ROCZNIK NAUKOWO – DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE

Zeszyt 41 Prace matematyczne VI Rok 1970

Anna Krupińska

OGÓLNE ROZWIĄZANIE RÓWNANIA TRANSLACJI NA GRUPOIDZIE BRANDTA

Wstęp

Główną część tej pracy (§ 3) stanowi konstrukcja ogólnego rozwiązania równania translacji na grupoidzie Brandta. Mówiąc dokładniej rozwiązanie to podane jest dla grupoidu Brandta specjalnego typu zwanego w dalszym ciągu grupoidem szczególnym. Ponieważ jednak każdy grupoid Brandta jest z nim izomorfijny, więc ogólność rozważań nie jest zawężona w sposób istotny.

W § 1 i § 2 podane są niektóre własności grupoidu szczególnego związane głównie z rozkładami niezmienniczymi pewnych jego podzbiorów, które to rozkłady wykorzystane są w konstrukcji rozwiązania.

Niezależnie od tej pracy równanie translacji rozwiązał J. Tabor na innej, choć zbliżonej, drodze.

§ 1. Pewne własności szczególnego grupoidu Brandta

Niech A będzie dowolnym zbiorem, G zaś grupą. Elementy zbioru A będziemy oznaczać literami łacińskimi, elementy zbioru G literami greckimi. W grupie G przyjmiemy symbolikę multyplikatywną. W zbiorze $B = A \times G \times A$ określmy działanie "o" następującą umową:

$(a, \alpha, b) \circ (c, \beta, d)$ ma sens wtedy i tylko wtedy, gdy $b = c$ i wówczas

$$(a, \alpha, b) \circ (c, \beta, d) = (a, \alpha \cdot \beta, d).$$

Można wykazać, że $(B, \circ)$ jest grupoidem Brandta oraz, że każdy grupoid Brandta jest izomorfijny z grupoidem tego szczególnego typu [1].

Zanim podamy pewne własności grupoidu $(B, \circ)$ przyjmiemy kilka definicji.

Definicja 1. Dla dowolnie ustalonego $a \in A$ zbiór ${}_aG \overset{df}{=} \{a\} \times G \times A$ będziemy nazywać pasem lewostronnym.

Definicja 2. Dla dowolnie ustalonego $a \in A$ zbiór $G_a \overset{df}{=} A \times G \times \{a\}$ będziemy nazywać pasem prawostronnym.

Definicja 3. Dla dowolnie ustalonych $a, b, \in G$ zbiór ${}_aG_b \overset{df}{=} \{a\} \times G \times \{b\}$ nazywamy kratką.

Definicja 4. Jeżeli $E \subset B$, to wówczas

$$E \circ (a, \alpha, b) \overset{df}{=} \left\{ (c, \beta, d) \in B ; \bigvee_{(f, \gamma, g) \in E} \left[(c, \beta, d) = (f, \gamma, g) \circ (a, \alpha, b) \right] \right\}$$

Można łatwo wykazać, że grupoid $(B, \circ)$ posiada następujące własności.

Własność 1.

a/ Jednością lewostronną dla dowolnego elementu $(a, \alpha, b) \in B$ jest element (a, ε, a), gdzie ε jest jednością w grupie G.

b/ Jednością prawostronną elementu $(a, \alpha, b) \in B$ jest element (b, ε, b).

c/ Elementem odwrotnym dla elementu $(a, \alpha, b) \in B$ jest (b, α^{-1}, a).

Własność 2. Zachodzą równości:

$$B = \bigcup_{a \in A} {}_aG = \bigcup_{a \in A} G_a = \bigcup_{a \in A} \bigcup_{b \in A} {}_aG_b .$$

Własność 3. Pas lewostronny ${}_aG$ jest zbiorem wszystkich elementów zbioru B mających tę samą jedność lewostronną (a, ε, a).

Własność 4. Pas prawostronny G_a jest zbiorem wszystkich elementów zbioru B mających tę samą jedność prawostronną (a, ε, a).

Własność 5. Kratka ${}_aG_b$ jest zbiorem wszystkich elementów mających tę samą jedność lewostronną (a, ε, a) oraz tę samą jedność prawostronną (b, ε, b).

Własność 6. Dla dowolnego $a \in A$ zbiór $({}_aG_a, \circ)$ tworzy grupę izomorfijną z grupą $(G, \cdot)$. Dla dowolnych $a \in A$, $b \in A$, $\alpha \in G$ zachodzi związek:

$${}_aG_a = (a, \alpha, b) \circ {}_bG_b \circ (b, \alpha^{-1}, a).$$

Własność 7. Jeżeli $E \subset B$, $(a, \alpha, b) \in B$, $(c, \beta, d) \in B$, to prawdziwa jest równość:

$$\left[E \circ (a, \alpha, b) \right] \circ (c, \beta, d) = E \circ \left[(a, \alpha, b) \circ (c, \beta, d) \right].$$

§ 2. Rozkłady niezmiennicze pasów lewostronnych

Definicja 1. Rodzinę $\{w_i\}_{i \in J}$ zbiorów w_i niepustych i rozłącznych nazywamy rozkładem zbioru E jeżeli $E = \bigcup_{i \in J} w_i$. Zbiory w_i nazywamy składowymi tego rozkładu.

Definicja 2. Jeżeli $E \subset B$ oraz $\{w_j\}_{j \in J}$ jest rozkładem zbioru B, to rozkład $\{w_j \cap E\}_{j \in J}$ zbioru E nazywamy zacieśnieniem rozkładu $\{w_j\}_{j \in J}$ do zbioru E.

