lemat 8. Jeśli $\bar{E}_1 = \langle \alpha, \beta\rangle$, to $E_2 = E_1$.

Z definicji 6 (punkt 8) i z lematu 8 otrzymujemy natychmiast

Lemat 9. Jeśli $\bar{E}_1 = \langle \alpha, \beta\rangle \neq E_1$, to $\underline{R} = \emptyset$.

W pracy [2] udowodnione zostało

Twierdzenie 1. Jeśli funkcja $F(x,y)$ spełnia założenia $(H_1)-(H_4)$, to jedynymi rozwiązaniami ciągłymi równania (1) w przedziale $\langle \alpha,\beta\rangle$ są funkcje

$$\varphi(x) = \varphi_R(x) \qquad \text{dla } x \in \langle \alpha,\beta\rangle, \quad \text{gdzie } R \in \underline{R}$$

oraz

$$\varphi(x) = c \qquad \text{dla } x \in \langle \alpha,\beta\rangle, \quad \text{gdzie } c \in (\gamma,\delta).$$

Natychmiastowym wnioskiem z lematu 8 i z twierdzenia 1 jest następujący

Wniosek 1. Jeśli funkcja $F(x,y)$ spełnia założenia $(H_1) - (H_4)$ i $E_1 = \langle \alpha,\beta\rangle$, to jedynymi rozwiązaniami ciągłymi równania (1) w przedziale $\langle \alpha,\beta\rangle$ są funkcje

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) \qquad \text{dla } x \in \langle \alpha,\beta\rangle$$

oraz

$$\varphi(x) = c \qquad \text{dla } x \in \langle \alpha,\beta\rangle, \quad \text{gdzie } c \in (\gamma,\delta).$$

Wniosek 1, udowodniony w nieco inny sposób w pracy [2] ((twierdzenie 2), pozwala nam, na podstawie lematu 3, uzyskać następujący

Wniosek 2. Przy założeniach wniosku 1 wszystkie rozwiązania równania (1) są monotoniczne w $\langle \alpha,\beta\rangle$.

Twierdzenie 2. Niech funkcja $F(x,y)$ spełnia założenia $(H_1) - (H_4)$ i niech $E \overset{df}{=} E_2 \setminus E_1 \neq \emptyset$. Na to, by wszystkie ciągłe rozwiązania równania (1) były rosnące (malejące) w $\langle \alpha,\beta\rangle$ potrzeba i wystarcza, aby funkcja $\varphi_2(x)$ była rosnąca (malejąca) w każdym przedziale zawartym w zbiorze E.

Dowód. Dowód przeprowadzimy dla funkcji rosnących. Dla funkcji malejących jest analogiczny. Dla dowodu konieczności załóżmy najpierw, że funkcja $\varphi_2(x)$ nie jest rosnąca w pewnym przedziale $\langle a,b\rangle$ zawartym w zbiorze E. Z definicji 2 i z określenia zbioru E wiemy, że funkcja $\varphi_2(x)$ jest w przedziale $\langle a,b\rangle$ określona. Możemy przyjąć, że przedział ten jest domknięty, na podstawie lematu 3 i że $\langle a,b\rangle \neq \langle \alpha,\beta\rangle$. Określmy rodzinę R następująco $R = \{\langle \alpha,a\rangle, \langle b,\beta\rangle\}$. $R \in \underline{R}$ na podstawie definicji 6. Określając funkcję $\varphi_R(x)$ według definicji 7, otrzymujemy, na podstawie definicji 6 i 7, że $\langle a,b\rangle \subset K_R \cup L_R, \varphi_R(x) = \varphi_2(x)$ dla $x \in \langle a,b\rangle$. Pokazaliśmy w ten sposób, że jeśli istnieje przedział $\langle a,b\rangle \subset E$, w którym funkcja $\varphi_2(x)$ nie jest rosnąca, to istnieje również ciągłe rozwiązanie $\varphi_R x$ równania (1), które nie jest rosnące w $\langle \alpha,\beta\rangle$.

Dla dowodu dostateczności załóżmy teraz, że istnieje ciągłe rozwiązanie $\varphi(x)$ równania (1), które nie jest rosnące w przedziale $\langle \alpha,\beta\rangle$ Istnieją zatem punkty x_1, $x \in \langle \alpha,\beta\rangle$ takie, że

(12) $\alpha < x_1 < x < \beta$ i $\varphi(x_1) > \varphi(x)$.

