ROCZNIK NAUKOWO - DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE

Zeszyt 41 Prace matematyczne VI Rok 1970

Irena Lawera

WŁASNOŚĆ ARCHIMEDESA I JEJ ZASTOSOWANIE W GEOMETRII RÓŻNICZKOWEJ

W s t ę p

W pracy [1] spotykamy udowodnioną przez Archimedesa własność dotyczącą okręgu, która brzmi następująco:
- stosunek długości łuku P_0P_1 do długości cięciwy P_0P_1 dąży do 1, gdy $P_1 \to P_0$ po okręgu /P_0 jest punktem ustalonym/. Własność ta pod nazwą własności Archimedesa, została później rozszerzona na inne krzywe prostowalne, a następnie zastosowana przy rozwiązywaniu różnych problemów w geometrii różniczkowej. W związku z zastosowaniami rozważono również pewne jej modyfikacje.

Niniejsza praca ma na celu dalszą rozbudowę uogólnień własności Archimedesa, zbadanie stosunku tej własności do innych założeń regularnościowych czynionych w geometrii różniczkowej oraz podanie pewnych jej zastosowań. Problem wywodzi się z ogólnej tendencji obniżania założeń regularnościowych w twierdzeniach, a zwłaszcza w twierdzeniach geometrii różniczkowej /[4], t.I/.

I tak, w rozdziale I zostały ustalone pojęcia występujące w pracy. Rozdział II zawiera różne definicje własności Archimedesa i rozważania nad ich wzajemnym stosunkiem. Modyfikacja własności Archimedesa, jaką jest własność oznaczona w tej pracy przez /A^2/, idzie w kierunku poszerzenia jej na coraz to większy zbiór krzywych, aż do krzywych nieprostowalnych włącznie. Oczywiście, najbardziej kuszącym wydaje się znalezienie takiej własności, którą posiadałyby także pewne krzywe nieprostowalne, a która w obrębie krzywych prostowalnych byłaby równoważna własności Archimedesa /A^2/. Próby takich poszukiwań doprowadziły jedynie do sformułowania pojęcia własności Archimedesa /A^5/, która jednak nie ma wyżej wspomnianej własności.

W rozdziale III omówiony jest stosunek własności Archimedesa $/A^2/$ do innych założeń regularnościowych czynionych w geometrii różniczkowej. Okazuje się, że założenie klasy C^1 o krzywej w rozważanym punkcie P_0, pociąga tę własność w punkcie P_0, a nawet "silniejszą" własność $/A^1/$. Natomiast niezachodzenie tego założenia, nie wyklucza zachodzenia własności $/A^2/$.

Rozdział IV zawiera przykłady zastosowań różnych sformułowań własności Archimedesa do różnych zagadnień geometrycznych.

I. Wiadomości wstępne

Dla ustalenia terminologii podam znane fakty ze wstępu do teorii krzywych.

Niech E będzie trójwymiarową przestrzenią euklidesową ze zwykłą metryką.

/1.1/ Definicja. Łukiem zwykłym w E nazywamy zbiór punktów w przestrzeni będący obrazem wzajemnie jednoznacznym i ciągłym domkniętego przedziału $\langle a, b \rangle$.

/1.2/ Definicja. Odwzorowanie przedziału otwartego (a, b) w przestrzeni E nazywamy lokalnie wzajemnie jednoznacznym, jeżeli dla każdego punktu $t_0 \in (a,b)$ istnieje takie $\delta > 0$, że odwzorowanie to jest ciągłe i różnowartościowe w przedziale $\langle t_0 - \delta, t_0 + \delta \rangle$.
Obraz odcinka $\langle t_0 - \delta, t_0 + \delta \rangle$ jest więc wtedy łukiem zwykłym.

/1.3/ Definicja. Krzywą nazywamy zbiór punktów w przestrzeni będący ciągłym obrazem domkniętego przedziału przez odwzorowanie lokalnie wzajemnie jednoznaczne.

Krzywa jest więc, przy wybranym początku układu, hodografem funkcji wektorowej $\bar{r}/t/$ ciągłej i lokalnie wzajemnie jednoznacznej.

/1.4/ Definicja. Dwa przedstawienia parametryczne

$$\bar{r} = \bar{r}_1/t/ \quad \text{dla} \quad t \in \langle a,b \rangle ,$$

$$\bar{r} = \bar{r}_2/\tau/ \quad \text{dla} \quad \tau \in \langle \alpha,\beta \rangle$$

nazywamy równoważnymi, jeżeli istnieje silnie monotoniczne odwzorowanie $\tau = \tau/t/$ przedziału $\langle a,b \rangle$ na przedział $\langle \alpha,\beta \rangle$, przy którym

$$\bar{r}_1 /t/ = \bar{r}_2[\tau/t/] \quad \text{dla} \quad t \in \langle a,b \rangle .$$

Dwa równoważne przedstawienia parametryczne dają geometrycznie tę samą krzywą.

/1.5/ Definicja. Krzywą parametryczną nazywamy klasę przedstawień równoważnych danej krzywej.

Ponieważ w dalszym ciągu posługiwać się będziemy krzywymi parametrycznymi a nie krzywymi potraktowanymi jako zbiory punktów, będziemy mówili krzywa zamiast krzywa parametryczna.

/1.6/ Definicja. Krzywą parametryczną nazywamy łukiem regularnym klasy C^n, jeżeli wśród jej przedstawień parametrycznych istnieje takie przedstanienie $\bar{r} = \bar{r}\,/t/$ dla $t \in \langle a,b\rangle$ klasy C^n, dla którego $\frac{d\bar{r}}{dt} \neq 0$ w tym przedziale. Łuk regularny klasy C^1 nazywamy krótko łukiem regularnym.

/1.7/ Definicja. Punkt P_0 o parametrze t_0 nazywamy punktem regularnym krzywej, jeżeli wśród jej przedstawień parametrycznych istnieje takie przedstawienie $\bar{r} = \bar{r}\,/t/$ dla $t \in \langle a,b\rangle$, klasy C^1, dla którego $\frac{d\bar{r}}{dt} \neq 0$ w punkcie P_0.

/1.8/ Definicja. Krzywa o równaniu $\bar{r} = \bar{r}\,/t/$ dla $t \in \langle a,b\rangle$ ma w punkcie P_0 o parametrze t_0 styczną l, gdy l jest granicą siecznych przechodzących przez punkty P, P_0 o parametrach t, t_0, gdy $t \longrightarrow t_0$.

/1.9/ Definicja. Krzywa o równaniu $\bar{r} = \bar{r}\,/t/$ dla $t \in \langle a,b\rangle$ ma w punkcie P_0 o parametrze t_0 wektor styczny $\bar{e}\,/t_0/$, gdy

$$\bar{e}\,/t_0/ = \lim_{t \to t_0} \frac{\bar{r}\,/t/ - \bar{r}\,/t_0/}{\operatorname{sgn}\,/t-t_0/\,|\,\bar{r}\,/t/ - \bar{r}\,/t_0/\,|}.$$

Jest widoczne, że w myśl definicji /1.8/ w tzw. "punktach zwrotu" krzywa posiada styczną choć, jak wiadomo z geometrii różniczkowej, nie ma w nim wektora stycznego.

/1.10/ Twierdzenie. Jeżeli krzywa C o równaniu $\bar{r} = \bar{r}\,/t/$ dla $t \in \langle a,b\rangle$ jest prostowalna, to

$$L(C) \geqslant \int_a^b \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right| dt.$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy współrzędne wektora $\bar{r}\,/t/$ są funkcjami bezwzględnie ciągłymi / [5], t.II, str.412/.

/1.11/ Twierdzenie. Jeżeli krzywa C prostowalna jest przedstawiona równaniem $\bar{r} = \bar{r}\,/s/$ dla $s \in \langle 0, L(C)\rangle$, gdzie s jest parametrem naturalnym krzywej C, to wzór:

$$\lim_{s_1, s_2 \longrightarrow s} \frac{|\,\bar{r}\,/s_2/ - \bar{r}\,/s_1/\,|}{s_2 - s_1} = 1 \quad \text{dla} \quad s_1 < s < s_2$$

jest spełniony dla prawie wszystkich $s \in \langle 0, L(C)\rangle$ / [7], str. 106/.