Definicja 3. Niech $G^{\mathbb{X}}$ będzie podgrupą grupy G zaś $\{\overline{w}_i\}_{i\in \mathfrak{I}}$ rozkładem G na warstwy prawostronne względem $G^{\mathbb{X}}$. Niech "a" będzie ustalonym, "b" zmiennym elementem A, "i" zmiennym elementem $\mathfrak{I}$. Rozważmy rodzinę wszystkich zbiorów postaci: $\{a\} \times \overline{w}_i \times \{b\}$ i oznaczmy ją przez $\{w_j\}_{j\in\mathfrak{J}}$. Można wykazać, że rodzina ta jest rozkładem pasa $_aG$ i będziemy ją nazywać rozkładem na warstwy prawostronne względem $G^{\mathbb{X}}$.

Definicja 4. Niech $E \subset B$. Rozkład $\{w_j\}_{j\in\mathfrak{J}}$ zbioru E będziemy nazywać jego rozkładem niezmienniczym jeżeli

$$\bigwedge_{j_1\in\mathfrak{J}} \quad \bigwedge_{(a,\alpha,b)\in B} \quad \bigvee_{j_2\in\mathfrak{J}} \left[w_{j_1} \circ (a,\alpha,b) \subset w_{j_2} \right].$$

Definicja 5. Rozkład $\{W_j\}_{j\in\mathfrak{J}}$ zbioru E nazywamy sumo-rozkładem rozkładu $\{w_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ zbioru E, jeżeli każda składowa W_j jest sumą pewnych składowych rozkładu $\{w_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$

Można dowieść następujących własności rozkładów niezmienniczych.

Własność 1. Na to by rozkład $\{W_j\}_{j\in\mathfrak{J}}$ lewostronnego pasa $_aG$ był jego rozkładem niezmienniczym trzeba i wystarcza, aby był sumo-rozkładem pewnego rozkładu $\{w_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ tego pasa na warstwy prawostronne względem podgrupy $G^{\mathbb{X}} \subset G$, przy czym każda składowa W_j jest sumą warstw w_i, wybranych co najwyżej po jednej z kratek $_aG_b$ dla $b \in A$.

Własność 2. Rozkład lewostronnego pasa $_aG$ na kratki $_aG_b$, dla $b\in A$, czyli rozkład $\{_aG_b\}_{b\in A}$ jest rozkładem niezmienniczym pasa $_aG$.

Własność 3. Moc rodziny składowych zacieśnienia rozkładu $\{w_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ pasa $_aG$ na warstwy prawostronne względem podgrupy $G^{\mathbb{X}} \subset G$ do dowolnej kratki $_aG_b$, dla $b\in A$, równa jest indeksowi podgrupy $G^{\mathbb{X}}$ względem G.

§ 3. Konstrukcja rozwiązania równania translacji

Niech Ω będzie dowolnym zbiorem. Elementy tego zbioru będziemy oznaczać literą ω z ewentualnymi wskaźnikami. Niech $(B,\circ)$ będzie grupoidem określonym w § 1. Rozważmy równanie (zwane w dalszym ciągu równaniem translacji):

$$(3.1.)\qquad F\big(F(\omega,(a,\alpha,c)),(c,\beta,d)\big) = F\big(\omega,\ (a,\alpha,c)\circ(c,\beta,d)\big)$$

Jest to równanie funkcyjne, w którym niewiadoma przebiega zbiór funkcji $F(\omega,\ (a,\alpha,b))$ określonych w zbiorze $\Omega \times B$ o wartościach w Ω. Ten zbiór funkcji nazwiemy zakresem równania.

Z określenia działania "o" wynika, że iloczyn $(a,\alpha,c)\circ(c,\beta,d)$ istnieje dla dowolnych $\alpha, \beta \in G$; $a, c, d \in A$, więc zarówno prawa jak i lewa strona równania są określone dla dowolnej funkcji F z zakresu równania oraz dowolnych $\omega\in\Omega$; $\alpha,\beta\in G$, $a, c, d \in A$

Natomiast równość tych stron zachodzi tylko dla pewnych funkcji F. Jeżeli dla funkcji F z zakresu równania zachodzi równość lewej i prawej strony równania (3.1.) dla dowolnych $\omega \in \Omega$, $\alpha, \beta \in G$; $a, c, d \in A$, to mówimy, że funkcja F jest rozwiązaniem równania.

Podamy konstrukcję funkcji F będącej ogólnym rozwiązaniem tego równania.

1. Każdemu $a \in A$ przypisujemy pewną funkcję $f_a : \Omega \to \Omega$ spełniającą warunek

   (3.2) $\quad f_a(f_a(\omega)) = f_a(\omega)$ dla $\omega \in \Omega$ i taką, by

   (3.3) $\quad \bigwedge_{a,b \in A} \left(\overline{\overline{\Omega^a}} = \overline{\overline{\Omega^b}}\right)$, gdzie $\Omega^a \overset{df}{=} f_a(\Omega)$.

2. Każdy zbiór Ω^a rozkładamy na tę samą ilość S zbiorów rozłącznych i niepustych, czyli tworzymy rozkłady $\{\Omega^a_s\}_{s \in S}$ takie, by

   (3.4) $\quad \bigwedge_{s \in S} \bigwedge_{a,b \in A} \left(\overline{\overline{\Omega^a_s}} = \overline{\overline{\Omega^b_s}} = \text{indeksowi podgrupy } G^{\mathbf{x}}_s \subset G\right)$.

