ROCZNIK NAUKOWO - DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE

Zeszyt 41 Prace matematyczne VI Rok 1970

Andrzej Grząślewicz

O PEWNYCH HOMOMORFIZMACH I HOMOMORFIZMACH CIĄGŁYCH GRUPOIDU BRANDTA

Wstęp

Pierwsza część tej pracy, mająca charakter algebraiczny, poświęcona jest podaniu wszystkich homomorfizmów grupoidu Brandta (B,o) oraz pewnej jego podstruktury (B',o) w taką półgrupę $(M,\bullet)$ z zerem "0", że struktura $(M\setminus\{0\},\bullet)$ jest grupą. Rozważania prowadzi się dla grupoidu Brandta postaci $(A^2 \times G,o)$, rozważaną podstrukturę $(B',o)=(R \times G,o)$ uzyskuje się wówczas narzucając na zbiór A dowolny ścisły porządek "$<$" /antysymetryczny, przechodni i spójny/ i wymagając, by do zbioru $R\times G$ należały wszystkie te i tylko te elementy (x,y,α) z $A^2 \times G$, dla których $x \leqslant y$.

W części pierwszej podaję także pewne twierdzenia dotyczące izomorfizmów grupoidów Brandta oraz pewnych ich podstruktur, a także pewne warunki wystarczające na to, by homomorficzne obrazy grupoidu Brandta postaci $(A^2 \times G,o)$ oraz jego podstruktury $(R \times G,o)$ były grupami.

Część druga poświęcona jest podaniu wszystkich homomorfizmów ciągłych grupoidu Brandta oraz struktury $(R \times G,o)$ w strukturę $(M,\bullet)$ przy odpowiednio określonych w tych strukturach topologiach.

W części trzeciej podano pewne związki między homomorfizmami $(A^2 \times G,o)$ w $(M,\bullet)$ i $(R \times G,o)$ w $(M,\bullet)$.

Praca ma swoje źródło w notach [2], [3], [4]. Rozwiązanie niektórych z powyżej podanych zagadnień w przypadku, gdy grupoid $(A^2 \times G,o)$ redukuje się do grupoidu (A^2,o), gdzie zbiór A jest zbiorem liczb rzeczywistych, a struktura $(M,\bullet)$ jest zbiorem liczb rzeczywistych z mnożeniem, podali M. Frechet w [2] i Z. Moszner w [3] i [4], rozwiązując równanie $F(x,y)\cdot F(y,z)=F(x,z)$ przy warunku $x \leqslant y \leqslant z$. Z.Moszner w [4] podał także wnioski dotyczące ogólnego rozwiązania regularnego /klasy C^n, gdzie n jest liczbą całkowitą nieujemną/ tego równania. Od Z. Mosznera wyszła propozycja uogólnienia przeze mnie tych wyników.

Pragnę serdecznie podziękować prof. dr Z. Mosznerowi za cenne uwagi czynione w trakcie pisania przeze mnie niniejszej pracy.

Część I

Niech A będzie dowolnym zbiorem, $(G,\bullet)$ dowolną grupą, zaś $(M,\bullet)$ taką półgrupą z zerem "0" /tzn. $0\bullet a = a\bullet 0 = 0$ dla każdego a z M/, że $(H,\bullet)$ gdzie $H = M \setminus \{0\}$, jest grupą, przy czym działanie w grupie $(H,\bullet)$ jest zwężeniem działania z półgrupy $(M,\bullet)$ do zbioru H.

Rozważmy strukturę $(A^2 \times G, \circ)$ przyjmując, że element $(x_1,y_1,\alpha) \in A^2 \times G$ jest przemnażalny przez element $(x_2,y_2,\beta) \in A^2 \times G$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y_1 = x_2$ i wówczas

$$(x_1,y_1,\alpha) \circ (x_2,y_2,\beta) = (x_1,y_2,\alpha\bullet\beta).$$

Struktura $(A^2 \times G, \circ)$ jest grupoidem Brandta. Nazywać ją będziemy trójkowym grupoidem Brandta.

Twierdzenie 1. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by funkcja F była homomorfizmem grupoidu Brandta $(A^2 \times G, \circ)$ w półgrupę $(M,\bullet)$ jest, by była postaci

(1) $F(x,y,\alpha) = f^{-1}(x)\bullet g(\alpha)\bullet f(y)$ lub $F(x,y,\alpha) \equiv 0$,

gdzie f jest dowolnym elementem zbioru H^A, czyli dowolną funkcją o dziedzinie A i wartościach z H, zaś g jest dowolnym homomorfizmem grupy $(G,\bullet)$ w grupę $(H,\circ)$.

Dowód. Rozważmy dwa przypadki:

a/ $F(x,y,\alpha) \equiv 0$,

b/ istnieje taki element (a,b,α') z $A^2 \times G$, że $F(a,b,\alpha') \neq 0$.

W przypadku a/ funkcja F jest oczywiście żądanej postaci. Niech (x,y,α) będzie dowolnym elementem zbioru $A^2 \times G$ i niech e będzie elementem neutralnym grupy $(G,\bullet)$. W przypadku b/ mamy wówczas

$$F(a,x,e)\bullet F(x,y,\alpha)\bullet F(y,b,\alpha^{-1}\bullet\alpha') = F(a,b,\alpha'),$$

czyli $F(x,y,\alpha) \neq 0$.

Funkcja F jest więc w tym przypadku homomorfizmem struktury $(A^2 \times G,\circ)$ w grupę $(H,\bullet)$.

Niech a będzie dowolnym, ustalonym elementem zbioru A. Przyjmijmy

$$f(x) = F(a,x,e), \qquad g(\alpha) = F(a,a,\alpha).$$

Funkcja g jest oczywiście homomorfizmem $(G,\bullet)$ w $(H,\bullet)$. Ponieważ F jest homomorfizmem, więc

$$F(a,x,e)\bullet F(x,y,\alpha) = F(a,y,\alpha)$$

oraz

$$F(a,y,\alpha) = F(a,a,\alpha) \bullet F(a,y,e),$$

a stąd

$$F(a,x,e) \bullet F(x,y,\alpha) = F(a,a,\alpha) \bullet F(a,y,e),$$

czyli

$$F(x,y,\alpha) = f^{-1}(x) \bullet g(\alpha) \bullet f(y).$$

Fakt, że funkcje postaci (1) są homomorfizmami $(A^2 \times G, o)$ w $(M,\bullet)$ jest oczywisty.