/1.12/ <u>Definicja</u>. Krzywą C o równaniu $\bar{r} = \bar{r}$ /t/ dla $t \in \langle a,b\rangle$ nazywamy nieprostowalną w otoczeniu swojego ustalonego punktu P_0 o parametrze t_0, jeżeli dla każdej liczby $\delta > 0$ krzywa ta jest nieprostowalna w przedziale $\langle t_0 - \delta,\ t_0 + \delta\rangle$.

/1.13/ <u>Definicja</u>. Kawałkiem krzywej C o równaniu $\bar{r} = \bar{r}$ /t/ dla $t \in \langle a,b\rangle$ nazywamy krzywą o równaniu $\bar{r} = \bar{r}$ /t/ dla $t \in \langle\alpha,\beta\rangle \subset \langle a,b\rangle$, gdzie $\alpha \neq \beta$.

II. <u>Różne własności Archimedesa</u>

Niech krzywa C będzie przedstawiona równaniem parametryczno-wektorowym $\bar{r} = \bar{r}$ /t/ dla $t \in \langle a,b\rangle$ przy czym t niekoniecznie jest parametrem naturalnym. W podręcznikach geometrii różniczkowej / [3], t.I, str.66, [7] str.106/ spotykamy następujące definicje własności Archimedesa.

/2.1/ <u>Definicja</u>. Krzywa prostowalna C ma w swym punkcie P_0 o parametrze t_0 własność Archimedesa $/A^1/$ /krótko: własność $/A^1/$/, jeżeli

$$\lim_{(P,Q)\to(P_0,P_0)} \frac{|\breve{PQ}|}{|PQ|} = 1,$$

gdzie P,Q są zmiennymi punktami krzywej C, $|\breve{PQ}|$ oznacza długość łuku P,Q krzywej C, zaś $|PQ|$ jest długością cięciwy PQ.

/2.2/ <u>Definicja</u>. Krzywa prostowalna C ma w swym punkcie P_0 o parametrze t_0 własność Archimedesa $/A^2/$ /krótko: własność $/A^2/$/, jeżeli

$$\lim_{P\to P_0} \frac{|\breve{PP_0}|}{|PP_0|} = 1,$$

gdzie P jest zmiennym punktem krzywej C.

Nie trudno zauważyć, że warunkiem koniecznym na to, aby krzywa C miała w punkcie P_0 własność $/A^1/$ jest, by miała w tym punkcie własność $/A^2/$. Ale - jak zobaczymy - istnieją krzywe mające własność $/A^2/$ a nie mające własności $/A^1/$ w rozważanym punkcie.

Obecnie wprowadzimy definicję pewnej własności, którą krótko oznaczymy przez /W/.

/2.3/ <u>Definicja</u>. Krzywa prostowalna C ma w swym punkcie P_0 o parametrze t_0 własność /W/, jeżeli do dowolnej liczby ε takiej, że $0 < \varepsilon < 1$ można dobrać liczbę $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ taką, że dla każdego punktu P krzywej C o parametrze t spełniającym nierówność $0 < |t - t_0| < \delta$ i dla każdego podziału $t_0 = t_1' < t_2' < \dots < t_k' = t$ lub

$$t = t'_1 < t'_2 < \ldots < t'_k = t_0 \quad \text{jest}$$

$$|\bar{r}/t/ - \bar{r}/t_0/| \geqslant \varepsilon \sum_{i=2}^{k} |\bar{r}/t'_i/ - \bar{r}/t'_{i-1}/|.$$

/2.4/ Twierdzenie. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby krzywa prostowalna C o równaniu $\bar{r} = \bar{r}/t/$ dla $t \in \langle a,b\rangle$ miała w punkcie P_0 o parametrze t_0 własność $/A^2/$ jest, by krzywa C w rozważanym punkcie miała własność /W/.

Krótko mówiąc, własność $/A^2/$ jest dla krzywych prostowalnych równoważna własności /W/.

Dowód. Wystarczalność warunku udowodnimy metodą niewprost. Zakładamy, że krzywa C nie posiada własności $/A^2/$ w punkcie P_0. Oznacza to, że

/2.5/ istnieje liczba $\varepsilon_1 > 0$ taka, że przy każdym $\delta > 0$ istnieją punkty P o parametrach t z przedziału $0 < |t - t_0| < \delta$, dla których

$$\frac{|\breve{PP_0}|}{|\overline{PP_0}|} > 1 + \varepsilon_1.$$

Niech ε_2 będzie dowolną liczbą dodatnią $< \varepsilon_1$.
Dla każdego t z przedziału $0 < |t - t_0| < \delta$ istnieją takie $t'_1, t'_2, \ldots, t'_k$, że $t_0 = t'_1 < t'_2 < \ldots < t'_k = t$ lub $t = t'_1 < t'_2 < \ldots < t'_k = t_0$ oraz

$$\frac{|\breve{PP_0}|}{\sum_{i=2}^{k} |\bar{r}/t'_i/ - \bar{r}/t'_{i-1}/|} < 1 + \varepsilon_2.$$

Stąd i z /2.5/ mamy:

$$|\overline{PP_0}| < \frac{1}{1+\varepsilon_1} |\breve{PP_0}| < \frac{1+\varepsilon_2}{1+\varepsilon_1} \sum_{i=2}^{k} |\bar{r}/t'_i/ - \bar{r}/t'_{i-1}/|.$$

Kładąc $\varepsilon \overset{df}{=} \dfrac{1+\varepsilon_2}{1+\varepsilon_1}$ mamy $0 < \varepsilon < 1$.

Ostatecznie otrzymujemy:

/2.6/ Istnieje liczba $0 < \varepsilon < 1$ taka, że przy każdym $\delta > 0$ istnieją punkty o parametrze t z przedziału $0 < |t - t_0| < \delta$ i istnieje podział $t_0 = t'_1 < t'_2 < \ldots < t'_k = t$ lub $t = t'_1 < t'_2 < \ldots < t'_k = t_0$ dla którego zachodzi:

$$|\bar{r}/t/ - \bar{r}/t_0/| < \varepsilon \sum_{i=2}^{k} |\bar{r}/t'_i/ - \bar{r}/t'_{i-1}/|.$$

A to jest sprzeczne z definicją /2,3/, tzn. krzywa C nie posiada własności /W/ w punkcie P_0.

Dowód konieczności warunku poprowadzimy również metodą niewprost. Niech krzywa C nie ma własności /W/ w omawianym punkcie P_0 o parametrze t_0. Oznacza to, że zachodzi /2.6/. Ale dla każdego t z przedziału $0 < |t - t_0| < \delta$ i dla każdego podziału $t_0 = t_1' < t_2' < \ldots < t_k' = t$ lub $t = t_1' < t_2' < \ldots < t_k' = t_0$ mamy

/2.7/ $$|\breve{PP_0}| \geqslant \sum_{i=2}^{k} |\bar{r}/t_i'/ - \bar{r}/t_{i-1}'/|.$$

Z /2.6/ i /2.7/ otrzymujemy:

/2.8/ Istnieje liczba $0 < \varepsilon < 1$ taka, że przy każdym $\delta > 0$ istnieją punkty o parametrach t z przedziału $0 < |t - t_0| < \delta$, dla których

$$\frac{|\breve{PP_0}|}{|PP_0|} \geqslant \frac{1}{\varepsilon} > 1.$$

A to oznacza, że krzywa C nie ma własności $/A^2/$ w punkcie P_0.

Ponieważ w definicji własności /W/ nie występuje explicite długość łuku, nasuwa się pytanie: czy istnieją krzywe nieprostowalne w pewnym otoczeniu punktu P_0 posiadające własność /W/ /tj. własność $/A^2/$/ w punkcie P_0? Odpowiedź jest negatywna, można bowiem udowodnić następujące

/2.9/ <u>Twierdzenie</u>. Żadna krzywa C o równaniu $\bar{r} = \bar{r}/t/$ dla $t \in \langle a,b \rangle$ nieprostowalna w otoczeniu swojego ustalonego punktu P_0 o parametrze t_0, nie ma własności /W/ w punkcie P_0.