3. Tworzymy zbiory

   (3.5) $\quad \Omega_s = \bigcup_{a \in A} \Omega^a_s$.

4. Dla ustalonego $s \in S$ i $b \in A$ rozważmy pewien pas ${}_bG$ grupoidu B oraz jego rozkład $\{w_i\}_{i \in \mathcal{J}_{sb}}$ na warstwy prawostronne względem podgrupy $G^{\mathbf{x}}_s$.

   Zacieśnienie tego rozkładu do kratki ${}_bG_a$ jest podrodziną rozkładu $\{w_i\}_{i \in \mathcal{J}_{sb}}$ oznaczmy więc to zacieśnienie przez $\{w_i\}_{i \in \mathcal{J}^a_{sb}}$ przy czym $\mathcal{J}^a_{sb} \subset \mathcal{J}_{sb}$.

   Przez h^a_{sb} oznaczmy odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne rodziny $\{w_i\}_{i \in \mathcal{J}^a_{sb}}$ na zbiór Ω^a_s.

   Z własności 3 § 2 wynika, że dla dowolnego $a \in A$ odwzorowanie takie istnieje. Ponieważ dla $a \neq c$ rodziny $\{w_i\}_{i \in \mathcal{J}^a_{sb}}$ oraz $\{w_i\}_{i \in \mathcal{J}^c_{sb}}$ są rozłączne i

   (3.6) $\quad \{w_i\}_{i \in \mathcal{J}_{sb}} = \bigcup_{a \in A} \{w_i\}_{i \in \mathcal{J}^a_{sb}}$,

   więc możemy określić funkcję h_{sb} odwzorowującą rodzinę $\{w_i\}_{i \in \mathcal{J}_{sb}}$ na zbiór Ω_s w następujący sposób:

   (3.7) $\quad h_{sb} = \bigcup_{a \in A} h^a_{sb}$.

5. Niech $\omega \in \Omega_s$. Zbiór $h^{-1}_{sb}(\{\omega\})$ jest pewną rodziną warstw w_i. Ponieważ dla $a \neq c$ zbiory Ω^a_s, Ω^c_s nie musiały być rozłączne, więc rodzina ta nie musi być jednoelementowa, ale składa się z warstw

w_i wybieranych co najwyżej po jednej z dowolnego rozkładu $\{w_i\}_{i\in}$ $a\in A$. Sumę warstw rodziny $h^{-1}_{sb}(\{\omega\})$ oznaczymy dla uproszczenia zapisu $S\,h^{-1}_{sb}(\{\omega\})$.

Zgodnie z własnością 1 § 2 rodzina zbiorów $\{S\,h^{-1}_{sb}(\{\omega\})\}_{\omega\in\Omega_s}$ jest rozkładem niezmienniczym pasa ${}_bG$.

6. Dla dowolnych $\omega\in\Omega$, $(a,\alpha,c)\in B$ przyjmiemy

(3.8) $F(\omega,(a,\alpha,c)) = h_{sb}\left(S\,h^{-1}_{sb}(\{f_a(\omega)\})\circ(a,\alpha,c)\right)$

dla $f_a(\omega)\in\Omega^a_s$. Wykażemy, że wzór (3.8) ma sens i określa wartość $F(\omega,(a,\alpha,c))$ jednoznacznie.

(a) $f_a(\omega)\in\Omega^a$, a więc z 2 wynika, że istnieje dokładnie jedno takie s, dla którego $f_a(\omega)\in\Omega^a_s$.

(b) Z warunku (3.7) oraz punktu 5 wynika, że $S\,h^{-1}_{sb}(\{f_a(\omega)\})$ jest składową rozkładu niezmienniczego pasa ${}_bG$ zawierającą jedyną warstwę w_{i_1} taką, że

(3.9) $w_{i_1}\in\{w_i\}_{i\in\mathcal{I}^a_{sb}}$

oraz

(3.10) $h_{sb}(w_{i_1}) = f_a(\omega)$.

(c) Składowa $S\,h^{-1}_{sb}(\{f_a(\omega)\})$ jest na ogół sumą warstw w_i, lecz jedynie dla elementów $(b,\beta,a)\in w_{i_1}$ działanie $(b,\beta,a)\circ(a,\alpha,c)$ ma sens, a więc

(3.11) $S\,h^{-1}_{sb}(\{f_a(\omega)\})\circ(a,\alpha,c) = w_{i_1}\circ(a,\alpha,c) = w_{i_2}$,

gdzie w_{i_2} $\{w_i\}_{i\in\mathcal{I}^c_{sb}}$.

(d) Wreszcie zgodnie z (3.7)

(3.12) $h_{sb}(w_{i_2}) = h^c_{sb}(w_{i_2}) = \omega_1$, gdzie $\omega_1\in\Omega^c_s$.

Wykażemy, że tak określana funkcja F spełnia równanie (3.1).
Wyznaczmy lewą stronę równania.
W punkcie 6 znaleźliśmy wartość $F(\omega,(a,\alpha,c))$ i

(3.13) $F(\omega,(a,\alpha,c)) = \omega_1\in\Omega^c_s$.

Na mocy (3.2) mamy

(3.14) $f_c(\omega_1) = \omega_1$.