Niech x_2 będzie kresem dolnym zbioru liczb x, które spełniają warunek (12) dla ustalonego x_1. Z (12) mamy, że

(13) $\alpha < x_2 < \beta$.

Z twierdzenia 1 wynika, że istnieje rodzina $R \in \underline{R}$ taka, że $\varphi(x) = \varphi_R(x)$ dla $x \in \langle \alpha,\beta\rangle$. Według określenia punktu x_2, funkcja $\varphi(x)$ nie jest stała w żadnym prawostronnym otoczenia punktu x_2, a więc $x_2 \in L_R \cup K_R \setminus (\{\alpha\} \cup \{\beta\})$. Z lematu 7 otrzymujemy, że $x_2 \in (E_2 \setminus E_1) \setminus \{\alpha\} \cup \{\beta\})$. Z lematu 2 wiemy, że istnieje liczba $\eta > 0$ taka, że $(x_2 - \eta, x_2 + \eta) \subset E_2 \setminus E_1$. Korzystając znów z określenia punktu x_2, wnioskujemy, że istnieje punkt $\bar{x}$ taki, że $\bar{x} \in (x_2, x_2+\eta)$ i $\varphi(\bar{x}) < \varphi(x_2) = \varphi(x_1)$ i że oba punkty x_2 i $\bar{x}$ należą do $L_R \cup K_R$. Więc $\varphi(\bar{x}) = \varphi_2(\bar{x})$ i $\varphi(x_2) = \varphi_2(x_2)$, a zatem funkcja $\varphi_2(x)$ nie jest rosnąca w przedziale $\langle x_2, \bar{x}\rangle$, co kończy dowód naszego twierdzenia.

Z twierdzenia 2 wynika natychmiastowy

<u>Wniosek 3</u>. Niech funkcja $F(x,y)$ spełnia założenia $(H_1) - (H_4)$ i niech $E_2 \setminus E_1 \neq \emptyset$. Na to by wszystkie ciągłe rozwiązania równania (1) były stałe w przedziale $\langle \alpha,\beta\rangle$, potrzeba i wystarcza, aby funkcja $\varphi_2(x)$ była stała w każdym przedziale zawartym w $E_2 \setminus E_1$.

<u>Twierdzenie 3</u>. Jeśli funkcja $F(x,y)$ spełnia założenia $(H_1) - (H_4)$, $E_2 \setminus E_1 = \emptyset$ i $E_1 \neq \langle \alpha,\beta\rangle$, to jedynymi rozwiązaniami ciągłymi równania (1) w przedziale $\langle \alpha,\beta\rangle$ są funkcje $\varphi(x) = c$ dla $x \in \langle \alpha,\beta\rangle$, gdzie $c \in (\gamma,\delta)$.

<u>Dowód</u>. Załóżmy, że istnieje ciągłe rozwiązanie $\varphi(x)$ równania (1) które nie jest stałe w przedziale $\langle \alpha,\beta\rangle$. Z twierdzenia 1 wiemy, że istnieje rodzina $R \in \underline{R}$ taka, że $\varphi(x) = \varphi_R(x)$ dla $x \in \langle \alpha,\beta\rangle$. Z założeń twierdzenia 3 wynika, na podstawie definicji 6, że $L_R = \emptyset$. Skoro funkcja $\varphi(x)$ nie jest stała, otrzymujemy w takim razie z definicji 6

i 7, że $K_R = \langle\alpha,\beta\rangle$. Stąd i z definicji 6 otrzymujemy, że $E_2 = \langle\alpha,\beta\rangle$, a więc $\bar{E}_1 = \langle\alpha,\beta\rangle$, na mocy lematu 6 i założenia, że $E_2 \setminus E_1 = \emptyset$. Z lematu 9 i twierdzenia 1 wnioskujemy więc, że założenie istnienia ciągłego rozwiązania równania (1), które nie jest stałe w przedziale $\langle\alpha,\beta\rangle$ jest sprzeczne z założeniami twierdzenia 3, bo wtedy $\underline{R} = \emptyset$.

