ROCZNIK NAUKOWO - DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE

Zeszyt 41 Prace matematyczne VI Rok 1970

Bogusław Kwiatek

O PEWNYM OSZACOWANIU ODCHYLENIA STANDARDOWEGO ZMIENNEJ LOSOWEJ TYPU CIĄGŁEGO

Wstęp

Niech X oznacza zmienną losową jednowymiarową o gęstosci f. Zakładamy, że zmienna ta posiada skończone momenty rzędu pierwszego i drugiego. Odchylenie standardowe zmiennej X oznaczamy przez σ. Niech następnie zmienna losowa X^- jest określona przez funkcję gęstości f^- /jest to funkcja zsymetryzowana nierosnąco względem funkcji f/. Odchylenie standardowe zmiennej X^- oznaczamy przez σ^-. W pracy /zob.[4], str.267/ autor udowodnił, że

$$\sigma \geqslant \sigma^- . \tag{1}$$

Celem niniejszej pracy jest uogólnienie powyższej nierówności na przypadek zmiennej losowej n - wymiarowej. Okazuje się, że rozważenie problemu w przestrzeni n - wymiarowej dostarcza schemat postępowania, który zastosowany w przestrzeni jednowymiarowej daje znaczne uproszczenia w dowodzie.

Praca składa się z dwoch części. W części pierwszej podamy okreslenie B. Schwarza /zob.[3], str.1653/ funkcji zsymetryzowanej nierosnąco względem funkcji ograniczonej i mierzalnej określonej w zbiorze ograniczonym, oraz uogólnimy tę definicję na przypadek dowolnej funkcji całkowalnej określonej w całej przestrzeni R^n.

§ 1. Zaczniemy od podania definicji funkcji zsymetryzowanej nierosnąco względem funkcji f /zob.[3], str.1653/.

Niech D oznacza jednospójny ograniczony obszar w przestrzeni R^n oraz f jest funkcją określoną, ograniczoną i mierzalną w zbiorze D. Niech D^x oznacza koło otwarte o mierze równej mierze obszaru D: środek tego koła pokrywa się z początkiem układu współrzędnych. R jest promieniem koła D^x, zaś $r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ odległością punktu X /$x_1, \ldots, x_n$/ od początku układu współrzędnych.

Funkcję zsymetryzowaną nierosnąco względem funkcji f oznaczamy przez f^-. Jest ona określona w D^x przez następujące trzy warunki:

1. Funkcja jest kołowo symetryczna, tzn.
   f^- /X/ = f/r/ dla $0 \leqslant r \leqslant R$, f^- jest funkcją nierosnącą zmiennej r.
2. Funkcja f^- jest równopolowa względem funkcji f, tzn. jeśli przez A /z/ oznaczymy miarę zbioru zawartego w D, dla którego punktów zachodzi nierówność f /X/ $>$ z i analogicznie przez A^-/z/ - miarę zbioru punktów, dla których f^-/X/ $>$ z to wówczas ma być spełniony warunek: A /z/ = A^-/z/ dla każdego z.
3. $f^-/0/ = \sup\limits_{X \in D} f/X/$ /0 - początek układu współrzędnych/,

   $f^-/R/ = \inf\limits_{X \in D} f/X/.$

Wprowadzimy jeszcze następujące uogólnienie definicji funkcji zsymetryzowanej nierosnąco:

Niech f oznacza funkcję nieujemną i całkowalną na obszarze D /ograniczonym lub nie/. Wówczas przyjmujemy, że

$$f^- = \lim_{n \to \infty} f_n^-,$$

gdzie f_k^- /$k = 1, \ldots, n$/ oznacza funkcję zsymetryzowaną nierosnąco względem funkcji

$$f_k\ /X/ = \begin{cases} k & \text{jeżeli } f/X/ > k, \\ f/X/ & \text{jeżeli } \frac{1}{k} \leqslant f/X/ \leqslant k, \\ 0 & \text{jeżeli } f/X/ < \frac{1}{k}, \end{cases}$$

przy czym f_k^- otrzymujemy następująco:
symetryzujemy funkcję f_k w zbiorze

$$Z = \left\{ X\colon \frac{1}{k} \leqslant f/X/ \leqslant k \right\};$$

otrzymaną funkcję dookreślamy na całą przestrzeń R^n przyjmując poza kołem Z^x wartość 0.