<u>Dowód</u>. Prawdą jest, że

/2.10/ istnieje liczba $0 < \varepsilon < 1$ taka, że przy każdym $\delta > 0$ istnieją punkty o parametrach t z przedziału $0 < |t - t_0| < \delta$, dla których

$$|\bar{r}/t/ - \bar{r}/t_0/| < \varepsilon.$$

Ale, dla każdego t z przedziału $0 < |t - t_0| < \delta$ spełniającego /2.10/ - ponieważ krzywa C nie jest prostowalna w otoczeniu punktu P_0 - można znaleźć taki podział $t_1', t_2', \ldots\ldots, t_k'$, że $t_0 = t_1' < t_2' < \ldots < t_k' = t$ lub $t = t_1' < t_2' < \ldots < t_k' = t_0$ oraz

$$\sum_{i=2}^{k} |\bar{r}/t_i'/ - \bar{r}/t_{i-1}'/ > \frac{1}{\varepsilon},$$

a to wraz z /2.10/ oznacza, że krzywa C nie posiada własności /W/ w punkcie P_0 o parametrze t_0.

Własność $/A^2/$ została uogólniona przez W. Waliszewskiego w pracy [11]. Podał on następującą definicję.

/2.11/ <u>Definicja</u>. Krzywa prostowalna C ma w swym punkcie P_0 o parametrze t_0 własność Archimedesa $/A^3/$ /krótko: własność $/A^3/$/, jeżeli

$$\lim_{P \to P_0} \frac{|\overset{\smile}{P_0P}|}{|P_0P|} = \alpha ,$$

gdzie α jest liczbą skończoną, a P jest punktem zmiennym krzywej C.

Analogicznie do tej definicji możemy podać następującą definicję.

/2.12/ Definicja. Krzywa prostowalna C ma w swym punkcie P_0 o parametrze t_0 własność Archimedesa /A^4/ /krótko: własność /A^4//, jeżeli

$$\lim_{(P,Q) \to (P_0,P_0)} \frac{|\overset{\smile}{PQ}|}{|PQ|} = \alpha ,$$

gdzie α jest liczbą skończoną a P i Q są zmiennymi punktami krzywej C.

Obecnie podam przykład krzywej mającej własność /A^3/, a nie mającej własności /A^2/ w rozważanym punkcie.

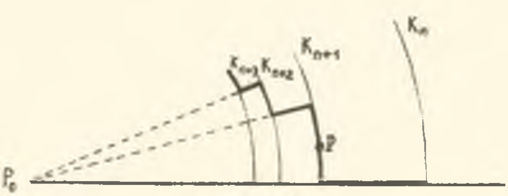
/2.13/ Przykład.[x] Oznaczmy przez K_n /P_0, $\frac{1}{n}$/ dla $n = 1,2,3,\ldots$ okręgi o środku w punkcie P_0 i o promieniu $\frac{1}{n}$.

Szukaną krzywą będzie krzywa C płaska, składająca się z nieskończenie wielu łuków C_n o długościach:

$$a_n \overset{\text{df}}{=} \alpha\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \quad \text{dla} \quad n = 2,3,4 \ldots,$$

gdzie α jest dowolną liczbą > 1, oraz z punktu P_0.

Długość a_n łuku C_n dla $\alpha > 1$ jest większa od odległości między okręgami K_n /P_0,$\frac{1}{n}$/ i K_{n+1} /P_0, $\frac{1}{n+1}$/ dla $n = 2,3,4,\ldots$ Niech więc łuk C_n przebiega w pierścieniu wyznaczonym przez okręgi K_n/P_0,$\frac{1}{n}$/ i K_{n+1} /P_0,$\frac{1}{n+1}$/ w ten sposób, że od pewnego ustalonego punktu na okręgu K_n/P_0, $\frac{1}{n}$/ przechodzić będzie po promieniu do okręgu K_{n+1}/P_0, $\frac{1}{n+1}$/, a dalej będzie biegł już po okręgu K_{n+1}/P_0, $\frac{1}{n+1}$/. Podobnie niech łuk C_{n+1} przebiega w pierścieniu wyznaczonym przez okręgi K_{n+1}/P_0, $\frac{1}{n+1}$/ i K_{n+2} /P_0, $\frac{1}{n+2}$/ przechodząc po promieniu do okręgu K_{n+1}/P_0, $\frac{1}{n+1}$/ do okręgu K_{n+2} /P_0, $\frac{1}{n+2}$/, a dalej będzie biegł już po okręgu K_{n+2} /P_0, $\frac{1}{n+2}$/ itd./zob. rys.1/.



Rys.1

[x]/Przykład ten podał Z.Moszner.

Łatwo stwierdzić, że przy tej konstrukcji krzywej nie występuje jej samonawijanie się. Krzywa C jest krzywą prostowalną, gdyż szereg z długości łuków C_n tj. $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Obecnie pokażemy, że krzywa C ma własność $/A^3/$ w punkcie P_0. Oznaczmy przez P dowolny punkt położony na łuku C_n. Wówczas

$$\frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots}{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{|\overset{\smile}{P_0P}|}{|P_0P|} \leqslant \frac{a_n+a_{n+1}+\ldots}{\frac{1}{n+1}},$$

gdzie $a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots = \frac{1}{n}\alpha$ dla $n = 2,3,4 \ldots$

Stąd

$$\lim_{P\to P_0} \frac{|\overset{\smile}{P_0P}|}{|P_0P|} = \alpha, \quad \text{gdzie } \alpha > 1.$$

Na pytanie: czy istnieje krzywa, która posiadałaby własność $/A^4/$ w pewnym punkcie P_0, a która nie posiadałaby własności $/A^1/$ w tym punkcie - odpowiedź jest negatywna[x].

Z twierdzenia /1.11/ wynika bowiem, że na krzywej prostowalnej C istnieje ciąg punktów $P_v \longrightarrow P_0$ i takich, że w punktach P_v krzywa C ma własność $/A^2/$. Jeżeli więc $\alpha > 1$, to do każdego P_v istnieje Q_v takie, że

$$\frac{|\overset{\smile}{P_vQ_v}|}{|P_vQ_v|} \leqslant \frac{1+\alpha}{2}, \quad \text{bo} \quad \frac{1+\alpha}{2} > 1,$$

oraz takie, że $Q_v \longrightarrow P_0$. Ale stąd

$$\lim_{(P_v,Q_v)\to(P_0,P_0)} \frac{|\overset{\smile}{P_vQ_v}|}{|P_vQ_v|} \leqslant \frac{1+\alpha}{2} < \alpha,$$

a więc mamy sprzeczność z przypuszczeniem, że

$$\lim_{(P_v,Q_v)\to(P_0,P_0)} \frac{|\overset{\smile}{P_vQ_v}|}{|P_vQ_v|} = \alpha, \quad \text{gdzie } \alpha > 1.$$

I wreszcie podam zapowiedziany uprzednio przykład krzywej, która ma w pewnym swym punkcie własność $/A^2/$ a nie ma w rozważanym punkcie własności $/A^1/$.

Prostym przykładem takiej krzywej jest wykres funkcji $y = |x|$, rozważany w punkcie $P_0/0,0/$. Punkt ten jest jednak punktem wewnętrznym tej krzywej.

Innym bardziej interesującym przykładem zapowiedzianej krzywej jest omówiona w przykładzie /2.13/ krzywa C, rozważana w przypadku $\alpha = 1$,

x/ Odpowiedź podał Z. Moszner.

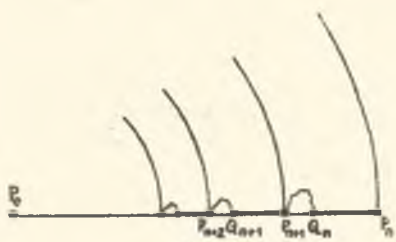
dla której zmienimy przebieg w następujący sposób. Z dowolnie ustalonego punktu P_n na okręgu $K_n/P_o, \frac{1}{n}/$ naszej krzywej, wyznaczmy odcinek realizujący odległość między okręgami $K_n/P_o, \frac{1}{n}/$ i $K_{n+1}/P_o, \frac{1}{n+1}/$.
Drugi koniec tego odcinka wyznaczy nam punkt P_{n+1} na okręgu $K_{n+1}/P_o, \frac{1}{n+1}/$. Na odcinku P_nP_{n+1} wybieramy punkt Q_n tak, aby

$$P_{n+1}\,Q_n = \frac{1}{n^2/n+1/} \quad \text{dla} \quad n = 2,3,4 \,\ldots.,$$

co jest możliwe, bowiem $|P_{n+1}\,Q_n| < |P_{n+1}\,P_n|$ dla $n = 2,3,4 \ldots$
Niech łuk C_n przebiega od punktu P_n do punktu Q_n tak, żeby

$$\frac{|\overset{\frown}{P_nQ_n}|}{|P_nQ_n|} = 1 \quad \text{dla} \quad n = 2,3,4 \ldots$$

i dalej od punktu Q_n do punktu P_{n+1} tak, żeby krzywa była ciągła w punkcie P_o /zob.rys.2/.