Ze związków (3.11) i (3.12) wynika, że $S\,h^{-1}_{sb}(\{\omega\})$ jest składową rozkładu niezmienniczego pasa ${}_bG$ zawierającą warstwę w_{i_2}. Dalej, z własności rozkładu niezmienniczego pasa ${}_bG$ i warunku (3.11) mamy związek

(3.15) $S h_{sb}^{-1}(\{\omega_1\}) \circ (c, \beta, d) = w_{i_2} \circ (c, \beta, d) = w_{i_3}$,

gdzie $w_{i_3} \in \{w_i\}$ $i \in \mathcal{J}_{sb}^{d}$.

Wreszcie

(3.16) $h_{sb}(w_{i_3}) = \omega_2$ i $\omega_2 \in \Omega_s^d$.

ω_2 jest wartością lewej strony równania (3.1). Natomiast prawą stronę wyznaczymy biorąc zgodnie z (3.8) wartość

$$h_{sb}\left(Sh_{sb}^{-1}\left(\{f_c(\omega)\}\right) \circ \left[(a, \alpha, c) \circ (c, \beta, d)\right]\right).$$

Na podstawie własności 7 § 1 wartość ta jest równa

$$h_{sb}\left(\left[Sh_{sb}^{-1}\left(\{f_a(\omega)\}\right) \circ (a, \alpha, c)\right] \circ (c, \beta, d)\right),$$

na mocy zaś (3.11) równa jest w dalszym ciągu $h_{sb}\left(w_{i_2} \circ (c, \beta, d)\right)$,

czyli zgodnie z (3.15) i (3.16) równa się ω_2.

Wykażemy teraz, że każda funkcja $F(\omega, (a, \alpha, b))$ spełniająca równanie (3.1) jest skonstruowana jak w punktach 1 - 6.

Określmy funkcje f_a, $a \in A$ w następujący sposób

(3.17) $f_a(\omega) = F(\omega, (a, \varepsilon, a))$; $\omega \in \Omega$.

Z równania (3.1) otrzymujemy

(3.18) $F\left(F(\omega, (a, \varepsilon, a)), (a, \varepsilon, a)\right) = F(\omega, (a, \varepsilon, a))$

czyli

(3.19) $f_a\left(f_a(\omega)\right) = f_a(\omega)$.

Zbiór wartości funkcji f_a oznaczamy przez Ω^a.

Ze związku (3.19) wynika, że dla dowolnych elementów $a \in A$, $\omega \in \Omega$ spełniona jest równość

(3.20) $F(\omega, (a, \varepsilon, a)) = \omega$.

Oznaczmy zbiór wartości funkcji $F(\omega, (b, \alpha, a))$ dla $\omega \in \Omega$, $(b, \alpha, a) \in B$, przez Z. Przy ustalonych elementach $\omega \in \Omega$, $a \in A$, $b \in A$ oznaczmy przez:

$Z_a(\omega)$ zbiór wartości funkcji $F(\omega, (c, \alpha, a))$ dla $(c, \alpha, a) \in G_a$,

${}_aZ(\omega)$ zbiór wartości funkcji $F(\omega, (a, \alpha, c))$ dla $(a, \alpha, c) \in {}_aG$,

${}_aZ_b(\omega)$ zbiór wartości funkcji $F(\omega, (a, \alpha, b))$ dla $(a, \alpha, b) \in {}_aG_b$.

<u>Lemat 1</u>. Zachodzą równości

(3.21) $$\Omega^a = \bigcup_{\omega \in \Omega} Z_a(\omega),$$

(3.22) $$Z = \bigcup_{a \in A} \Omega^a.$$

Wykażemy wpierw związek (3.21).

Jeżeli $\omega_1 \in \Omega^a$ to z (3.20) wynika, że $\omega_1 = F(\omega_1, (a, \varepsilon, a))$,

czyli $\omega_1 \in Z_a(\omega_1)$. Na odwrót, jeżeli $\omega_1 \in Z_a(\omega)$ dla pewnego $\omega \in \Omega$, to dla pewnego $(b,\alpha,a) \in B$ zachodzi równość:

$$\omega_1 = F(\omega,(b,\alpha,a)) = F\big(F(\omega,(b,\alpha,a)),(a,\varepsilon,a)\big) = F(\omega_2,(a,\varepsilon,a)) \in \Omega^a,$$

co kończy dowód (3.21).

Dla udowodnienia związku (3.22) wystarczy wykazać, że $Z \subset \bigcup_{a \in A} \Omega^a$, gdyż zawieranie przeciwne jest oczywiste. Jeżeli $\omega \in Z$, to $\omega = F(\omega_1,(a,\alpha,b))$ dla pewnych ω_1, (a,α,b), a więc $\omega \in Z_b(\omega_1)$. Lecz $Z_b(\omega_1) \subset \Omega^b$ zgodnie z (3.21) co kończy dowód.

<u>Lemat 2</u>. Dla dowolnie ustalonych elementów $\omega_1 \in \Omega$, $a \in A$, $b \in A$, $(b,\alpha,c) \in B$ zachodzą związki

(3.23) $${}_bZ_a(\omega_1) = {}_cZ_a(F(\omega_1,(b,\alpha,c))),$$

(3.24) $${}_bZ(\omega_1) = {}_cZ(F(\omega_1,(b,\alpha,c))).$$

<u>Dowód</u> równości (3.23). Jeżeli $\omega \in {}_cZ_a(F(\omega_1,(b,\alpha,c)))$, to $\omega = F(F(\omega_1,(b,\alpha,c)),(c,\beta,a))$ dla pewnego $(c,\beta,a) \in B$. Ale na mocy (3.1):

$$F(F(\omega_1,(b,\alpha,c)),(c,\beta,a)) = F(\omega_1,[(b,\alpha,c)\circ(c,\beta,a)]) = F(\omega_1,(b,\alpha\cdot a)),$$

a więc $\omega \in {}_bZ_a(\omega_1)$.