Każdy grupoid Brandta (B,o) jest izomorfijny z pewnym trójkowym grupoidem Brandta /[5], str.11/. Z powyższego oraz rozważań poprzednich mamy

Wniosek 1. Jedynymi homomorfizmami grupoidu Brandta (B,o) w strukturę $(M,\bullet)$, czyli jedynymi rozwiązaniami równania Cauchy'ego

$$h(\alpha) \bullet h(\beta) = h(\alpha o \beta)$$

są funkcje postaci

$$h(\alpha) = F(I(\alpha)),$$

gdzie I jest dowolnym izomorfizmem grupoidu Brandta (B,o) na pewien grupoid trójkowy Brandta $(A^2 \times G, o)$, zaś F jest homomorfizmem $(A^2 \times G, o)$ w $(M,\bullet)$, a więc funkcją postaci (1) z twierdzenia 1.

Przed podaniem rozwiązania równania Cauchy'ego na strukturze $(R \times G, o)$ przyjmijmy następującą definicję:

Definicja 1. Podzbiór B zbioru A uporządkowanego przez relację "$\leqslant$" nazywamy przedziałem, jeżeli spełniony jest warunek

$$\bigwedge_{x_1,x_2 \in B} \; \bigwedge_{x \in A} \left(x_1 \leqslant x \leqslant x_2 \Longrightarrow x \in B\right).$$

Rozważmy podstrukturę $(R \times G, o)$ grupoidu trójkowego Brandta $(A^2 \times G, o)$, w którym zbiór A jest uporządkowany relacją "$\leqslant$", przyjmując

$$R \stackrel{\mathrm{df}}{=} \left\{(x,y) \in A^2 : x \leqslant y\right\}.$$

Twierdzenie 2. Jedynymi homomorfizmami struktury $(R \times G, o)$ w $(M,\bullet)$ tzn. rozwiązaniami równania

$$F(x,y,\alpha) \bullet F(y,z,\beta) = F(x,z,\alpha \bullet \beta)$$

przy warunku $x \leqslant y \leqslant z$ są funkcje postaci

$$(2)\quad F(x,y,\alpha) = \begin{cases} f_\Delta^{-1}(x) \bullet g_\Delta(\alpha) \bullet f_\Delta(y) & \text{dla } (x,y,\alpha) \in T(\Delta) \times G,\ \Delta \in U, \\ 0 & \text{dla } (x,y,\alpha) \in [R \times G] \setminus \bigcup_{\Delta \in U} T(\Delta) \times G, \end{cases}$$

gdzie

(3) U jest dowolnym układem przedziałów rozłącznych zbioru A,

(4) $T(\Delta) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \left\{(x,y) \in R : (x,y) \in \Delta^2\right\}$, gdzie $\Delta \in U$,

(5) f_Δ jest dowolną funkcją ze zbioru H^Δ dla $\Delta \in U$,

(6) g_Δ jest przy zadanym Δ z U dowolnym homomorfizmem $(G,\bullet)$ w $(H,\bullet)$.

Dowód. Z definicji zbioru $T(\Delta)$ wynika natychmiast, że
a/ jeżeli $\Delta_1 \cap \Delta_2 \neq \emptyset$, to $\Delta_1 = \Delta_2$ i $T(\Delta_1) = T(\Delta_2)$,
b/ jeżeli $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$, to $T(\Delta_1) \cap T(\Delta_2) = \emptyset$.

Gdybyśmy rozważyli wszystkie możliwości ze względu na przynależność par (x,y), (y,z), (x,z) do zbioru $Z' \stackrel{df}{=} \bigcup_{\Delta \in U} T(\Delta)$, to po uwzględnieniu warunków a/ i b/ okazałoby się, że mogą mieć miejsce tylko następujące przypadki:

1°. $(x,y) \in Z'$ i $(y,z) \in Z'$ i $(x,z) \in Z'$,
2°. $(x,y) \notin Z'$ i $(y,z) \notin Z'$ i $(x,z) \notin Z'$,
3°. $(x,y) \notin Z'$ i $(y,z) \in Z'$ i $(x,z) \notin Z'$,
4°. $(x,y) \in Z'$ i $(y,z) \notin Z'$ i $(x,z) \notin Z'$.

Z bezpośrednich przeliczeń wynika, że w tych przypadkach funkcja F postaci (1) jest homomorfizmem $(R \times G, \circ)$ w $(M, \bullet)$. Pokażemy to dla przypadku 1°.

Fakt, że $(x,y) \in Z'$ i $(y,z) \in Z'$ i $(x,z) \in Z'$ jest równoważny temu, że elementy (x,y,α), (y,z,β) i $(x,z,\alpha \bullet \beta)$ należą do dokładnie jednego zbioru $T(\Delta)$ i wówczas

$$F(x,y,\alpha) \bullet F(y,z,\beta) = f_\Delta^{-1}(x) \bullet g_\Delta(\alpha) \bullet f_\Delta(y) \bullet f_\Delta^{-1}(y) \bullet g_\Delta(\beta) \bullet f_\Delta(z) =$$
$$= f_\Delta^{-1}(x) \bullet g_\Delta(\alpha) \bullet g_\Delta(\beta) \bullet f_\Delta(z) = f_\Delta^{-1}(x) \bullet g_\Delta(\alpha \bullet \beta) \bullet f_\Delta(z) = F(x,z,\alpha \bullet \beta).$$

Pokażemy obecnie, że jeżeli F jest homomorfizmem $(R \times G, \circ)$ w $(M, \bullet)$ to jest postaci (2).

Niech a będzie dowolnym elementem zbioru A. Utwórzmy zbiór

$$P_a \stackrel{df}{=} \{x \in A : [(x,a) \in R \text{ i } F(x,a,e) \neq 0 \text{ lub } (a,x) \in R \text{ i } F(a,x,e) \neq 0]\},$$

gdzie e jest elementem neutralnym grupy $(G, \bullet)$.

Pokażemy, że rodzina

$$\mathcal{U} \stackrel{df}{=} \{\Delta \subset A : \bigvee_{a \in A} (\Delta = P_a)\}$$

spełnia warunek (3) twierdzenia 2. W tym celu udowodnimy kilka lematów, w których zakładamy, że F jest rozważanym homomorfizmem.

Lemat 1. Jeżeli $a \leqslant x \leqslant y \leqslant b$, $F(a,b,\alpha') \neq 0$ i $\alpha \in G$, to
a/ $F(b,b,e) = e'$, gdzie e' jest elementem neutralnym grupy $(H, \bullet)$,
b/ $F(x,y,\alpha) \neq 0$.

Dowód. F jest homomorfizmem, więc

$$F(a,b,\alpha') \bullet F(b,b,e) = F(a,b,\alpha'),$$

czyli

$$F(b,b,e) = e'$$

oraz

$$F(a,x,\alpha') \bullet F(x,y,\alpha) \bullet F(y,b,\alpha^{-1}) = F(a,b,\alpha').$$

czyli

$$F(x,y,\alpha) \neq 0.$$

<u>Lemat 2</u>. Jeżeli $x \leq a \leq b \leq y$, $F(a,b,\alpha_0) = 0$ i $\alpha \in G$, to $F(x,y,\alpha) = 0$.