Rys.2

W tej sytuacji

$$\frac{|\overset{\frown}{Q_nP_{n+1}}|}{|Q_nP_{n+1}|} = \frac{3n - 1}{n - 1}$$

a zatem

$$\lim_{(Q_n,P_{n+1})\to(P_o,P_o)} \frac{|\overset{\frown}{Q_nP_{n+1}}|}{|Q_nP_{n+1}|} = 3.$$

W pracy [13] spotykamy również następującą definicję własności Archimedesa, zwaną jednostajną własnością Archimedesa.
/2.14/ Definicja. Krzywa prostowalna C spełnia jednostajną własność Archimedesa, jeżeli do dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takie, że

$$\frac{|\overset{\frown}{PQ}|}{|PQ|} < 1 + \varepsilon,$$

dla dowolnych punktów P i Q na krzywej C takich, że $|PQ| < \delta$. Powyższa definicja w odróżnieniu od dotychczasowych ma charakter integralny /globalny/.

Wykorzystując fakt, że krzywa C o równaniu $\bar{r} = \bar{r}/t/$ dla $t \in \langle a,b\rangle$ jest kompaktem, łatwo możemy stwierdzić, że jeżeli krzywa C posiada własność $/A^1/$ w każdym punkcie P o parametrze $t \in \langle a,b\rangle$, to krzywa ta ma jednostajną własność Archimedesa w tym przedziale. Odwrotne twierdzenie jest oczywiście banalne.

Wszystkie dotychczasowe definicje własności Archimedesa dotyczyły wyłącznie krzywych prostowalnych. Obecnie podamy pewną modyfikację własności Archimedesa, którą będą posiadały nie tylko pewne krzywe prostowalne ale również pewne krzywe nieprostowalne.

/2.16/ <u>Definicja</u>. Krzywa C ma w swym punkcie P_o o parametrze t_o własność Archimedesa $/A^5/$, jeżeli do dowolnej liczby ε takiej, że $0 < \varepsilon <$ można dobrać liczbę $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ taką, że dla każdego punktu P krzywej C o parametrze t spełniającym nierówność $0 < |t - t_o| < \delta$ i dla każdego podziału $t_o \leqslant t_1' \leqslant t_2' \leqslant t$ lub $t \leqslant t_1' \leqslant t_2' \leqslant t_o$ jest

$$|\bar{r}/t/ - \bar{r}/t_o/| \geqslant \varepsilon\, |\bar{r}/t_2'/ - \bar{r}/t_1'/| .$$

Jest rzeczą widoczną, że każda krzywa prostowalna posiadająca w ustalonym punkcie P_o własność $/A^2/$ /tzn. własność /W//, posiada również w rozważanym punkcie własność $/A^5/$.

Dla dokładniejszego zilustrowania własności $/A^5/$ podamy następujące przykłady:

1/ przykład krzywej prostowalnej nie posiadającej w pewnym swym punkcie P_o własności $/A^2/$, a posiadającej w tym punkcie własność $/A^5/$,

2/ przykład krzywej prostowalnej nie posiadającej w pewnym swym punkcie P_o własności $/A^5/$,

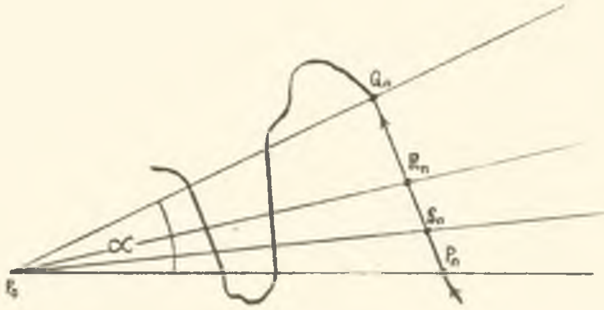
3/ przykład krzywej nieprostowalnej posiadającej własność $/A^5/$,

4/ przykład krzywej nieprostowalnej nie posiadającej własności $/A^5/$.

Nim skonstruujemy żądane przykłady, udowodnimy następujące

/2.17/ <u>Twierdzenie</u>. Jeżeli krzywa prostowalna C o równaniu $\bar{r} = \bar{r}/t/$ dla $t \in \langle a,b\rangle$ przebiega w ten sposób, że w każdym otoczeniu ustalonego punktu P_o o parametrze t_o istnieje kawałek krzywej C pokrywający się z odcinkiem, którego jeden koniec leży na jednym ramieniu a drugi koniec na drugim ramieniu dowolnie ustalonego kąta α x/ $(\alpha \neq 0, \pi)$ o wierzchołku w punkcie P_o, przy czym żaden z końców tego odcinka nie pokrywa się z punktem P_o, to krzywa C nie posiada własności $/A^2/$ w punkcie P_o /zob.rys.3/

x/ Kąt i jego miarę oznaczamy tą samą literą.



Rys.3

Dowód. Bez zwężania ogólności możemy przyjąć, że

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Oznaczmy przez $\overset{\frown}{P_nQ_n}$ dla $n = 1,2,3, \ldots.$ te kolejne odcinki krzywej C, dla których punkty P_n będą punktami położonymi na jednym ramieniu kąta α , a punkty Q_n będą punktami położonymi na drugim ramieniu kąta α, przy czym $|\overset{\frown}{P_nP_o}| > |\overset{\frown}{Q_nP_o}|$ oraz punkty P_n, Q_n dla $n = 1,2,3, \ldots.$ nie pokrywają się z punktem P_o. Dwusieczna kąta α wyznaczy nam punkt R_n na odcinku P_nQ_n dla $n = 1,2,3,\ldots$ a dwusieczna kąta $\frac{1}{2}\alpha \overset{df}{=} \sphericalangle(P_n, P_o, R)$ wyznaczy punkt S_n na odcinku P_nR_n dla $n = 1,2,3, \ldots$ /zob. rys.3/. Niech

$$\gamma_n \overset{df}{=} \sphericalangle(P_o, P_n, Q_n) \quad \text{dla } n = 1,2,3, \ldots. ,$$

to wówczas

$$0 \leqslant \gamma_n \leqslant \pi - \alpha \quad \text{dla } n = 1,2,3, \ldots.$$

Stąd i z twierdzenia Bolzano - Weierstrassa wnioskujemy.że istnieje ciąg $n_k \to \infty$ taki, że

$$\gamma_{n_k} \to \gamma \qquad \text{gdzie } 0 \leqslant \gamma \leqslant \pi - \alpha$$

Prawdą jest, że

$$\frac{|\overset{\frown}{S_nP_o}|}{|S_nP_o|} \geqslant \frac{|S_nR_n| + |R_nP_o|}{|S_nP_o|} = \frac{\sin\frac{\alpha}{4} + \sin\left(\gamma_n + \frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\left(\gamma_n + \frac{\alpha}{2}\right)} ,$$

a dla poprzednio wyznaczonego ciągu $n_k \to \infty$ będzie

/2.18/
$$\frac{|\overset{\frown}{S_{n_k}P_o}|}{|S_{n_k}P_o|} \geqslant \frac{\sin\frac{\alpha}{4} + \sin\left(\gamma_{n_k} + \frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\left(\gamma_{n_k} + \frac{\alpha}{2}\right)}$$

Oczywiście

$$\lim_{n_k \to \infty} \frac{\sin\frac{\alpha}{4} + \sin(\gamma_{n_k} + \frac{\alpha}{4})}{\sin(\gamma_{n_k} + \frac{\alpha}{2})} = \frac{\sin\frac{\alpha}{4} + \sin(\gamma + \frac{\alpha}{4})}{\sin(\gamma + \frac{\alpha}{2})}$$

oraz jak łatwo stwierdzić

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{4} + \sin(\gamma + \frac{\alpha}{4})}{\sin(\gamma + \frac{\alpha}{2})} > 1 \quad \text{dla każdego} \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant \pi - \alpha .$$

Stąd oraz z /2.18/ wynika, że istnieje liczba $\varepsilon > 0$ i istnieje wskaźnik N taki, że

$$\frac{|\overset{\frown}{S_{n_k} P_o}|}{|S_{n_k} P_o|} \geqslant \frac{\sin\frac{\alpha}{4} + \sin(\gamma + \frac{\alpha}{4})}{\sin(\gamma + \frac{\alpha}{2})} - \varepsilon > 1 \quad \text{dla} \quad n_k > N,$$

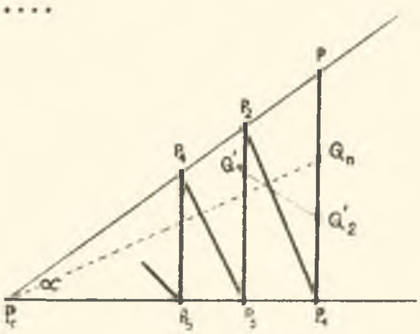
a to oznacza, że krzywa C nie ma własności /A^2/ w punkcie P_o.