Na odwrót, jeżeli $\omega \in {}_bZ_a(\omega_1)$, to $\omega = F(\omega_1,(b,\varphi,a))$ dla pewnego $(b,\varphi,a) \in {}_bG_a$. Lecz z równości

$$\omega = F(\omega_1,(b,\varphi,a)) = F\big(F(\omega_1,(b,\alpha,c)),[(c,\alpha^{-1},b)\circ(b,\varphi,a)]\big) =$$
$$= F\big(F(\omega_1,(b,\alpha,c)),(c,\alpha\cdot\varphi^{-1},a)\big)$$

otrzymujemy związek $\omega \in {}_cZ_a(F(\omega_1,(b,\alpha,c)))$, co należało wykazać. Równości (3.24) dowodzi się analogicznie.

<u>Lemat 3</u>. Dla dowolnych elementów $a \in A$, $b \in A$, $c \in A$, $\omega_1 \in \Omega$, $\omega_2 \in \Omega$ zbiory ${}_bZ_a(\omega_1)$, ${}_cZ_a(\omega_2)$ są albo identyczne albo rozłączne.

<u>Dowód</u>. Przypuśćmy, że zbiory te mają element wspólny ω. Oznacza to, że $\omega = F(\omega_1,(b,\alpha,a))$ i $\omega = F(\omega_2,(c,\beta,a))$ dla pewnych (b,α,a), (c,β,a) ze zbioru B. Lecz ze związku (3.23) mamy, że

$${}_bZ_a(\omega_1) = {}_aZ_a(F(\omega_1,(b,\alpha,a))) = {}_aZ_a(\omega) = {}_aZ_a(F(\omega_2,(c,\beta,a))) = {}_cZ_a(\omega_2),$$

co kończy dowód.

<u>Lemat 4</u>. Jeżeli ${}_aZ_c(\omega_1) \cap {}_bZ_c(\omega_2) \neq \emptyset$ przy pewnych $\omega_1 \in \Omega$, $\omega_2 \in \Omega$, $a \in A$, $b \in A$, $c \in A$, to dla dowolnego $d \in A$ zachodzi równość:

(3.25) $${}_aZ_d(\omega_1) = {}_bZ_d(\omega_2).$$

<u>Dowód</u>. Niech $\omega \in {}_aZ_c(\omega_1)$ i $\omega \in {}_bZ_c(\omega_2)$. Oznacza to, że $\omega = F(\omega_1, (a,\alpha,c))$ i $\omega = F(\omega_2,(b,\beta,c))$ dla pewnych elementów (a,α,c), (b,β,c) ze zbioru B. Lecz na podstawie związku (3.23) mamy równość

$$ {}_aZ_d(\omega_1) = {}_cZ_d(F(\omega_1, (a,\alpha,c))) = {}_cZ_d(F(\omega_2,(b,\beta,c))) = {}_bZ_d(\omega_2). $$

<u>Lemat 5</u>. Dla dowolnych elementów $a \in A$, $b \in A$, $\omega \in \Omega$ zachodzą związki

(3.26) $$Z_a(\omega) = \bigcup_{c\in A} {}_cZ_a(\omega)$$

(3.27) $${}_bZ(\omega) = \bigcup_{c\in A} {}_bZ_c(\omega)$$

Równości te wynikają natychmiast z określenia zbiorów $Z_a(\omega)$, ${}_bZ(\omega)$, ${}_cZ_a(\omega)$ oraz z faktu, że $G_a = \bigcup_{c\in A} {}_cG_a$, zaś ${}_bG = \bigcup_{c\in A} {}_bG_c$.

Ze związków (3.21), (3.26) oraz lematu 3 wynika, że przy ustalonym $a \in A$, zaś zmiennych $b \in A$ i $\omega \in \Omega$, zbiory ${}_bZ_a(\omega)$ wyznaczają rozkład zbioru Ω^a. Różne pary (b,ω) mogą dać identyczne zbiory ${}_bZ_a(\omega)$. Przypisując równym zbiorom ${}_bZ_a(\omega)$ ten sam wskaźnik s z pewnego zbioru S_a możemy wspomniany rozkład oznaczyć przez $\{\Omega^a_s\}_{s\in S_a}$.
Dla dowolnie ustalonego $a \in A$ określimy teraz odwzorowanie ${}^a\varphi_a : A\times\Omega \xrightarrow{na} S_a$ w następujący sposób: parze (b,ω) przypisujemy wskaźnik s zbioru ${}_bZ_a(\omega) = \Omega_s$. Jak już wspomnieliśmy parom (b,ω) dającym równe zbiory ${}_bZ_a(\omega)$ będzie poprzez φ_a odpowiadał ten sam element s.
Niech teraz a_1, a_2 będą dowolnymi elementami zbioru A. Rozważmy odwzorowania φ_{a_1}, φ_{a_2}. Z lematu 4 wynika, że dla dowolnych par (b,ω), $(\bar{b},\bar{\omega})$ równość $\varphi_{a_1}(b,\omega) = \varphi_{a_1}(\bar{b},\bar{\omega})$ jest równoważna równości $\varphi_{a_2}(b,\omega) = \varphi_{a_2}(\bar{b},\bar{\omega})$. Krótko mówiąc wszystkie odwzorowania φ_a dla $a \in A$ są stałe na tych samych podzbiorach zbioru $A\times\Omega$. Identyfikując wskaźniki zbiorów S_a, dla $a \in A$, mające ten sam przeciwobraz poprzez odwzorowania φ_a, zastępujemy zbiory S_a zbiorem S wskaźników niezależnym od a. Z identyfikacji tej wynika w szczególności, że przy ustalonym (b,ω) wszystkie zbiory ${}_bZ_a(\omega)$, dla $a \in A$ będą teraz miały ten sam wskaźnik $s \in S$.
Weźmy teraz dla ustalonych b,ω zbiór ${}_bZ(\omega)$. Ze związku (3.27) oraz uczynionej przed chwilą uwagi mamy, że