<u>Dowód</u>. $F(x,a,\alpha_0^{-1}) \bullet F(a,b,\alpha_0) \bullet F(b,y,\alpha) = F(x,y,\alpha)$,
a stąd mamy

$$F(x,y,\alpha) = 0,$$

co należało pokazać.

Z definicji zbioru P_a oraz lematu 2 wynika natychmiast, że warunki $F(a,a,e) = 0$ i $P_a = \emptyset$ są równoważne.

<u>Lemat 3</u>. Jeżeli $b \in P_a$, to $P_b = P_a$.

<u>Dowód</u>. Niech np. będzie $b < a$ i niech $x \in A$. Wówczas mogą mieć miejsce następujące przypadki:

a/ $x < b \leq a$, b/ $b \leq x \leq a$, c/ $b < a \leq x$.

Ponieważ $b \in P_a$ i $b \leq a$, więc $F(b,a,e) \neq 0$. Rozważmy, na przykład, przypadek a/. Mamy wówczas

$$F(x,b,e) \bullet F(b,a,e) = F(x,a,e),$$

a stąd wynika, że warunki $x \in P_b$ i $x \in P_a$ są równoważne, więc $P_b = P_a$. Analogicznie przeprowadza się dowód w przypadkach b/ i c/, a także w przypadku, gdy $a < b$.

<u>Wniosek 2</u>. Jeżeli $x \leq y$ i $(x,y) \in P_a \times P_a$, to $F(x,y,e) \neq 0$.

<u>Lemat 4</u>. Jeżeli $b \notin P_a$, to $P_b \cap P_a = \emptyset$.

<u>Dowód</u>. Przypuśćmy, że istnieje x takie, że $x \in P_b \cap P_a$. Musiałoby wówczas być, na mocy lematu 3, $P_b = P_x = P_a$, co jest niemożliwe, gdyż $b \notin P_a$ i, wobec niepustości zbioru P_b, $b \in P_b$.

<u>Lemat 5</u>. Zbiór P_a jest przedziałem.

<u>Dowód</u>. Załóżmy, że $(x_1,x_2) \in P_a \times P_a$, $x \in A$ i $x_1 \leq x \leq x_2$. Z wniosku 2 wynika, że $F(x_1,x_2,e) \neq 0$. Ponieważ

$$F(x_1,x,e) \bullet F(x,x_2,e) = F(x_1,x_2,e),$$

więc

$$F(x_1,x,e) \neq 0, \quad \text{a stąd} \quad x \in P_{x_1}.$$

Z lematu 3 wynika, że $P_{x_1} = P_a$, więc $x \in P_a$, czyli P_a jest przedziałem.

<u>Lemat 6</u>. Jeżeli $y \notin P_a$ i $x \in P_a$, to

a/ jeżeli $x < y$, to $F(x,y,e) = 0$,

b/ jeżeli $y < x$, to $F(y,x,e) = 0$.

<u>Dowód</u>. Przypuśćmy, że $F(x,y,e) \neq 0$ i $x < y$. Z definicji zbioru P_x wynika, że $y \in P_x$, z lematu zaś 3 wynika, że $P_x = P_a$: byłoby więc $y \in P_a$, co jest sprzeczne z założeniem. Analogicznie przeprowadza się dowód w przypadku b/.

Z lematów 3,4,5 wynika, że $\mathcal{U}$ jest rodziną przedziałów rozłącznych, z wniosku 2 oraz lematu 1 wynika, że na zbiorze $Z \overset{df}{=} \bigcup_{\Delta \in \mathcal{U}} T(\Delta) \times G$ funkcja F przyjmuje wartości różne od zera.

Pokażemy obecnie, że funkcja F jest żądanej postaci. Z lematu 2 oraz lematu 6 wynika, że w każdym punkcie zbioru $(R \times G) \setminus Z$ funkcja F przyjmuje wartość 0.
Niech (x,y,α) będzie dowolnym elementem zbioru Z. Istnieje wówczas dokładnie jeden taki przedział Δ rodziny $\mathcal{U}$, że $(x,y,\alpha) \in T(\Delta) \times G$.
Niech a będzie dowolnym, ustalonym elementem przedziału Δ.
Przyjmijmy

$$f_{\Delta}(x) = \begin{cases} F(a,x,e) & \text{dla} \quad x \in \{x \in \Delta : a \leqslant x\}, \\ F^{-1}(x,a,e) & \text{dla} \quad x \in \{x \in \Delta : x < a\} \end{cases}$$

oraz

$$g_{\Delta}(\alpha) = F(a,a,\alpha) .$$

Oczywiście g_{Δ} jest homomorfizmem $(G,\bullet)$ w $(H,\bullet)$ i $f \in H^{\Delta}$.
Możliwe są tu przypadki.

a/ $x < a \leqslant y$, b/ $x \leqslant y < a$, c/ $a \leqslant x \leqslant y$.

W przypadku a/ mamy

$$F(x,y,\alpha) = F(x,a,\alpha) \bullet F(a,y,e) = F(x,a,e) \bullet F(a,a,\alpha) \bullet F(a,y,e) =$$

$$= f_{\Delta}^{-1}(x) \bullet g_{\Delta}(\alpha) \bullet f_{\Delta}(y) .$$

Analogicznie dowodzi się, że w przypadkach b/ i c/ funkcja F jest także żądanej postaci. Funkcja F jest więc postaci (2) na zbiorze $R \times G$, co należało pokazać.

Podamy obecnie kilka twierdzeń dotyczących izomorficznych grupoidów Brandta oraz pewnych ich izomorficznych podstruktur.

Definicja 2. Będziemy mówili, że $(B',\bullet)$ jest podstrukturą struktury (B,o), jeżeli $B' \subset B$ i "$\bullet$" jest zawężeniem działania "o" do zbioru B'. Będziemy dalej w miejsce $(B',\bullet)$ pisać (B',o).

Niech (B,o) i $(A^2 \times G,o)$ będą izomorfijnymi grupoidami Brandta. Bezpośrednio widoczne jest, że

Lemat 7. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by podstruktura (B',o) grupoidu Brandta (B,o) była grupą (zwaną wtedy grupą grupoidu (B,o)) jest, by była izomorfijna z podstrukturą postaci $(\{x\}^2 \times G,o)$ grupoidu trójkowego Brandta $(A^2 \times G,o)$, gdzie $x \in A$ i (G',o) jest podgrupą grupy $(G,\bullet)$.

Niech (B',o) będzie taką podstrukturą grupoidu Brandta (B,o), że:

(7) B' zawiera każdą grupę G_B grupoidu (B,o) Brandta,

(8) $\bigwedge_{a \in B} \left[a \notin S(G_B) \Longrightarrow (a \in B' \quad \text{albo} \quad a^{-1} \in B') \right]$,

gdzie $S(G_B)$ oznacza sumę mnogościową wszystkich grup grupoidu Brandta (B,o),

(9) jeżeli elementy a i b zbioru B' są przemnażalne, to aob należy do B'.