Obecnie przejdziemy do skonstruowania kolejno zapowiedzianych uprzednio przykładów krzywych.

/2.19/ Przykład. Niech P będzie punktem leżącym na jednym z ramion kąta ostrego α o wierzchołku w punkcie P_o, P_1 będzie rzutem prostokątnym punktu P na drugie ramię kąta α , P_2 rzutem prostokątnym punktu P_1 na pierwsze ramię itd. /zob.rys.4/. Szukaną krzywą C będzie krzywa łamana, składająca się z nieskończenie wielu odcinków:

$PP_1 \cup P_1P_2 \cup P_2P_3 \cup \ldots.$

oraz z punktu P_o.



Rys.4

Oznaczając $|PP_1| = s$ oraz $s_n = |PP_1| + |P_1P_2| + \ldots. + |P_{n-1} P_n|$ łatwo można wykazać, że

$$s_n \longrightarrow \frac{s}{1 - \cos\alpha} \quad \text{gdy} \quad n \longrightarrow \infty$$

a zatem krzywa C jest prostowalna.

Na podstawie twierdzenia /2.17/ stwierdzamy, że krzywa C nie posiada własności $/A^2/$ w punkcie P_o.

Pokażemy, że krzywa C ma własność $/A^5/$ w punkcie P_o. Niech punktowi Q położonemu na krzywej C odpowiada parametr $t \overset{df}{=} |QP_o|$. Weźmy pod uwagę dowolny punkt Q_n o parametrze t_n na krzywej C i dowolny podział $t_o \leqslant t_1' \leqslant t_2' \leqslant t_n$ przy czym parametrowi t_i' dla $i = 1,2$ niech odpowiada punkt Q_i' dla $i = 1,2$. Jeżeli odcinek $Q_1'Q_2'$ leży w trójkącie prostokątnym $P_oP_1P_2$ lub w trójkącie prostokątnym $P_oP_1Q_n$, to napewno $|Q_1'Q_2'| \leqslant |Q_nP_o|$. W przeciwnym przypadku trójkąt $P_oQ_1'Q_2'$ zawsze jest trójkątem rozwartokątnym przy czym bok $Q_1'Q_2'$ leży przy kącie rozwartym i dlatego mamy:

$$|Q_1'Q_2'| \leqslant |Q_2'P_o| \leqslant |Q_nP_o| \qquad /\text{zob.rys.4/}.$$

A zatem, zgodnie z definicją /2.16/ krzywa C ma własność $/A^5/$ w punkcie P_o.

/2.20/ Przykład. Określmy punkty P_n, Q_n dla $n = 1,2,3,\ldots$ przez współrzędne: $P_n/\frac{1}{n^2}, 0/$, $Q_n/\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}/$ w układzie prostokątnym kartezjańskim. Krzywą C zdefiniujemy jako krzywą płaską, złożoną z nieskończenie wielu odcinków:

$$P_1Q_1 \cup Q_1P_2 \cup P_2Q_2 \cup Q_2P_3 \cup \ldots,$$

oraz z punktu P_o o współrzędnych /0,0/.

Krzywa C jest prostowalna w przedziale $\langle 0,1\rangle$. Wynika to z nierówności:

$$\sum_{n/1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n/1}^{\infty} \sqrt{\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^2 + \frac{1}{n^4}} \leqslant (1+\sqrt{2}) \sum_{n/1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Pokażemy, że krzywa C nie posiada własności $/A^5/$ w punkcie P_o. W tym celu weźmy pod uwagę punkty P_n i Q_n oraz pewną liczbę ε_o taką, że $\frac{\sqrt{2}}{2} < \varepsilon_o < 1$. Wówczas

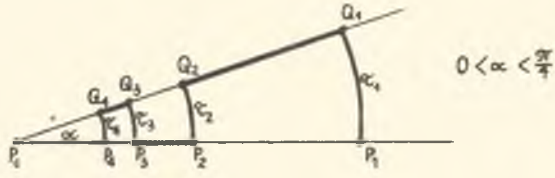
$$|P_oP_n| < \varepsilon_o |P_oQ_n| \qquad \text{dla } n = 1,2,3 \ldots,$$

a to oznacza, że krzywa C nie ma własności $/A^5/$ w punkcie P_o.

/2.21/ Przykład. Oznaczmy przez P_n punkty o współrzędnych $\left(\frac{1}{n},0\right)$ położone na jednym z ramion kąta ostrego z przedziału $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ a przez Q_n punkty przecięcia się drugiego ramienia tegoż kąta z łukami τ_n okręgu o promieniu $|P_nP_o| = \frac{1}{n}$ dla $n = 1,2,3, \ldots$ /zob.rys.5/

Kładziemy /zob.rys.5/:

$$C = \{P_o\} \cup \tau_1 \cup Q_1Q_2 \cup \tau_2 \cup P_2P_3 \cup \tau_3 \cup \ldots.$$



Rys.5

Tak skonstruowana krzywa C nie jest prostowalna, gdyż szereg $\sum_{n/1}^{\infty} \tau_n$ jest rozbieżny. Żaden odcinek leżący w wycinku koła o kącie środkowym $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ nie będzie większy od promienia tego wycinka. Stąd już wynika, że krzywa C posiada własność $/A^5/$ w punkcie P_0.

/2.22/ <u>Przykład</u>. Zmieńmy w przykładzie /2.20/ współrzędne wyróżnionych tam punktów P_n, Q_n dla $n = 1,2,3, \ldots.$ na współrzędne $P_n/\frac{1}{n},0/, Q_n/\frac{1}{n},\frac{1}{n}/$ a dalej skonstruujemy krzywą tak jak w tym przykładzie.

Otrzymana w ten sposób krzywa będzie nieprostowalna, a dla punktów P_n i Q_n i dla liczby ε_0 takiej, że $\frac{\sqrt{2}}{2} < \varepsilon_0 < 1$, będzie zachodziła nierówność: $|P_0P_n| < \varepsilon_0|P_0Q_n|$ dla $n = 1,2,3,\ldots$, co oznacza, że krzywa nie ma własności $/A^5/$ w punkcie P_0.

III. Stosunek własności Archimedesa $/A^2/$ do innych założeń regularnościowych czynionych w geometrii różniczkowej

Ponieważ w założeniach różnych twierdzeń występuje własność $/A^2/$, warto pokusić się o porównanie jej z innymi założeniami regularnościowymi czynionymi w geometrii różniczkowej.

W podręczniku M. Biernackiego [3] t.I na str.66 spotykamy następujące twierdzenie dotyczące krzywej płaskiej:

"Jeśli łuk jest klasy C^1 a punkt M jest punktem zwyczajnym[x/] tego łuku, to stosunek długości łuku MM' do długości cięciwy MM' dąży do 1, gdy $M' \to M$."

W obranej tam metodzie dowodu, założenie, że krzywa jest łukiem klasy C^1 w otoczeniu punktu M, jest w sposób istotny przez autora wykorzystane.

/3.1/ <u>Twierdzenie</u>. Jeżeli krzywa C o równaniu $\bar{r} = \bar{r}/t/$ dla $t \in \langle a,b\rangle$ jest klasy C^1 w punkcie regularnym P_0 o parametrze t_0, to krzywa C ma w tym punkcie własność $/A^1/$.

---

x Punkt zwyczajny oznacza tu punkt regularny.

Twierdzenie to, w porównaniu z powyżej zacytowanym twierdzeniem jest ogólniejsze gdyż dotyczy krzywej przestrzennej, oraz "silniejszej" własności Archimedesa, jaką jest własność /A^1/ /w porównaniu z własnością /A^2/ i wreszcie ma słabsze założenie regularnościowe /klasa C^1 w punkcie, a nie globalnie/.