(3.28) $${}_bZ(\omega) = \bigcup_{a\in A} {}_bZ_a(\omega) = \bigcup_{a\in A} \Omega^a_s$$

Oznaczmy zbiór ${}_bZ(\omega)$ przez Ω_s. Rozważmy dowolnie ustalone $s \in S$ oraz zbiór Ω_s.
Z określenia Ω_s wynika, że istnieją elementy $b \in A$, $\omega_1 \in \Omega$ takie,

że $\Omega_s = {}_bZ(\omega_1)$. Wybierzmy jedną taką parę (b, ω_1). Rozważmy lewostronny pas ${}_bG$ i określmy w nim relację R:

(3.29) $\quad (b,\alpha,a)\, R\, (b,\beta,c) \overset{df}{=\!=} F(\omega_1,(b,\alpha,a)) = F(\omega_1,(b,\beta,c))$.

R jest relacją równoważności w zbiorze ${}_bG$, a więc rozkłada go na klasy równoważności. Rozkład ten oznaczymy przez $\{W_j\}_{j \in J_b}$.

Lemat 6. $\{W_j\}_{j \in J_b}$ jest rozkładem niezmienniczym pasa ${}_bG$.

Dowód. Niech (a,γ,c) będzie dowolnym elementem zbioru B, zaś W_{j_1} dowolną składową rozkładu $\{W_j\}_{j \in J_b}$.
Jeżeli zbiór $W_{j_1} \circ (a,\gamma,c)$ jest pusty lub jednoelementowy, to zawiera się oczywiście w pewnej składowej rozkładu $\{W_j\}_{j \in J_b}$.
Załóżmy teraz, że posiada on co najmniej dwa elementy. Niech $(b,\bar{\alpha},c)$, $(b,\bar{\beta},c)$ należą do zbioru $W_{j_1} \circ (a,\gamma,c)$ i niech $(b,\bar{\alpha},c) \neq (b,\bar{\beta},c)$.
Z określenia zbioru $W_{j_1} \circ (a,\gamma,c)$ wynika, że istnieją elementy (b,α,a), (b,β,a) zbioru W_{j_1} takie, że

$(b,\bar{\alpha},c) = (b,\alpha,a) \circ (a,\gamma,c)$, $(b,\bar{\beta},c) = (b,\beta,a) \circ (a,\gamma,c)$.
Ale ponieważ
$F(\omega_1,(b,\bar{\alpha},c)) = F(\omega_1,(b,\alpha,a) \circ (a,\gamma,c)) = F(F(\omega_1,(b,\alpha,a)),(a,\gamma,c))$
$= F(F(\omega_1,(b,\beta,a)), (a,\gamma,c)) = F(\omega_1,[(b,\beta,a) \circ (a,\gamma,c)]) = F(\omega_1,(b,\bar{\beta},c))$,
więc elementy $(b,\bar{\alpha},c)$, $(b,\bar{\beta},c)$ należą do tej samej składowej W_{j_2} rozkładu $\{W_j\}_{j \in J_b}$. Kończy to dowód niezmienniczości rozkładu $\{W_j\}_{j \in J_b}$.
Z własności 1 § 2 wiadomo, że $\{W_j\}_{j \in J_b}$ jest w pewien sposób tworzonym sumo-rozkładem rozkładu $\{w_i\}_{i \in I_b}$ pasa ${}_bG$ na warstwy prawostronne względem pewnej grupy $G^* \subset G$. Z uwagi tej oraz określenia rozkładu $\{W_j\}_{j \in J_b}$ wynika, że funkcja $F(\omega_1,(b,\alpha,a))$, gdzie $(b,\alpha,a) \in {}_bG$, jest stała na warstwach w_i, oraz na różnych warstwach tej samej kratki ${}_bG_a$ przyjmuje różne wartości.
Określimy teraz funkcję h_{sb}, której dziedziną będzie rodzina zbiorów $\{w_i\}_{i \in I_b}$, zaś zbiorem wartości zbiór Ω_s następująco:

(3.30) $\quad h_{sb}(w_i) = \left]F(\omega_1, w_i)\right[$

gdzie $\left]E\right[$ oznacza jedyny element zbioru E.
Oznaczmy zacieśnienie rozkładu $\{w_i\}_{i \in I_b}$ do zbioru ${}_bG_a$ przez $\{w_i\}_{i \in I_b^a}$, zaś zacieśnienie funkcji h_{sb} do rodziny $\{w_i\}_{i \in I_b^a}$

przez h^a_{sb}. Z określenia funkcji h_{sb}, określenia zbiorów Ω^a_s, związku (3.28) oraz zależności między rozkładami $\{W_j\}_{j \in J_b}$ i $\{w_i\}_{i \in I_b}$ wynika, że h^a_{sb} jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym rodziny $\{w_i\}_{i \in I^a_b}$ na zbiór Ω^a_s oraz zachodzi związek