Twierdzenie 3. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by podstruktura (B',o) grupoidu Brandta (B,o) miała własności (7), (8), (9) jest, by była izomorfijna z pewną podstrukturą $(R \times G,o)$ grupoidu $(A^2 \times G,o)$, gdzie, jak poprzednio, $R = \{(x,y) \in A^2 : x \leq y\}$ przy "$<$" oznaczającym relację porządkującą zbiór A.

Dowód. Niech (B',o) ma własności (7), (8), (9). Pokażemy najpierw, że relacja "$<$" określona w zbiorze A następująco

(10) $\quad x<y \overset{df}{=} (x \neq y \quad i \quad I^{-1}(x,y,e) \in B'),$

gdzie I jest funkcją ustalającą izomorfizm grupoidów (B,o) i $(A^2 \times G,o)$, ustala porządek w A.

Niech $x<y$. Wówczas $I^{-1}(x,y,e) \in B'$. Ponieważ elementy $I^{-1}(x,y,e)$ i $I^{-1}(y,x,e)$ są elementami odwrotnymi w grupoidzie (B,o), $I^{-1}(x,y,e) \in B'$ oraz, wobec lematu 7, $I^{-1}(x,y,e) \notin S(G_B)$, więc z (8) wynika, że $I^{-1}(y,x,e) \notin B'$, a stąd mamy $y \nless x$. Relacja ta jest więc antysymetryczna.

Niech $x<y$ i $y<z$. Relacja ta jest antysymetryczna, więc $x \neq z$. Z definicji relacji "$<$" wynika, że $I^{-1}(x,y,e) \in B'$ i $I^{-1}(y,z,e) \in B'$. Z warunku (9) oraz faktu, że I jest izomorfizmem wynika, że $I^{-1}(x,z,e) \in B'$, więc $x<z$. Relacja ta jest więc przechodnia.

Z warunku (8) wynika, że relacja ta jest spójna.

Rozważmy podstrukturę $(R \times G,o)$ grupoidu $(A^2 \times G,o)$ określoną następująco:

$$(R \times G,o) \overset{df}{=} (\{(x,y,\alpha) \in A^2 \times G: x \leq y\},o).$$

Niech $a \in B$, $(x,y,\alpha) \in A^2 \times G$ i niech $I(a)=(x,y,\alpha)$. Mamy wówczas

$$a \in B' \Longleftrightarrow I^{-1}(x,y,\alpha) \in B' \Longleftrightarrow I^{-1}(x,y,e) \in B' \Longleftrightarrow (x = y \quad \text{lub} \quad x<y) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (x,y,\alpha) \in R \times G.$$

Z powyższych równoważności wynika, że funkcją ustalającą izomorfizm jest funkcja będąca zawężeniem funkcji I do zbioru B'. Oczywiście obraz izomorfijny podstruktury $(R \times G,o)$, otrzymanej z grupoidu trójkowego Brandta $(A^2 \times G,o)$ przez narzucenie porządku na zbiór A ma własności (7), (8), (9).

Z twierdzeń 2 i 3 wynika następujący

Wniosek 3. Jedynymi homomorfizmami podstruktury (B',o) grupoidu Brandta (B,o) mającej własności (7), (8), (9) w strukturę (M,o) są funkcje postaci

$$h(\mu) = F(I_B(\mu)), \ \mu \in B',$$

gdzie I_B jest dowolną funkcją ustalającą izomorfizm między (B',o) i pewną podstrukturą $(R \times G,o)$ grupoidu trójkowego Brandta $(A^2 \times G,o)$ izomorfijnego z (B,o), zaś F jest homomorfizmem tej podstruktury $(R\times G,o)$ w $(M,\bullet)$, czyli jest postaci (2) z twierdzenia 2.

Twierdzenie 4. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by dwie podstruktury $(R_1 \times G_1,o)$ i $(R_2 \times G_2,o)$ grupoidów trójkowych Brandta $(A_1^2 \times G_1,o)$ i $(A_2^2 \times G_2,o)$ były izomorfijne jest, by uporządkowania zbiorów A_1 i A_2, które je wyznaczają były podobne oraz by grupy $(G_1,\bullet)$ i $(G_2,\bullet)$ były izomorfijne.

Dowód. Niech relacje $<$ i $\propto$ porządkują odpowiednio zbiory A_1 i A_2. Niech f będzie funkcją ustalającą podobieństwo relacji $<$ i $\propto$ oraz niech g będzie funkcją ustalającą izomorfizm grup $(G_1,\bullet)$ i $(G_2,\bullet)$. Funkcją, ustalającą izomorfizm struktur $(R_1 \times G_1,o)$ i $(R_2 \times G_2,o)$ będzie funkcja I określona następująco:

$$I(x,y,\alpha) = \big(f(x),\ f(y),\ g(\alpha)\big),$$

gdzie $(x,y,\alpha) \in R_1 \times G_1$.

I jest oczywiście różnowartościowym przekształceniem $R_1 \times G_1$ na $R_2 \times G_2$, gdyż funkcje f i g są bijekcjami, oraz, jeżeli $x \leqslant y \leqslant z$, to

$$I\big[(x,y,\alpha) \circ (y,z,\beta)\big] = I(x,z,\alpha\bullet\beta) = \big(f(x),\ f(z),\ g(\alpha\bullet\beta)\big) =$$
$$= \big(f(x),\ f(y),\ g(\alpha)\big) \circ \big(f(y),\ f(z),\ g(\beta)\big) = I(x,y,\alpha) \circ I(y,z,\beta),$$

I jest więc szukanym izomorfizmem.

Niech obecnie podstruktury $(R_1 \times G_1,o)$ i $(R_2 \times G_2,o)$ będą izomorfijne, niech funkcja I ustala ich izomorfizm oraz niech a będzie dowolnym, ustalonym elementem zbioru A_1. Wówczas, wobec lematu 7, będzie $I(a,a,\alpha) = (a',a',\alpha')$, gdzie a' jest takim elementem zbioru A_2, że $I(a,a,e) = (a',a',e')$.

Funkcja g określona następująco:

$$\big(g(\alpha) = \alpha'\big) \Longleftrightarrow \big(I(a,a,\alpha) = (a',a',\alpha')\big)$$

ustala, jak łatwo sprawdzić, izomorfizm grup $(G_1,\bullet)$ i $(G_2,\bullet)$.