Dowód. Niech wektor $\bar{r}$ /t/ ma współrzędne x/t/,y/t/,z/t/. Istnieje taki przedział Δ, że

a/ $t_0 \in \Delta$,

b/ funkcje x/t/,y/t/,z/t/ jako klasy C^1 w punkcie P_0 będą w przedziale Δ spełniały warunek Lipschitza, a więc będą bezwzględnie ciągłe,

c/ funkcja

$$f/t/ \overset{\mathrm{df}}{=} \sqrt{(x/t/)^2 + (y/t/)^2 + (z/t/)^2}$$

będzie ograniczona w Δ.

Przedział Δ ma być otwarty, gdy $t_0 \in (a,b)$, ma być postaci $\langle a,\beta)$ gdy $t_0 = a$ i postaci $(\alpha,b\rangle$ gdy $t_0 = b$. Z warunku b/ wynika, że długość łuku krzywej C, odpowiadającego t z przedziału $\langle t_1,t_2\rangle \subset \Delta$ wyraża się wzorem:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'/t/)^2 + (y'/t/)^2 + (z'/t/)^2}\, dt.$$

Niech P_1 i P_2 będą dwoma dowolnymi punktami krzywej C wyznaczonymi przez parametry t_1 i t_2 z przedziału Δ. Wówczas

$$/3.2/ \qquad \frac{|\overset{\frown}{P_1P_2}|}{|P_1P_2|} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'/t/)^2 + (y'/t/)^2 + (z'/t/)^2}\, dt}{\sqrt{(x/t_2/ - x/t_1/)^2 + (y/t_2/ - y/t_1/)^2 + (z/t_2/ - z/t_1/)^2}}$$

Z warunku c/ i z twierdzenia o wartości średniej dla całek wynika, że istnieje liczba $\varkappa$ taka, że

$$/3.3/ \qquad \inf_{t\in\langle t_1,t_2\rangle} f/t/ \leqslant \varkappa \leqslant \sup_{t\in\langle t_1,t_2\rangle} f/t/$$

oraz

$$/3.4/ \qquad \int_{t_2}^{t_1} f/t/\, dt = \varkappa(t_2 - t_1).$$

Z twierdzenia o wartości średniej dla funkcji, mamy:

$$\sqrt{\left(\frac{x/t_2/-x/t_1/}{t_2-t_1}\right)^2+\left(\frac{y/t_2/-y/t_1/}{t_2-t_1}\right)^2+\left(\frac{z/t_2/-z/t_1/}{t_2-t_1}\right)^2}=$$

/3.5/

$$=\sqrt{(x'/\xi_1/)^2+(y'/\xi_2/)^2+(z'/\xi_3/)^2},$$

gdzie $t_1 \leqslant \xi_i \leqslant t_2$ dla $i = 1,2,3$.
Ostatecznie, jeżeli $t_1 \to t_0$, $t_2 \to t_0$ tzn. jeżeli punkty $/P_1, P_2/ \to /P_0, P_0/$, to z /3,2/, /3,3/, /3,4/, /3,5/ otrzymujemy tezę naszego twierdzenia.

W dalszym ciągu odpowiemy na następujące pytania:

- w jakim stosunku własność $/A^2/$ pozostaje do założenia, że krzywa prostowalna posiada styczną w rozważanym punkcie lub do założenia, że krzywa prostowalna nie posiada stycznej w tym punkcie?

Otóż okazuje się, że żadne z wymienionych tu założeń nie wyklucza ani nie determinuje zachodzenia własności $/A^2/$. Dokładniej przedstawimy to na poniżej skonstruowanych przykładach krzywych.

I tak, pierwszy przykład będzie przedstawiał krzywą prostowalną, która ma w swym ustalonym punkcie styczną nieciągłą i ma w tym punkcie własność $/A^2/$.

/3.6/ <u>Przykład</u>. Określmy punkty P_n, Q_n dla $n = 1,2,3 \ldots$ przez współrzędne: $P_n/\frac{1}{n},0/$, $Q_n/\frac{1}{n},\frac{1}{n^3}/$ w układzie prostokątnym kartezjańskim /0 ; x,y/.

Niech łuk C_n składa się /zob.rys.6/:

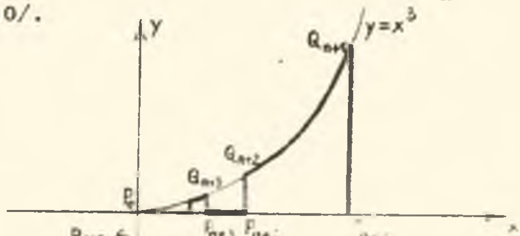
a/ z odcinka $P_{n+1}Q_{n+1}$,

b/ z łuku będącego wykresem funkcji $y = x^3$, dla

$$\frac{1}{n+2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n+1},$$

c/ z odcinków: $Q_{n+2}P_{n+2}$ i $P_{n+2}P_{n+3}$.

Krzywą C zdefiniujemy jako sumę złożoną z łuków C_n dla $n = 1,2,3\ldots$ oraz z punktu $P_0/0,0/$.



Rys.6

Krzywa C jest prostowalna, gdyż szereg $\sum_{n/1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ jest zbieżny i krzywa będąca wykresem funkcji $y = x^3$ w przedziale $\langle 0,1\rangle$ też jest prostowalna. Krzywa C ma styczną w punkcie P_o i styczna ta jest nieciągła w tym punkcie. Pokażemy, że krzywa C ma własność $/A^2/$ w punkcie P_o. Oznaczmy przez P dowolny punkt położony na łuku C_n. Wówczas:

$$1 \leqslant \frac{|\overset{\frown}{P_oP}|}{|P_oP|} \leqslant \frac{\sum\limits_{k/n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} + \int\limits_0^{\frac{1}{n+1}} \sqrt{1 + (3x^2)^2}\,dx}{\frac{1}{n+3}} .$$

Ponieważ

$$\sum_{k/n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} < \frac{1}{2n^2} \qquad /[9], \text{ t.II, str.245}/$$

oraz

$$\int\limits_0^{\frac{1}{n+1}} \sqrt{1 + (3x^2)^2}\,dx < \frac{1}{n+1} \sqrt{1 + \varepsilon^2}, \quad \text{gdzie} \quad \varepsilon \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

więc

$$\lim_{P \to P_o} \frac{|\overset{\frown}{P_oP}|}{|P_oP|} = 1.$$

Przykładem krzywej prostowalnej, która ma w swym ustalonym punkcie styczną a nie ma własności $/A^2/$ jest krzywa skonstruowana w sposób analogiczny jak w przykładzie /3.6/ z tą jednak różnicą, że przyjętą tam funkcję $y = x^3$ zastępujemy funkcją $y = x^2$. Taka krzywa jest prostowalna i ma styczną w punkcie P_o. Pokażemy, że nie ma ona własności $/A^2/$ w punkcie P_o. W tym celu weźmy pod uwagę dowolny punkt P położony na łuku C_n. Wówczas

$$\frac{|\overset{\frown}{P_oP}|}{|P_oP|} \geqslant \frac{\sum\limits_{k/n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2}} \geqslant \frac{\sum\limits_{k/n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n+1}}{\frac{\sqrt{2}}{n+1}},$$

a ponieważ

$$\sum_{k/n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} > \frac{1}{n+1} \qquad /[9], \text{ t.II, str.245}/$$

więc

$$\frac{|\overset{\frown}{P_oP}|}{|P_oP|} \geqslant \sqrt{2},$$

a to oznacza, że krzywa nie posiada własności $/A^2/$ w punkcie P_o.

Przykład krzywej prostowalnej, która w pewnym ustalonym punkcie nie ma stycznej, a ma w tym punkcie własność /A^2/, jest przedstawiony w pracy S. Midury [12]. Jest to krzywa, której równanie w układzie biegunowym ma postać:

/3.8/
$$\varphi = \begin{cases} \pi \sin \sqrt{|\log\rho|} + 1 & \text{dla } 0 < \rho \leqslant \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{dla } \rho = 0. \end{cases}$$

O krzywej tej autor dowodzi, że w punkcie P_0/0,0/ ma własność /A^2/ i dalej pokazuje, że krzywa ta nie jest T_1 styczna[x/] do siebie samej, z czego na podstawie twierdzenia 6 umieszczonego w tejże pracy /str.111/ wnioskujemy, że krzywa ta nie posiada stycznej w omawianym punkcie P_0.