(3.31) $$h_{sb} = \bigcup_{a \in A} h^a_{sb} .$$

Ponieważ na podstawie własności 3 § 2 moc każdej rodziny $\{w_i\}_{i \in I^a_b}$, dla $a \in A$, równa jest indeksowi podgrupy G^x grupy G, więc dzięki wzajemnej jednoznaczności funkcji h^a_{sb} moc zbiorów Ω^a_s, $a \in A$, też równa jest wspomnianemu indeksowi. Wykażemy teraz, że $F(\omega, (a, \alpha, c)) = h_{sb}(S h^{-1}_{sb}(\{f_a(\omega)\}) \circ (a, \alpha, c))$, tak jak w warunku (3.8). Rzeczywiście, $f_a(\omega) = F(\omega, (a, \varepsilon, a)) \in \Omega^a$.
Ponieważ $\{\Omega^a_s\}_{s \in S}$ jest rozkładem zbioru Ω^a, więc istnieje jedyne $s \in S$ takie, że f_a takie, że $f_a(\omega) \in \Omega^a_s$. Wskaźnikowi s odpowiada, zgodnie z poprzednimi rozważaniami zbiór Ω_s, pewien pas ${}_bG$, jego rozkład niezmienniczy $\{W_j\}_{j \in J_b}$, rozkład $\{w_i\}_{i \in I_b}$, wreszcie funkcja h_{sb}. Z własności funkcji h_{sb} wynika istnienie warstwy $w_{i_1} \in \{w_i\}_{i \in I^a_b}$ takiej, że

(3.32) $$h_{sb}(w_{i_1}) = f_a(\omega) .$$

Ponieważ zbiór $Sh^{-1}_{sb}(\{f_a(\omega)\})$ jest sumą warstw w_i, a wśród nich tylko warstwa w_{i_1} zawiera się w kratce ${}_bG_a$, więc

(3.33) $$Sh^{-1}_{sb}(\{f_a(\omega)\}) \circ (a, \alpha, c) = w_{i_1} \circ (a, \alpha, c) = w_{i_2} \subset {}_bG_c .$$

Mamy więc z uwagi na (3,30) i (3.32) równości:

$$h_{sb}(w_{i_2}) = F(\omega_1, (b, \beta, c)) = F(F(\omega_1, (b, \gamma, a)), (a, \alpha, c)) =$$
$$= F(h_{sb}(w_{i_1}), (a, \alpha, c)) = F(F(\omega, (a, \varepsilon, a)), (a, \alpha, c)) = F(\omega, (a, \alpha, c)),$$

co wobec (3.33) kończy dowód.

Uwaga. W przypadku gdy grupoid szczególny B jest grupą, musi on być postaci następującej: $B = A \times G \times A$ gdzie G jest grupą izomorficzną z B zaś A jest zbiorem jednoelementowym czyli $A = \{a\}$. B pokrywa się wówczas ze swym jedynym pasem lewostronnym ${}_aG$, jedynym pasem prawostronnym G_a oraz jedną kratką ${}_aG_a$.
Dzięki temu ilość parametrów występujących w punktach 1-6 konstrukcji rozwiązania zmniejsza się, a więc konstrukcja ta ulega uproszczeniu i będzie następująca:
1. Jedynemu elementowi $a \in A$ przypisujemy dowolną funkcję $f : \Omega \to \Omega$ spełniającą warunek $f(f(\omega)) = f(\omega)$ dla $\omega \in \Omega$.

2. Tworzymy dowolny rozkład zbioru $f(\Omega)$, oznaczony przez $\{\Omega_s\}_{s\in S}$ i taki, by

$\bigwedge_{s\in S}(\overline{\Omega}_s$ = indeksowi pewnej podgrupy $G_s^{*} \subset G)$.

3. Dla ustalonego $s\in S$, rozważamy rozkład $\{w_i\}_{i\in I_s}$ grupy B na warstwy prawostronne względem podgrupy G_s^{*} (w sensie df. 3 § 2). Przez h_s oznaczmy odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne rodziny $\{w_i\}_{i\in I_s}$ na zbiór Ω_s. Oczywiście, dla dowolnego ω $h_s^{-1}(\{\omega\})$ jest teraz jedną warstwą w_i, a więc

$S\, h_s^{-1}(\{\omega\}) = h_s^{-1}(\omega) = w_i$.

4. Funkcja F będzie więc określona wzorem:

$$F(\omega,(a,\alpha,a)) = h_s(h_s^{-1}(f(\omega))\circ(a,\alpha,a)) \tag{3.34}$$

gdzie $\omega\in\Omega, (a,\alpha,a)\in B$.

Jest to w zasadzie ta sama konstrukcja ogólnego rozwiązania równania translacji na grupie, którą podał Z. Moszner w pracy [2].

Dziękuję serdecznie Panu Prof. dr Zenonowi Mosznerowi za wiele cennych uwag, z których korzystałam w przygotowaniu niniejszej pracy.

Prace cytowane

[1] A. Nijenhuis; "Theory of the geometric object", Amsterdam 1952.

[2] Z. Moszner; "Solution générale de l'équation de translation et ses applications", Aequationes Mathematicae, vol.1, fasc.3, 1968, p. 291–293.