Określmy następująco funkcję f dla $x \in A_1$:

$$\big(f(x) = x'\big) \Longleftrightarrow \big(I(x,x,e) = (x',x',e')\big).$$

Oczywiście f jest różnowartościowym przekształceniem A_1 na A_2. Łatwo pokazać, że ma miejsce następująca równoważność:

(11) $I(x,y,e) = (x',y',e') \Longleftrightarrow \big[I(x,x,e) = (x',x',e')$ i $I(y,y,e) = (y',y',e')\big]$.

Niech $x < y$. Wówczas $f(x) \neq f(y)$ i $I(x,y,e) = (x',y',e') \in R_2 \times G_2$ oraz na mocy (11) i z definicji funkcji f mamy

$$x' = f(x),\quad y' = f(y),$$

więc $\big(f(x),\ f(y), e'\big) \in R_2 \times G_2$, czyli $f(x) \propto f(y)$.

Funkcja f ustala więc podobieństwo porządków $<$ i $\propto$.

Z twierdzeń 3 i 4 wynika następujący

Wniosek 4. Dwie podstruktury (B_1', o) i (B_2', o) określone przez warunki (7), (8), (9) grupoidów Brandta (B_1, o) i (B_2, o) są izomorfijne wtedy i tylko wtedy, jeżeli porządki (10) dyktowane przez nie na zbiorach A_1 i A_2 trójkowych grupoidów Brandta $(A_1^2 \times G_1, o)$ i $(A_2^2 \times G_2, o)$ izomorfijnych odpowiednio z grupoidami (B_1, o) i (B_2, o) są podobne oraz grupy $(G_1, \bullet)$ i $(G_2, \bullet)$ są izomorfijne.

Z twierdzenia 4 wynika także następujący

Wniosek 5. Podstruktury

$$\left(\left\{(x,y,\alpha) \in A^2 \times G : x \leqslant y\right\}, o\right)$$

i

$$\left(\left\{(x,y,\alpha) \in A^2 \times G : y \leqslant x\right\}, o\right)$$

grupoidu $(A^2 \times G, o)$, gdzie relacja $<$ porządkuje zbiór A, są izomorfijne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja malejąca przeprowadzająca zbiór A na siebie.

Twierdzenie 5. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by grupoidy trójkowe Brandta $(A_1^2 \times G_1, o)$ i $(A_2^2 \times G_2, o)$ były izomorfijne jest, by istniały takie relacje $<$ i $\propto$ porządkujące zbiory A_1 i A_2, że podstruktury $(R_1 \times G_1, o)$ i $(R_2 \times G_2, o)$ przez nie dyktowane są izomorfijne.

Dowód. Niech I będzie funkcją ustalającą izomorfizm grupoidów $(A_1^2 \times G_1, o)$ i $(A_2^2 \times G_2, o)$, niech $<$ będzie dowolną relacją porządkującą zbiór A_1 oraz niech $(R_1 \times G_1, o)$ będzie podstrukturą grupoidu $(A_1^2 \times G_1, o)$ dyktowaną w rozważany już sposób przez tę relację.

Z izomorfizmu grupoidów $(A_1^2 \times G_1, o)$ i $(A_2^2 \times G_2, o)$ wynika równoliczność zbiorów A_1 i A_2. Niech funkcja f ustala tę równoliczność. Na zbiorze A_2 zdefiniujmy relację $\propto$ następująco:

$$x \propto y \overset{df}{=} f^{-1}(x) < f^{-1}(y).$$

Łatwo pokazać, że relacja ta porządkuje zbiór A_2 oraz że funkcja f ustala podobieństwo uporządkowań zbiorów A_1 i A_2.

Niech a będzie dowolnym, ustalonym elementem zbioru A_1 oraz niech $I(a,a,e) = (a',a',e')$. Funkcja g określona następująco:

$$(g(\alpha) = \alpha') \Longrightarrow (I(a,a,\alpha) = (a',a',\alpha'))$$

ustala, jak łatwo zauważyć, izomorfizm grup $(G_1, \bullet)$ i $(G_2, \bullet)$.

Z twierdzeń 3 i 5 wynika następujący

Wniosek 6. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by grupoidy Brandta (B_1, o) i (B_2, o) były izomorfijne jest, by istniały w nich izomorfijne podstruktury (B_1', o) i (B_2', o), mające własności (7), (8), (9).

Podamy obecnie zasygnalizowane we wstępie warunki wystarczające na to, by homomorficzne obrazy grupoidu trójkowego Brandta $(A^2 \times G, o)$ oraz struktury $(R \times G, o)$ były grupami. Twierdzenie, analogiczne do pierwszego z nich w przypadku, gdy $(G,\bullet)$ jest grupą jednoelementową, podane jest w pracy [1] na str.356.

<u>Twierdzenie 6</u>. Niech A i B będą dowolnymi zbiorami, $(G,\bullet)$ dowolną grupą. Jeżeli

1^o. $F \in B^{A^2 \times G}$,

2^o. $\bigwedge_{a\in A}\left(\left\{z : \bigvee_{y\in A}\ \bigvee_{u\in G}(z = F(a,y,u))\right\} = B\right)$,

3^o. $\bigvee_{b\in A}\left(\left\{z : \bigvee_{x\in A}\ \bigvee_{u\in G}(z = F(x,b,u))\right\} = B\right)$,

w zbiorze B określone jest działanie "o" takie, że

4^o. $F(x,y,u) \circ F(y,z,v)$ ma sens dla dowolnych elementów x,y,z ze zbioru A oraz dowolnych elementów u,v ze zbioru G i

$$F(x,y,u) \circ F(y,z,v) = F(x,z,u\bullet v),$$

to struktura (B,o) jest grupą. Dowód przebiega analogicznie jak w pracy [1] na str.356.

<u>Twierdzenie 7</u>. Niech A będzie zbiorem uporządkowanym relacją "$<$", $(G,\bullet)$ dowolną grupą, B dowolnym zbiorem i niech $R = \{(x,y) \in A^2 : x \leq y\}$. Jeżeli

1^o. $F \in B^{R \times G}$,

2^o. $\bigwedge_{a\in A}\left(\left\{z : \bigvee_{y\in A}\ \bigvee_{u\in G}(z = F(a,y,u))\right\} = B\right)$,

3^o. $\bigvee_{b\in A}\left(\left\{z : \bigvee_{x\in A}\ \bigvee_{u\in G}(z = F(x,b,u))\right\} = B\right)$,

w zbiorze B określone jest działanie "o" takie, że

4^o. jeżeli tylko (x,y,u) i (y,z,v) są elementami zbioru $R \times G$, to $F(x,y,u) \circ F(y,z,v)$ ma sens i $F(x,y,u) \circ F(y,z,v) = F(x,z,u\bullet v)$, to (B,o) jest półgrupą z jednością lewostronną. Dowód przebiega analogicznie jak w pracy [1], str,356.