I wreszcie ostatni przykład krzywej prostowalnej, która w pewnym ustalonym punkcie nie ma stycznej i nie ma w tym punkcie własności /A^2/ podaje twierdzenie /2.17/.

Analizując powyżej przedstawione krzywe stwierdzamy, że trochę silniejsze założenie o krzywej, mianowicie, że krzywa ma w pewnym ustalonym punkcie nie tylko styczną, ale również ma w tym punkcie wektor styczny, również nie determinuje zachodzenia własności /A^2/ w tym punkcie.

IV. Zastosowanie własności Archimedesa w geometrii różniczkowej

Jak już wspomnieliśmy, własność Archimedesa występuje w założeniach różnych twierdzeń. Obecnie podamy przykłady takich twierdzeń. Dla dostosowania do oznaczeń w niniejszej pracy w sformułowaniach przytaczanych twierdzeń będzie częściowo zmienioną symbolika.

/4.1/ S. Gołąb i Z. Moszner w pracy [8] zajmują się stycznością łuków prostych[xx/] w ogólnych przestrzeniach metrycznych. Ze względu na dalsze rozważania, przytoczymy definicje pewnych pojęć podanych w tejże pracy.

Definicja 1. Rzutem R' punktu R na łuk C nazywamy ten punkt $P/t/$ łuku C, który odpowiada najmniejszej wartości parametru $t/t \in \langle 0,1 \rangle/$ spełniającego związek:

$$\rho/R, P/t// = \rho/R, C/,$$

gdzie $\rho/R,C/$ oznacza odległość punktu R od łuku C.

Definicja 2. Łuk prosty C_2 jest w punkcie P_0 styczny do łuku prostego C_1, jeżeli oznaczając przez P_2 bieżący punkt łuku C_2 różny od P_0 a przez P_2' jego rzut na łuk C_1, mamy:

$$\lim_{P_2 \to P_0} \frac{\rho/P_2, P_2'/}{\rho/P_0, P_2/} = 0.$$

x/ Definicja T_1 styczności jest podana w następnym rozdziale.
xx/ Łuk prosty oznacza tu łuk zwykły.

Styczność łuku C_2 do łuku C_1 w punkcie P_0 w sensie definicji 2 oznaczamy krótko $C_2 TC_1$.

Ponieważ podana tu definicja styczności łuków nie ma własności symetrii nawet przy założeniu, że łuki C_1 i C_2 są prostowalne, powstało pytanie: jakie założenie wystarczy dodać do założenia $C_2 TC_1$, ażeby móc stąd wnioskować $C_1 TC_2$. Odpowiedź na to pytanie podają autorzy w postaci następującego

Twierdzenia. Jeżeli dwa łuki proste C_1 i C_2 wychodzą z tego samego punktu P_0 i jeżeli $C_2 TC_1$ w punkcie P_0 oraz łuk C_1 ma w punkcie P_0 własność $/A^2/$, to $C_1 TC_2$ w punkcie P_0.

Pokazano też w pracy, że założenie: łuk C_1 ma w punkcie P_0 własność $/A^2/$, jest istotne w tym twierdzeniu. Można zapytać, czy w powyższym twierdzeniu założenie: łuk C_1 ma własność $/A^2/$ w punkcie P_0, można zastąpić założeniem: łuk C_1 ma własność $/A^5/$ w punkcie P_0. Okazuje się jednak, że odpowiedź jest negatywna.

Żeby się o tym przekonać, weźmy pod uwagę za krzywą C_1 krzywą skonstruowaną w przykładzie /2.21/, a za krzywą C_2 weźmy półprostą, na której są położone punkty P_n /zob.rys.5/. Jak już pokazaliśmy, krzywa C_1 ma własność $/A^5/$ w punkcie P_0. Obecnie pokażemy, że zachodzi $C_2 TC_1$ w punkcie P_0. Dla pierwszej współrzędnej punktu P położonego na krzywej C_2, mamy:

$$\frac{1}{n+1} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{dla pewnego } n \text{ naturalnego},$$

i wówczas $\varrho/P_0,P/ > \frac{1}{n+1}$.

Oznaczając przez P' rzut punktu P na krzywą C_1 otrzymamy:

$$\varrho/P,P'/ \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Z ostatnich dwu nierówności mamy:

$$\frac{\varrho/P,P'/}{\varrho/P,P_0/} \leqslant \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}},$$

i gdy $n \to \infty$, to

$$\frac{\varrho/P,P'/}{\varrho/P,P_0/} \to 0,$$

a to oznacza, że zachodzi $C_2 TC_1$ w punkcie P_0.

Weźmy teraz pod uwagę na krzywej C_1 punkty oznaczone na rys. 5 przez Q_n, które w prostokątnym układzie kartezjańskim /o początku umieszczonym w wierzchołku rozważanego tam kąta α i o osiach tak dobranych, by oznaczone na rys.5 punkty P_n leżały na dodatniej półosi x, zaś kąt α

leżał w pierwszej ćwiartce tego układu/ mają współrzędne:

$$Q_n \left(\frac{1}{n}\cos\alpha,\ \frac{1}{n}\sin\alpha\right), \quad \text{gdzie} \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}.$$

Wtedy $\varrho(P_0,Q_n) = \frac{1}{n}$. Oznaczając przez Q_n' rzut punktów Q_n na krzywą C_2, otrzymamy:

$$\varrho(Q_n,Q_n') = \frac{1}{n}\sin\alpha.$$

Ostatnie dwie równości dają nam równość:

$$\frac{\varrho(Q_n,Q_n')}{\varrho(P_0,Q_n)} = \sin\alpha, \quad \text{gdzie} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{4},$$

a to oznacza, że nie zachodzi C_1TC_2 w punkcie P_0.

/4,2/ Własność $/A^2/$ występuje również w pracy S. Midury [12] dotyczącej stosunku dwu różnych definicji styczności łuków w ogólnych przestrzeniach metrycznych. Autor rozważa - uprzednio podaną - definicję T styczności dwu łuków, oraz następującą definicję T_1 styczności dwu łuków.

Definicja 3. Łuk C_2 jest styczny w punkcie P_0 do łuku prostego C_1, jeżeli spełniony jest związek:

$$\lim_{(P_1,P_2)\to(P_0,P_0)} \frac{\varrho^2(P_0,P_1) + \varrho^2(P_0,P_2) - \varrho^2(P_1,P_2)}{2\varrho(P_0,P_1)\cdot\varrho(P_0,P_2)} = 1.$$

Styczność łuku C_2 do łuku C_1 w punkcie P_0 w sensie definicji 3 będziemy oznaczali krótko $C_2T_1C_1$.

W dalszym ciągu autor zadaje pytanie: czy jeżeli C_2TC_1 w punkcie P_0 i łuk C_1 ma własność $/A^2/$ w punkcie P_0, to czy $C_2T_1C_1$ w punkcie P_0? Odpowiedź znajduje on negatywną, o czym świadczy wspomniany już w tej pracy przykład /3.8/ za parę C_1,C_2 przyjmuje parę C,C'.

Przykład /3.8/ pokazuje, że otrzymamy odpowiedź negatywną i w tym przypadku, kiedy w powyższym pytaniu własność $/A^2/$ zastąpimy "silniejszą" własnością $/A^1/$. Pokażemy bowiem, że krzywa /3.8/ ma jednostajną własność Archimedesa, a zatem i własność $/A^1/$ w rozważanym punkcie P_0.