Prostym wnioskiem z twierdzenia 3 i wniosku 1 jest

Twierdzenie 4. Jeśli funkcja $F(x,y)$ spełnia założenia $(H_1)-(H_4)$ i $E_2 \setminus E_1 = \emptyset$, to rodzina rozwiązań równania (1) ciągłych w przedziale $\langle\alpha,\beta\rangle$ jest rodziną conajwyżej dwuparametrową.

Podobny rezultat, jaki otrzymaliśmy w pracy [1], co do ilości rozwiązań ciągłych, otrzymujemy i tutaj:

Twierdzenie 5. Niech funkcja $F(x,y)$ spełnia założenia $(H_1)-(H_4)$ i niech $E = E_2 \setminus E_1 \neq \emptyset$. Jeśli funkcja $\varphi_2(x)$ jest monotoniczna w zbiorze E, to każde ciągłe rozwiązanie równania (1) w przedziale $\langle\alpha,\beta\rangle$ jest jednoznacznie wyznaczone przez swe wartości w punktach α i β.

Dowód. Załóżmy, że istnieją dwa ciągłe rozwiązania równania (1) w przedziale $\langle\alpha,\beta\rangle$, $\Psi_1(x)$ i $\Psi_2(x)$, takie, że $\Psi_1(\alpha) = \Psi_2(\alpha)$ i $\Psi_1(\beta) = \Psi_2(\beta)$ oraz że istnieje punkt $t \in (\alpha,\beta)$, dla którego spełniona jest nierówność

(14) $$\Psi_1(t) \neq \Psi_2(t).$$

Przynajmniej jedno z tych rozwiązań musi przyjmować w punkcie t wartość różną od $\varphi_2(t)$. Przyjmijmy, że tym rozwiązaniem jest $\Psi_1(x)$ (nie jest, oczywiście, istotne czy $t \in E_2$). Z twierdzenia 1 wynika, że $\Psi_1(x)$ musi być funkcją stałą w pewnym przedziale $I = \langle a,b\rangle \subset \langle\alpha,\beta\rangle$ i $I \in R \in \underline{R}$, gdzie R jest taką rodziną, że $\Psi_1(x) = \varphi_R(x)$ dla $x \in \langle\alpha,\beta\rangle$. Funkcja $\Psi_1(x)$ nie może być stała w całym przedziale $\langle\alpha,\beta\rangle$, bo wtedy mielibyśmy $\Psi_1(\alpha) = \Psi_1(\beta)$, co przeczyłoby, na podstawie (14) i twierdzenia 1, założeniu, że $\varphi_2(x)$ jest funkcją monotoniczną w zbiorze $E_2 \setminus E_1$. Przyjmijmy, że

(15) $$a \neq \alpha$$

(w przypadku, gdy $b \neq \beta$ dowód jest analogiczny). Pokażemy najpierw, że wtedy również $b \neq \beta$. Istotnie, załóżmy, że $b = \beta$. Wtedy otrzymujemy z definicji 6 i 7, że

(16) $$\Psi_1(x) = \varphi_2(a) = \Psi_1(\beta) \quad \text{dla} \quad x \in \langle a,\beta\rangle.$$

Z (14) i z twierdzenia 1 wynika teraz, że istnieje punkt t_1 spełniający warunki

(17) $$t \leqslant t_1 < \beta \quad \text{i} \quad t_1 \in L_H,$$

gdzie $H \in \underline{R}$ jest taką rodziną przedziałów, że $\Psi_2(x) = \varphi_H(x)$ dla $x \in \langle\alpha,\beta\rangle$. Taka rodzina H istnieje, bo funkcja $\Psi_2(x)$ nie jest stała w całym przedziale $\langle\alpha,\beta\rangle$, skoro na końcach tego przedziału przyjmuje różne wartości. Ponieważ jednak $\Psi_2(\beta)=\Psi_1(\beta)$, więc z twierdzenia 1 oraz z (17) wnioskujemy, że istnieje punkt t_2 spełniający warunki

(18) $t_1<t_2\leqslant\beta$, $t_2\in L_H\cup K_H$, $\Psi_2(t_2)=\Psi_2(\beta)=\Psi_2(x)$ dla $x\in\langle t_2,\beta\rangle$

Z określenia punktów a, t_1 i t_2, z (15), (16), (17), (18) i z lematu 7 wynika, że punkty a, t_1 i t_2 należą do $E_2\setminus E_1$, $a<t_1<t_2$ i że $\varphi_2(a)=\varphi_2(t_2)\neq\varphi_2(t_1)$, co przeczy założeniu, że funkcja $\varphi_2(x)$ jest monotoniczna w zbiorze $E_2\setminus E_1$.