Struktura (B,o) nie musi być grupą. Niech bowiem A będzie zbiorem liczb rzeczywistych dodatnich z relacją mniejszości, (G,o) grupą jednoelementową, zaś B przedziałem $[1, \infty)$. Funkcja $F(x,y) = \frac{y}{x}$ jest homomorfizmem struktury (R,o) w (B,o), gdzie "o" oznacza zwykłe mnożenie w zbiorze liczb rzeczywistych. Ponadto spełnione są warunki 1^o, 2^o, 3^o twierdzenia 10, oczywiście jednak struktura (B,o) nie jest grupą. Zauważmy, że dołożenie do warunków 1^o, 2^o, 3^o, 4^o powyższego twierdzenia warunku

$$\bigwedge_{m\in B}\ \bigvee_{n\in B}\left(n \circ m = F(b,b,e)\right),$$

gdzie b jest pewnym elementem spełniającym warunek 3^o, spowoduje, że

(B,o) będzie grupą, bowiem warunek ten gwarantuje, że do każdego elementu zbioru B będzie istniał w tym zbiorze element lewostronny odwrotny.

Część II

Zajmiemy się obecnie ciągłymi homomorfizmami struktury $(A^2 \times G, o)$ w $(M,\bullet)$ oraz struktury $(R \times G, o)$ w $(M,\bullet)$. W tym celu narzućmy topologie przez zbieżność na rozważane poprzednio struktury, tzn. niech A, G, M będą przestrzeniami L^* Frécheta oraz niech $(H,\bullet)$ będzie grupą topologiczną.
Niech (x_n, y_n, α_n) będzie ciągiem nieskończonym elementów zbioru $A^2 \times G$ i niech $(x_o, y_o, \alpha_o) \in A^2 \times G$.
Na $A^2 \times G$ zadajemy zbieżność następująco:

$$\left[(x_n, y_n, \alpha_n) \longrightarrow (x_o, y_o, \alpha_o)\right] \overset{df}{=} \left[(x_n \longrightarrow x_o) \text{ i } (y_n \longrightarrow y_o) \text{ i } (\alpha_n \longrightarrow \alpha_o)\right].$$

Przestrzeń $A^2 \times G$ z tak zadaną zbieżnością jest także przestrzenią L^*. Topologia zadana na $A^2 \times G$ indukuje w znany sposób topologię na $R \times G$. Wprowadzone powyżej topologie pozwalają wprowadzić /według Heinego/ ciągłość funkcji ze zbiorów $M^{A^2 \times G}$, $M^{R \times G}$, M^A, M^G w punktach /i podzbiorach/ zbiorów $A^2 \times G$, $R \times G$, A, G oraz definiują w znany sposób pojęcie punktu domknięcia podzbioru zbioru A oraz domknięcie takiego podzbioru. Bardzo prosto można udowodnić następujące

<u>Twierdzenie 8</u>. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by homomorfizm $F \not\equiv 0$ struktury $(A^2 \times G, o)$ w $(M,\bullet)$ był ciągły jest, by każda z funkcji f i g była ciągła.

<u>Twierdzenie 9</u>. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by homomorfizm $F \not\equiv 0$ struktury $(R \times G, o)$ w $(M,\bullet)$ był ciągły jest, by

1^o. przy każdym Δ z $\mathcal{U}$ zbiory Δ, $A \setminus \Delta$ oraz zbiór $S(\mathcal{U})$ były domknięte,

2^o. każda z funkcji f_Δ i g_Δ była ciągła.

<u>Dowód</u>. Niech $F \not\equiv 0$ będzie ciągłym homomorfizmem struktury $(R \times G, o)$ w $(M,\bullet)$. Przypuśćmy, że pewien przedział Δ rodziny $\mathcal{U}$ nie jest domknięty, czyli, że w zbiorze A istnieje element $c \notin \Delta$ będący granicą ciągu x_n o wyrazach z Δ. Niech np. zachodzi $c < x_n$. Z lematu 6 wynika, że $F(c, x_n, e) = 0$. Ciąg (x_n, x_n, e) jest zbieżny do (c, c, e) i $F(x_n, x_n, e) = e'$, funkcja F nie byłaby więc ciągła w punkcie (c,c,e), co jest sprzeczne z założeniem. W przypadku, gdy $x_n < c$ rozumowanie jest analogiczne. Każdy przedział Δ rodziny $\mathcal{U}$ jest więc przedziałem domkniętym. Podobnie dowodzi się, że zbiory $A \setminus \Delta$ oraz $S(\mathcal{U})$ są domknięte. Niech obecnie Δ będzie dowolnym przedziałem rodziny $\mathcal{U}$, zaś (a,b) dowolnym, ustalonym elementem zbioru $T(\Delta)$.
Wówczas

$$F(a,b,\alpha) = f_{\triangle}^{-1}(a) \bullet g_{\triangle}(\alpha) \bullet f_{\triangle}(b),$$

a stąd

$$g_{\triangle}(\alpha) = f_{\triangle}(a) \bullet F(a,b,\alpha) \bullet f_{\triangle}^{-1}(b).$$

Z ciągłości funkcji F wynika ciągłość funkcji $g_{\triangle}$.
Niech a będzie dowolnym, ustalonym elementem dowolnego, ustalonego przedziału $\triangle$, α - dowolnym, ustalonym elementem grupy $(G,\bullet)$ oraz niech a_n będzie dowolnym ciągiem o wyrazach z przedziału $\triangle$ zbieżnym do a.
Niech N_1 i N_2 będą zbiorami określonymi następująco:

$$N_1 \overset{df}{=} \{n: a_n < a\}, \qquad N_2 \overset{df}{=} \{n: a < a_n\}.$$

Mamy

$$f(a_n) = g(\alpha) \bullet f(a) \bullet F^{-1}(a_n,a,\alpha) \quad \text{dla} \quad a_n \in N_1$$

oraz

$$f(a_n) = g^{-1}(\alpha) \bullet f(a) \bullet F(a,a_n,\alpha) \quad \text{dla} \quad a_n \in N_2.$$