Dla uproszczenia zapisu przyjmujemy dodatkową umowę: Odchyleniem standardowym σ zmiennej losowej n - wymiarowej X /$x_1, \ldots, x_n$/, nazywamy pierwiastek kwadratowy z sumy kwadratów odchyleń standardowych $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ brzegowych zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2}.$$

§ 2. Udowodnimy teraz następujące

Twierdzenie. Niech X oznacza zmienną losową n - wymiarową, o gęstości f, skończonych momentach rzędu pierwszego i drugiego i odchyleniu standardowym σ.
Oznaczając przez X^- zmienną losową o gęstości f^-, a jej odchylenie standardowe przez σ^- mamy

$$/2/ \qquad \sigma \geqslant \sigma^- .$$

Dowód. Dla większej przejrzystości podamy dowód w przypadku dwu-wymiarowym.

Nie zmieniając ogólności rozważań możemy przyjąć, że pierwsze momenty zmiennej losowej X są równe zero /gdyż odchylenie standardowe jest niezmiennikiem przesunięcia/. Zatem nierówność /2/ jest równoważna następującej nierówności

$$/3/ \qquad \iint\limits_{D} /x_1^2 + x_2^2/ \, f \, dx_1 \, dx_2 \geqslant \iint\limits_{D^x} /x_1^2 + x_2^2/ \, f^- \, dx_1 \, dx_2 .$$

Stąd wynika, że możemy zrezygnować z założenia, iż $\iint\limits_{D} f \, dx_1 \, dx_2 = 1$.
Rozpatrzymy najpierw przypadek, gdy funkcja f jest określona w zbiorze płaskim D. Dowód w tym przypadku podamy w trzech etapach:

1^0 funkcja f jest funkcją charakterystyczną pewnego podzbioru obszaru D,

2^0 funkcja f jest funkcją prostą obszaru D,

3^0 funkcja f jest dowolną funkcją całkowalną.

Ad.1^0. Obierzmy dowolny podzbiór mierzalny A obszaru D i niech $f = \chi_{A,D}$. Wówczas funkcja f^- jest funkcją charakterystyczną koła A^x.
Wtedy mamy /zob. [2], str.153/

$$\iint\limits_{D} /x_1^2 + x_2^2/ \, f \, dx_1 \, dx_2 = \iint\limits_{A} /x_1^2 + x_2^2/ \, dx_1 \, dx_2 \geqslant$$

$$\geqslant \iint\limits_{A^x} /x_1^2 + x_2^2/ \, dx_1 \, dx_2 = \iint\limits_{D^x} /x_1^2 + x_2^2/ \, f^- \, dx_1 \, dx_2 .$$

Ad.2^0. Oznaczmy wartości funkcji f przez $a_1, \dots, a_n$ $/0 \leqslant a_1 < \dots < a_n/$, oraz niech $f^{-1}/\{a_i\}/ = A_i$, $i = 1, \dots, n$. Zbiory A_i są rozłączne i ich sumą jest zbiór D. Przyjmujemy następnie, że $\alpha_0 = 0$, $\alpha_i = a_i - a_{i-1}$ dla $i = 1, \dots, n$. Wtedy mamy /zob. [1]/

$$/4/ \qquad f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{\bigcup\limits_{k \geq i} A_k, D}$$

oraz

/5/ $$f^- = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{/\bigcup_{k=i}^{n} A_k/^x, D^x} .$$