A zatem $b\neq\beta$, skąd, na mocy definicji 6 (punkt 7) i 7,

(19) $a,b\in L_H$, $\varphi_2(a)=\varphi_2(b)=\Psi_1(a)=\Psi_1(b)$.

W dalszym ciągu możliwe są trzy przypadki:

1/ $t\in L_H\cup K_H$.

Z definicji 6 (punkty 6 i 7) wynika wtedy, że $\Psi_2(t)=\varphi_2(t)$, a to przeczy monotoniczności funkcji $\varphi_2(x)$ w zbiorze $E_2\setminus E_1$, wobec (14) i (19)

2/ Istnieje punkt $t_0\in\langle a,b\rangle$ taki, że $t_0\in L_H\cup K_H$ i $\varphi_2(t_0)=\Psi_2(t_0)=\Psi_2(t)$.

Wobec (14) dochodzimy do sprzeczności z założeniem monotoniczności funkcji $\varphi_2(x)$ w zbiorze $E_2\setminus E_1$, analogicznie jak w poprzednim przypadku.

Jeśli nie zachodzi przypadek 1/, to istnieje przedział $\langle c,d\rangle\in H$ taki, że $t\in\langle c,d\rangle$. Możemy przyjąć, że ani c ani d nie należą do (a,b), bo przypadek rozpatrzyliśmy w punkcie 2/. Pozostał nam więc jeszcze do rozpatrzenia przypadek

3/ Istnieje przedział $\langle c,d\rangle\in H$ taki, że na mocy definicji 7 i określenia rodziny H,

(20) $c<a<b<d$, $c,d\in L_H$ i $\Psi_2(x)=\varphi_2(a)=\varphi_2(b)=\Psi_2(a)=\Psi_2(b)$.

Przedział $\langle c,d\rangle$ zawiera się w (α,β), co możemy pokazać analogicznie, jak pokazaliśmy, że $I\subset(\alpha,\beta)$. I w tym przypadku dochodzimy, wobec (14), do sprzeczności z założeniem monotoniczności funkcji $\varphi_2(x)$ w zbiorze $E_2\setminus E_1$. Dowód twierdzenia 5 został w ten sposób zakończony.

Prace cytowane

[1] D. Brydak, Sur une équation fonctionnelle (I), Ann. Polon. Math. 15 (1964), str.237-251.

[2] D. Brydak, Sur une équation fonctionnelle (II), Ann. Polon. Math. 21 (1968), str.1-13.

S u m m a r y

MONOTONIC SOLUTIONS OF THE GENERALIZED EULER EQUATION

There are given the conditions under which the generalized Euler equation (1) posses only monotonic continuous solutions, under the assumption that the hypothesis (H) are fulfilled. The main result is that all continuous solutions of the equation (1) are increasing (decreasing), iff the function $\varphi_2(x)$ is increasing (decreasing) in each interval contained in $E_2 \setminus E_1$ (see definitions 1 and 2). Moreover, if the function $\varphi_2(x)$ is monotonic in $E_2 \setminus E_1$, all continuous solutions of the equation (1) are determined by the values in α and β.

Р е з ю м е

МОНОТОННЫЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

Поданы условия, при которых обобщенное уравнение /I/ Эйлера имеет единственно непрерывное обобщенное решение, при условии, что условия /H/исполнены. Главным успехом является то, что все непрерывные решения уравнения /I/ возрастающие /убывающие/ тогда и только тогда если функция $\varphi_2(x)$ возрастающая /убывающая/ в каждом интервале заключенном в $E_2 \setminus E_1$ /см. определения I и 2/.

Кроме того когда функция $\varphi_2(x)$ является монотонной в $E_2 \setminus E_1$ то все непрерывные решения уравнения /I/ определенные через значения в α и β.