Stąd, ponieważ struktura $(H,\bullet)$ jest grupą topologiczną oraz funkcja F jest funkcją ciągłą, mamy

$$f(a_n) \longrightarrow f(a).$$

Funkcja f jest więc ciągła w punkcie a przedziału $\triangle$, ponieważ zaś a było dowolnym elementem przedziału $\triangle$, f jest funkcją ciągłą na przedziale $\triangle$.
Pokażemy obecnie, że jeżeli spełnione są warunki 1^o, 2^o twierdzenia 9, to homomorfizm F jest ciągły.
Z warunku 1^o wynika domkniętość zbiorów $T(\triangle) \times G$ i $[R \setminus T(\triangle)] \times G$ przy każdym $\triangle$ z $\mathcal{U}$ oraz domkniętość zbioru $\bigcup_{\triangle \in \mathcal{U}} T(\triangle) \times G$. Wykażemy np. domkniętość zbioru $[R \setminus T(\triangle)] \times G$. Niech $(x_0,y_0,\alpha_0) \in R \times G$ i niech (x_n,y_n,α_n) będzie ciągiem o wyrazach ze zbioru $[R \setminus T(\triangle)] \times G$ zbieżnym do (x_0,y_0,α_0).
Przypuśćmy, że $(x_0,y_0,\alpha_0) \notin [R \setminus T(\triangle)] \times G$ czyli, że $(x_0,y_0,\alpha_0) \in T(\triangle) \times G$. Wówczas x_0 i y_0 byłyby elementami zbioru $\triangle$. Ponieważ wyrazy ciągu (x_n,y_n,α_n) należą do zbioru $[R \setminus T(\triangle)] \times G$, można z któregoś z ciągów x_n lub y_n wybrać ciąg, którego żaden wyraz nie jest elementem zbioru $\triangle$. Niech to będzie np. ciąg x_{k_n} wybrany z ciągu x_n.
Byłoby wówczas

$$x_0 \in \triangle \quad \text{i} \quad \bigwedge_n (x_{k_n} \notin \triangle) \quad \text{i} \quad x_{k_n} \longrightarrow x_0,$$

co, wobec domkniętości zbioru $A \setminus \triangle$, jest niemożliwe, zbiór $[R \setminus T(\triangle)] \times G$ jest więc zbiorem domkniętym.
Podobnie dowodzi się domkniętości zbiorów $T(\triangle) \times G$ i $\bigcup_{\triangle \in \mathcal{U}} T(\triangle) \times G$.
Z powyższych rozważań wynika, że wystarczy wykazać ciągłość funkcji F na każdym ze zbiorów $T(\triangle) \times G$, gdzie $\triangle$ jest dowolnym elementem rodziny $\mathcal{U}$

Na zbiorze $T(\triangle) \times G$ funkcja F ma postać

$$F(x,y,\alpha) = f_{\triangle}^{-1}(x) \bullet g_{\triangle}(\alpha) \bullet f_{\triangle}(y).$$

Z ciągłości funkcji $f_{\triangle}$ i $g_{\triangle}$ oraz faktu, że $(H,\bullet)$ jest grupą topologiczną wynika, że F jest funkcją ciągłą na zbiorze $T(\triangle)\times G$.
Homomorfizm F jest więc ciągły na całym zbiorze $R \times G$.

C z ę ś ć III.

Zajmijmy się obecnie związkami między rozwiązaniami równania

(12) $$F(x,y,\alpha) \bullet F(y,z,\beta) = F(x,z,\alpha\bullet\beta)$$

na zbiorze $A^2 \times G$ i rozwiązaniami tego równania na zbiorze $R \times G$, przy czym rozważania poniższe dotyczą tylko rozwiązań o wartościach ze zbioru M.

Niech $f \in Y^X$ i niech $A \subset X$. Przez $f|A$ oznaczać będziemy zacieśnienie funkcji f do zbioru A.

Definicja 3. Funkcję f_1 będziemy nazywali f – przedłużeniem rozwiązania równania funkcyjnego

(13) $$F(f(x)) = G(f(x))$$

ze zbioru A na zbiór B, jeżeli $A \subset B$, f jest rozwiązaniem równania (13) na zbiorze A, f_1 jest rozwiązaniem równania (13) na zbiorze B i $f_1|A = f$.

Z twierdzeń 1 i 2 wynika natychmiast następujące

Twierdzenie 10. Jeżeli funkcja F jest rozwiązaniem równania (12) na zbiorze $R \times G$, to warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by istniało F – przedłużenie rozwiązania tego równania na zbiór $A^2 \times G$ jest, by $\mathcal{U} = \{\emptyset\}$ lub $\mathcal{U} = \{A\}$.

Z twierdzenia 10 oraz wniosku 3 wynika następujący

Wniosek 7. Jeżeli (B',o) jest podstrukturą grupoidu Brandta (B,o) określoną przez warunki (7), (8), (9) i funkcja F o wartościach z M jest rozwiązaniem równania

(14) $$h(\mu) \bullet h(\nu) = h(\mu \bullet \nu)$$

na zbiorze B', to warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by istniało F – przedłużenie rozwiązania tego równania na zbiór B jest, by $F \equiv 0$ lub $F(\mu) \neq 0$ dla każdego μ z B'.

Twierdzenie 11. Jeżeli F_1 i F_2 są homomorfizmami grupoidu Brandta (B,o) w półgrupę (M,o), (B',o) jest podstrukturą grupoidu Brandta (B,o) określoną przez warunki (7), (8), (9) i $F_1|B' \equiv F_2|B'$, to funkcje F_1 i F_2 są identyczne.

Dowód. Ponieważ funkcje F_1 i F_2 są homomorfizmami grupoidu Brandta (B,o) w półgrupę $(M,\bullet)$ i $F_1|B' \equiv F_2|B'$, więc

a/ $F_1 \equiv F_2 \equiv 0$ lub b/ $F_1 \in H^B$ i $F_2 \in H^B$.

Przypadek a/ jest trywialny. Rozważmy przypadek b/.
Niech $x \notin B'$. Wówczas $x^{-1} \in B'$ i mamy

$$F_1(x) = \left[F_1(x^{-1})\right]^{-1} = \left[F_2(x^{-1})\right]^{-1} = F_2(x),$$

co oznacza, że funkcje F_1 i F_2 są identyczne.

Twierdzenie 12. Warunki

a/ jedynymi rozwiązaniami ciągłymi równania (12) na zbiorze $R \times G$ są rozwiązania ciągłe i przedłużalne na $A^2 \times G$

i

b/ nie istnieje w zbiorze uporządkowanym A przedział domknięto-otwarty Δ, niepusty i różny od zbioru A

są równoważne.

Wykażemy najpierw, że warunek a/ implikuje warunek b/. Przypuśćmy w tym celu, że warunek b/ nie zachodzi, tzn. istnieje w zbiorze uporządkowanym A taki przedział Δ, że $\Delta \neq \emptyset$, $\Delta \neq A$, $\overline{\Delta} = \Delta$ i $\overline{A \setminus \Delta} = A \setminus \Delta$.
Wówczas funkcja

$$F(x,y,\alpha) = \begin{cases} e' \text{ dla } & (x,y,\alpha) \in T(\Delta) \times G, \\ 0 \text{ dla } & (x,y,\alpha) \in [R \times G] \setminus [T(\Delta) \times G] \end{cases}$$

jest oczywiście, wobec twierdzenia 9, rozwiązaniem ciągłym równania (12) na zbiorze $R \times G$, nie jest zaś, wobec twierdzenia 10, rozwiązaniem przedłużalnym, co jest sprzeczne z zapostulowanym warunkiem a/.
Z twierdzenia 9 wynika natychmiast, że warunek b/ implikuje warunek a/.