Ponieważ /na podstawie przypadku 1^0/

$$\iint_D /x_1^2 + x_2^2/ \chi_{\bigcup_{k=i}^{n} A_k, D} dx_1\, dx_2 \geqslant$$

$$\geqslant \iint_{D^x} /x_1^2 + x_2^2/ \chi_{/\bigcup_{k=i}^{n} A_k/^x, D^x} dx_1\, dx_2 ,$$

więc też

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \iint_D /x_1^2 + x_2^2/ \chi_{\bigcup_{k=i}^{n} A_k, D} dx_1\, dx_2 \geqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \iint_{D^x} /x_1^2 + x_2^2/ \chi_{/\bigcup_{k=i}^{n} A_k/^x, D^x} dx_1\, dx_2 .$$

Uwzględniając /4/ i /5/ dostajemy

$$\iint_D /x_1^2 + x_2^2/\, f\, dx_1\, dx_2 \geqslant \iint_{D^x} /x_1^2 + x_2^2/\, f^-\, dx_1\, dx_2 .$$

Ad.3^0 Obierzmy dowolny ciąg niemalejący funkcji prostych $/f_n/$, nieujemnych i zbieżnych do funkcji f. Wówczas mamy

$$\iint_D /x_1^2 + x_2^2/\, f\, dx_1\, dx_2 = \lim_{n\to\infty} \iint_D /x_1^2 + x_2^2/\, f_n\, dx_1\, dx_2 \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{n\to\infty} \iint_{D^x} /x_1^2 + x_2^2/\, f_n^-\, dx_1\, dx_2 = \iint_{D^x} /x_1^2 + x_2^2/\, f^-\, dx_1\, dx_2 ,$$

a to należało dowieść.

Prawdziwość tezy w przypadku ogólnym wynika z definicji funkcji zsymetryzowanej nierosnąco.

P r a c e c y t o w a n e

[1] G. H a r d y, J. L i t t l e w o o d, G. P o l y a, Inequalities, Cambridge, 1934.

[2] G. P o l y a, G. S z e g o, Isoperimetric inequalities in mathematical physics, Princeton, 1951.

[3] B. S c h w a r z, Bounds for the principal frequency of the nonhomogeneous membrane and for the generalized Dirichlet integral. Pacific Journal of Mathematics 7 /1957/, nr 4, str.1653.

[4] S. W o ł o d ź k o, Oszacowanie odchylenia standardowego zmiennej losowej typu ciągłego. Rocznik Naukowo-Dydaktyczny WSP w Krakowie, z.25 /1966/, str.265-284.

S u m m a r y

On some estimatione of standard deviation of a continuous random variable

The author proved in this study the following:

Theorem. When X is n-dimensional random variable of density f and standard deviation σ ,X^- is random variable of density f^- /not increasingly symmetricalled function in the sense of B. Schwarz [3] /and standard deviation σ^-, then $\sigma \geqslant \sigma^-$.

Standard deviation of n-dimensional random variable $X/X_1, X_2, \ldots, X_n/$ must be understood as the square root of the sum of standard deviation squares $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ of the border random variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

The proof of this theorem for single-dimensional random variable was provided by S. Wołodźko [4]. It turned out however that solution of the problem in n-dimensional space suggested a method which applicated to single-dimensional case provides an important simplification in the proof.

Р е з ю м е

О НЕКОТОРОЙ ОЦЕНКЕ ДИСПЕРСИИ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

В этой статье автор доказал следующую теорему:

Теорема: Если X является n - мерной случайной величиной с плотностью f и дисперсией σ, X^- - случайной величиной с плотностью f^- /с симметризацией неубывающей по Шварцу [3] / и дисперсией σ^-, то $\sigma \geqslant \sigma^-$.

Как дисперсию случайной величины n - мерной X /$X_1, \ldots, X_n$/ надо подразумевать квадратный корень из суммы квадратов дисперсий $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ маргинальных величин $X_1, \ldots, X_n$.

Вышеизложенную теорему для одномерной случайной величины доказал С. Веледзке [4]. Однако оказалось, что рассмотрение этой проблемы в n-мерном пространстве подсказало метод, который, примененный в случае одномерных, дает значительные упрощения в доводе.