Najpierw pokażemy, że do każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ takie, że

$$\frac{|\breve{PQ}|}{|PQ|} < 1 + \varepsilon,$$

dla każdej pary punktów $P(\varrho_P, \varphi_P)$, $Q(\varrho_Q, \varphi_Q)$ należących do krzywej i takich, że $0 < \varrho_P < \delta_1$ i $0 < \varrho_Q < \delta_1$. Ponieważ

$$|\varphi'(\varrho)\cdot\varrho| = \frac{\pi|\cos\sqrt{|\log\varrho|}|}{2\cdot\sqrt{|\log\varrho|}} \longrightarrow 0 \quad \text{gdy} \quad \varrho \longrightarrow 0^+,$$

więc istnieje takie $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, że dla każdego ϱ takiego, że $0 < \varrho < \delta_1$ mamy:

$$|\varphi'(\varrho)\cdot\varrho| < \varepsilon .$$

Niech P, Q będą dowolnymi punktami naszej krzywej takimi, że $0<\varrho_P<\varrho_Q<\delta_1$. Z poprzedniej nierówności mamy:

$$|\breve{PQ}| = \int_{\varrho_P}^{\varrho_Q} \sqrt{1 + (\varphi')^2\varrho^2}\, d\varrho \leqslant \int_{\varrho_P}^{\varrho_Q} (1 + |\varphi'(\varrho)\cdot\varrho|) d\varrho < (\varrho_Q - \varrho_P)(1+\varepsilon),$$

a ponieważ $|PQ| \geqslant \varrho_Q - \varrho_P$, więc $\frac{|\breve{PQ}|}{|PQ|} < 1 + \varepsilon$ dla $\varrho_P < \varrho_Q < \delta_1$.
Kawałek krzywej /3.8/ wyznaczony przez przedział $\frac{\delta_1}{2} \leqslant \varrho \leqslant \frac{1}{2}$ jest klasy C^1, a więc ma jednostajną własność Archimedesa. Oznacza to, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ taka, że

$$\frac{|\breve{PQ}|}{|PQ|} < 1 + \varepsilon ,$$

dla każdej pary punktów P, Q tegoż kawałka takich, że $|PQ| < \delta_2$.
Oznaczmy przez $\delta = \min\left(\frac{\delta_1}{3}, \delta_2\right)$. Stąd i na podstawie powyższych rozważań ostatecznie stwierdzamy, że dla każdej pary punktów P, Q krzywej /3.8/ zachodzi:

$$\frac{|\breve{PQ}|}{|PQ|} < 1 + \varepsilon , \quad \text{gdy tylko} \quad |PQ| < \delta .$$

/4.3/ Własnością Archimedesa posłużył się również S. Serafin w pracy [6], w której badał związek pomiędzy prostowalnością przez styczne, a zwykłą prostowalnością krzywej.

Definicja prostowalności krzywej przez styczne jest następująca.

Definicja. Niech krzywa C prostowalna będzie dana równaniem $\bar{r} = \bar{r}/t/$, gdzie $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$. Rozważmy dowolny regularny[x/] ciąg podziałów p_n przedziału $\langle\alpha,\beta\rangle$, $p_n : \{\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta\}$ oraz ciąg łamanych $\{\Omega_n\}$ wpisanych w C, o wierzchołkach w punktach wyznaczonych przez punkty kolejnych podziałów. W każdym przedziale częściowym t_i, t_{i+1} dowolnego podziału wybierzmy punkt τ_i taki, by C w odpowiadającym mu punkcie miała styczną /taki punkt zawsze istnieje/. Cięciwę odpowiadającą temu przedziałowi zrzutujemy prostopadle na styczną w wybranym uprzednio punkcie. Sumując długości utworzonych rzutów dla cięciw tworzących łamaną Ω_n, otrzymamy liczbę ω_n. Ponieważ ciąg podziałów jest regularny, więc ciąg $\{|\Omega_n|\}$ długości łamanych Ω_n ma za granicę długość L krzywej C. Jeżeli dla dowolnego regularnego ciągu p_n podziałów przedziału $\langle\alpha,\beta\rangle$ i dowolnego ciągu układów punktów τ_n takich, że w każdym z tych punktów krzywa ma styczną, zachodzi $\lim_{n\to\infty}\omega_n = L$, to krzywą nazywać będziemy prostowalną przez styczne.

x/ Ciąg podziałów p_n nazywamy regularnym, jeżeli $\lambda_n = \max_{i=1,2,\ldots,n} |t_i - t_{i-1}| \to 0$, gdy $n \to \infty$.

W pracy zostało udowodnione

<u>Twierdzenie</u>. Jeżeli krzywa spełnia warunki:

a/ jest prostowalna,

b/ w każdym punkcie, w którym ma styczną, ma wektor styczny,

c/ w każdym punkcie, w którym ma styczną, ma własność $/A^2/$,

d/ zbiór punktów nieciągłości wektora stycznego jest miary Lebesgue'a zero,

to krzywa jest prostowalna przez styczne.

W świetle rozdziału III można łatwo stwierdzić, że założenie c/ w tym twierdzeniu jest niezależne od pozostałych założeń.

W tejże pracy spotykamy przykład krzywej K, która

a/ jest prostowalna,

b/ ma w każdym punkcie wektor styczny,

c/ ma w każdym punkcie własność $/A^2/$,

d/ nie jest prostowalna przez styczne.

W tej sytuacji można zapytać: czy jeżeli własność $/A^2/$ zastąpimy własnością $/A^1/$ oraz krzywa będzie spełniała wypisane powyżej warunki a/ i b/, to czy ta krzywa będzie już wtedy prostowalna przez styczne? Na to pytanie nie znam odpowiedzi.

Warto zauważyć, że krzywa K, o której mowa powyżej, nie ma własności $/A^1/$, a więc nie daje odpowiedzi na postawione pytanie. Nie powtarzając dość długiego opisu konstrukcji krzywej K - zachowując jednak dokładnie oznaczenia jakie zostały przyjęte w pracy [6] - pokażemy, że krzywa K nie ma własności $/A^1/$ w punktach P zbioru Q /[6] tw.2 I-X/. W każdym bowiem otoczeniu punktu P można znaleźć zawarty w nim jakiś przedział π_j^k a w tym przedziale pewne punkty A_j^k i B_j^k, w których styczne tworzą z osią odciętych kąty 45° i -45°. Punkty te są połączone łukiem okręgu o środku leżącym na dwusiecznej odcinka $A_j^k B_j^k$. Ponieważ w tej sytuacji mamy:

$$\frac{|\overset{\frown}{A_j^k B_j^k}|}{|A_j^k B_j^k|} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4} > 1,$$

a zatem krzywa K nie ma własności $/A^1/$ w punkcie P.

P r a c e   c y t o w a n e

[1] Archimedes, Works: "On the Sphere and Cylinder", Bock I, edited by T.L.Heath, Cambridge 1897.

[2] F. L e j a; "Rachunek różniczkowy i całkowy", PWN, Warszawa 1954.

[3] M. B i e r n a c k i; "Geometria różniczkowa", PWN, Warszawa 1954.

[4] S. G o ł ą b; "Geometrie différentielle vis-à-vis des hypothèses d'une faible régularité", Revue de math. pures et appliquées, T.I, No 3, 1956, str.99-112.

[5] R. S i k o r s k i; "Funkcje rzeczywiste", t.I, PWN, Warszawa 1958.

[6] S. S e r a f i n; "O prostowalności przez styczne", Rocznik Naukowo-Dydaktyczny WSP w Krakowie, z.13, Kraków 1961, str.39-60.

[7] W. R i n o w; "Die innere Geometrie der metrischen Räume", Springer - Verlag, Berlin - Gottingen - Heidelberg 1961.

[8] S. G o ł ą b, Z. M o s z n e r; "Sur le contact des courbes dans les espaces métriques généraux", Colloquium Mathematicum, Vol. X, 1963, str.305-311.

[9] G.M. F i c h t e n h o l z; "Rachunek różniczkowy i całkowy", PWN Warszawa 1964.

[10] A. G o e t z; "Geometria różniczkowa", PWN Warszawa 1965.

[11] W. W a l i s z e w s k i; "On the tangency of sets in a metric space", Colloquium Mathematicum, Vol.XV, 1966, str.129-133.

[12] S. M i d u r a; "O porównaniu definicji styczności łuków prostych w ogólnych przestrzeniach metrycznych", Rocznik Naukowo-Dydaktyczny WSP w Krakowie, z.25, Kraków 1966, str.91-116.

[13] A. Z a j t z; "Linie geodezyjne na powierzchniach słabo regularnych" - praca doktorska w maszynopisie.

R é s u m é

Propriété d' Archimède et ses applications dans la géométrie différentielle

Ce travail traite des certaines généralisations de la propriété d' Archimède avec leurs certaines applications, ainsi que des réflexions, concernant le rapport de ces propriétés aux suppositions de la régularité différentielle.

Р е з ю м е

СВОЙСТВО АРХИМЕДА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Этат труд занимается некоторыми обобщениями свойства Архимеда вместе с некоторыми применениями и рассуждениями касающимися отношения этих свойств к другим регулированным основам применяемым в дифференциальной геометрии.