Twierdzenie 13. Jeżeli funkcja F jest rozwiązaniem ciągłym równania (12) na zbiorze $R \times G$ i F_1 jest F-przedłużeniem rozwiązania rownania (12) ze zbioru $R \times G$ na zbiór $A^2 \times G$, to F_1 jest funkcją ciągłą na $A^2 \times G$.

Dowód. Przypadek, gdy $F \equiv 0$ jest trywialny.
Niech funkcja

$$F(x,y,\alpha) = f^{-1}(x) \bullet g(\alpha) \bullet f(y) \quad \text{dla} \quad x \leqslant y$$

będzie rozwiązaniem ciągłym równania (12) na zbiorze $R \times G$, tzn. dla x,y spełniających warunek $x \leqslant y$.
Funkcja

$$F_1(x,y,\alpha) = f^{-1}(x) \bullet g(\alpha) \bullet f(y) \quad \text{dla dowolnych} \quad x \text{ i } y$$

jest oczywiście rozwiązaniem równania (12) bez warunku $x \leqslant y$, zaś wobec twierdzenia 10 jest jedynym F-przedłużeniem rozwiązania równania (12) ze zbioru $R \times G$ na zbiór $A^2 \times G$. Ciągłość funkcji F_1 wynika natychmiast z ciągłości funkcji f i g.

Zauważmy na zakończenie, że w twierdzeniach dotyczących ciągłości nie postulowaliśmy żadnego związku między topologią a porządkiem w zbiorze A.

Ponadto, gdy przestrzeń A jest spójna, to

1^0. z twierdzenia 9 wynika, że rozważany tam homomorfizm jest ciągły tylko wtedy, gdy $\mathcal{U} = \{\emptyset\}$ lub $\mathcal{U} = \{A\}$,

2^0. warunek b/ w twierdzeniu 12 spełniony jest automatycznie, co oznacza, że zachodzi wtedy także warunek a/.

P r a c e c y t o w a n e

[1] J. A c z é l, Lectures on functional equations and their applications. Edited by Hansjorg Oser, National Bureau of Standards, Washington, D.C. /1966/.

[2] M. F r é c h e t, Solution continue la plus générale d'une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités en chaine, Bull. Soc. Math. France 60 /1932/, str.232-280.

[3] Z. M o s z n e r, Solution générale de l'équation $F(x,y)\cdot F(y,z) = F(x,z)$ pour $x \leqslant y \leqslant z$, Compt. Rend. de l'Acad. des Sciences /Paryż/, t.261 /1965/, str.28.

[4] Z. M o s z n e r, Ogólne rozwiązanie równania $F(x,y)\cdot F(y,z) = F(x,z)$ przy warunku $x \leqslant y \leqslant z$. Rocznik Nauk. Dydakt. WSP w Krakowie, zesz.nr 25, Matematyka /1966/, str.123-138.

[5] A. N i j e n h u i s, Theory of the geometric object /rozprawa doktorska/, Amsterdam 1952.

S u m m a r y

ON SOME HOMOMORPHISMES AND CONTINUOUS HOMOMORPHISMES OF BRANDT'S GROUPOID

In the part I of this note there are given all homomorphismes of Brandt's groupoid $(A^2 \times G, o)$ and its substructure

$$(R \times G, o) \overset{df}{=} \left(\left\{(x,y,\alpha) \in A^2 \times G : x \leqslant y\right\}, o\right)$$

/ "$<$" is a relation ordering A/ in such semigroup $(M,\bullet)$ with zero "0", that $(M \setminus \{0\}, \bullet)$ is a group. Subsequently, these results were transfered on all Brandt's groupoids. In this part there are given also the necessary and sufficient conditions, that:

a/ substructures (B', o) and $(R \times G, o)$ of isomorphic Brandt's groupoids (B, o) and $(A^2 \times G, o)$ are isomorphic /theorem 3/, b/ two substructures $(R_1 \times G_1, o)$ and $(R_2 \times G_2, o)$ of Brandt's groupoids $(A_1^2 \times G_1, o)$ and $(A_2^2 \times G_2, o)$ are isomorphic /theorem 4/,

c/ two Brandt's groupoids may be isomorphic /theorem 5 and corollary 6/ and the sufficient conditions, that the homomorphic images of Brandt's groupoid $(A^2 \times G, o)$ and its substructure $(R \times G, o)$ are groups.

In the part II there is given the necessary and sufficient condition, that homomorphismes of groupoid $(A^2 \times G, o)$ and its substructure $(R \times G, o)$ in the semigroup $(M, \bullet)$ are continuous assuming, that the examinated spaces are topological L^*-Frechet's spaces.

In the part III there are given alliances among families of homomorphismes $(A^2 \times G, o)$ in $(M, \bullet)$ and $(R \times G, o)$ in $(M, \bullet)$.

Резюме

НЕКОТОРЫЕ ГОМОМОРФИЗМЫ И ГОМОМОРФИЗМЫ НЕПРЕРЫВНЫЕ ГРУППОИДА БРАНДТА

В части I поданы все гомоморфизмы группоида Брандта $(A^2 \times G, o)$ и его подструктуры

$$(R \times G, o) \stackrel{df}{=} (\{(x, y, \alpha) \in A^2 \times G : x \leqslant y\}, o)$$

/ "$<$" - порядок в A / в такой полугруппу $(M, \bullet)$, с нулем "0", что $(M \setminus \{0\}, \bullet)$, является группой. Потом, пользовая из соотвествующих изоморфизмов, эти результаты перенесено на любой группоид Брандта.

Поданы здесь тоже необходимые и достаточные условия, чтобы:

а/ подструктура (B', o) группоида Брандта (B, o) была изоморфна с подструктурой $(R \times G, o)$ группоида $(A^2 \times G, o)$ изоморфного с группоидом Брандта (B, o),

б/ две подструктуры $(R_1 \times G_1, o)$ и $(R_2 \times G_2, o)$ группоидов Брандта $(A_1^2 \times G_1, o)$ и $(A_2^2 \times G_2, o)$ являлись изоморфными,

в/ два группоиды Брандта (B_1, o) и (B_2, o) являлись изоморфными,

а также достаточные условия, чтобы гомоморфные образы группоида Брандта являлись группами.

В части II представлено необходимое и достаточное условие, чтобы гомоморфизмы группоида Брандта $(A^2 \times G, o)$ и его подструктуры $(R \times G, o)$ являлись не - прерывными, предполагая, что развешиванные пространства являются тополо - гическими пространствами L^*-Фреше.

В части III поданы связи между семействами гомоморфизмов $(A^2 \times G, o)$ в $(M, \bullet)$ и $(R \times G, o)$ в $(M, \bullet)$.