Résumé

LA SOLUTION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION DE TRANSLATION SUR LE GRUPOID DE BRANDT

Mettons que $B = A\times G\times A$, où G est un groupe par rapport à $\langle\cdot\rangle$ et A un ensemble quelconque. Dans l'ensemle B definissons l'operation $\langle o\rangle$ comme suit:

pour qu'il existe $(a,\alpha,b)\circ(c,\beta,d)$ il faut et il suffit que $b = c$

et alors $(a,\alpha, b) \circ (c,\beta, d) = (a,\alpha\cdot\beta, d)$. On peut démontrer que l'ensemble $(B,\circ)$ est un grupoïd de Brandt et que chacun grupoïd de Brandt est isomorphe au grupoïd $(B,\circ)$. On donne dans ce travail la solution générale de l'équation de translation (3.1), où $F \in \Omega^{\Omega \times B}$. La solution F a la forme suivante:

1. f_a est une fonction qui remplit des conditions:

   a) $f_a : \Omega \to \Omega$,

   b) $f_a(f_a(\omega)) = f_a(\omega)$,

   c) $\bigwedge_{a,b\in\Omega}\left(\overline{\overline{\Omega^a}} = \overline{\overline{\Omega^b}}\right)$, où $\Omega^a = f_a(\Omega)$.

2. Le symbol $\{\Omega^a_s\}_{s\in S}$ signe des décompositions des ensembles Ω^a pour $a \in A$, qui satisfaient au condition:

   $\bigwedge_{s\in S}\ \bigwedge_{a,b\in A}\left(\overline{\overline{\Omega^a_s}} = \overline{\overline{\Omega^b_s}}\right.$ = à l'indice d'un sous-groupe G^*_s du groupe $\left.G\right)$.

3. $\Omega_s = \bigcup_{a\in A} \Omega^a_s$.

4. $\{w_i\}_{i\in I_{sb}}$ est une décomposition de ${}_bG$ en classes d'équivalence à droite, par rapport à un sous-groupe G^*_s, du groupe G.

5. $\{w_i\}_{i\in I^a_{sb}} = \{w_i \cap {}_bG_a\}_{i\in I_{sb}}$.

6. h^a_{sb} est une fonction, reversible de l'ensemble $\{w_i\}_{i\in I^a_{sb}}$ sur Ω^a_s.

7. $h_{sb} \overset{df}{=} \bigcup_{a\in A} h^a_{sb}$.

8. Pour $\omega\in\Omega_s$ l'ensemble $h^{-1}_{sb}(\{\omega\})$ est l'ensemble des classes w_i. Nous désignons la somme des cettes classes par $Sh^{-1}_{sb}(\{\omega\})$.

9. Enfin nous définissons la fonction F comme suit:

   $F(\omega,(a,\alpha, c)) = h_{sb}\left(S\, h^{-1}_{sb}(\{f_a(\omega)\}) \circ (a,\alpha, c)\right)$.

Р е з ю м е

ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЕ ТРАНСЛЯЦИИ НА ГРУППОИДУ БРАНДТА

Допустим, что $B=A\times G\times A$, где G является группой с операцией $\langle\cdot\rangle$ и A какое-то множество. В обществе B мы определяем действие $\langle o\rangle$ следующим образом: $(a,\alpha,b)\circ(c,\beta,d)$
существует в таком лишь случае когда $b=c$ и тогда

$(a,\alpha,b)\circ(c,\beta,d)=(a,\alpha\cdot\beta,d)$.

Можно доказать, что множество $(B,\circ)$ это группоид Брандта и что каждый группоид Брандта есть изоморфичен с группоидом $(B,\circ)$.
В этой работе подается общее решения уравнения трансляции (3.I) где

$$F\in\Omega^{\Omega\times B}.$$

Конструкция решения F следующая:

I. Допустим, что f_a обозначает функцию исполняющую условия:

а/ $f_a:\Omega\to\Omega$,

б/ $f_a(f_a(\omega))=f_a(\omega)$,

в/ $\bigwedge_{a,b\in\Omega}(\overline{\overline{\Omega^a}}=\overline{\overline{\Omega^b}})$, где $\Omega^a=f_a(\Omega)$.

2. Допустим, что $\{\Omega_s^a\}_{s\in S}$ обозначает распады множеств Ω^a для $a\in A$ которые исполняют условие:

$\bigwedge_{s\in S}\bigwedge_{a,b\in A}(\overline{\overline{\Omega_s^a}}=\overline{\overline{\Omega_s^b}}=$ показателю подгруппы G^* по отношению к группе G).

3. $\Omega_s=\bigcup_{a\in A}\Omega_s^a$.

4. $\{w_i\}_{i\in I_{sb}}$ является распадом ${}_bG$ на правосторонные классы эквивалента по отношению к подгруппе G_s^* группы G.

5. $\{w_i\}_{i\in I_{sb}^a}=\{w_i\cap{}_bG_a\}_{i\in I_{sb}}$.

6. Через h_{sb}^{a} мы обозначаем функцию на Ω_s^a определённую и оборотную в множестве $\{w_i\}_{i\in I_{sb}^a}$.

7. $h_{sb} \overset{df}{=} \bigcup_{a\in A} h_{sb}^{a}$.

8. Для $\omega \in \Omega_s$ множество $h_{sb}^{-1}(\{\omega\})$ является множеством классов w_i.

Символом $Sh_{sb}^{-1}(\{\omega\})$ обозначаем сумму этих классов.

9. Теперь определяем функцию F :

$$F(\omega,(a,\alpha,c)) = h_{sb}(Sh_{sb}^{-1}(\{f_a(\omega)\})\circ(a,\alpha,c)).$$