ROCZNIK NAUKOWO – DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE

Zeszyt 41 Prace matematyczne VI Rok 1970

Stanisław Midura, Zenon Moszner

KILKA UWAG O WYZNACZANIU KOMITANT ALGEBRAICZNYCH OBIEKTÓW GEOMETRYCZNYCH

§ 1. W pracy [7] /twierdzenia 6 i 8/ został podany warunek konieczny i dostateczny na to, aby dany obiekt geometryczny był komitantą algebraiczną innego obiektu geometrycznego. W niniejszej nocie wykażemy, że można na dwa sposoby wzmocnić konieczność tego warunku /twierdzenia 1, 2 i 3/ i podamy pewne zastosowania tego wzmocnienia. Metody stosowane w nocie znane są w teorii obiektów geometrycznych /zob. np. [6] lub [8]/.

Twierdzenia w pracy [7] zostały sformułowane i udowodnione dla grupy L_n^s, ale prawdziwe są dla dowolnej grupy transformacji G wyznaczających zbiór dopuszczalnych układów odniesienia. Z tego też powodu w niniejszej nocie, wykorzystującej wyniki pracy [7], formułujemy otrzymane rezultaty dla dowolnej grupy G w miejsce grupy L_n^s.

Pojęcia używane w tej nocie można znaleźć w [3].

§ 2. Rozważmy dwa obiekty geometryczne abstrakcyjne ω i δ o regułach transformacyjnych

/1/ $\omega' = F(w, l)$ dla $\omega \in \mathcal{M}$ i $l \in G$,

/2/ $\delta' = H(\delta, l)$ dla $\delta \in \mathcal{N}$ i $l \in G$

i o włóknach $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$.

/3/ $L_1(\omega_0) \overset{df}{=} [l \in G: F(\omega_0, l) = \omega_0]$,

/4/ $L_2(\delta_0) \overset{df}{=} [l \in G: H(\delta_0, l) = \delta_0]$.

Zbiory $L_1(\omega_0)$ i $L_2(\delta_0)$ przy ustalonych ω_0 i δ_0 odpowiednio ze zbiorów $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ są podgrupami grupy G /zob. [4] i [5] twierdzenie 5/, zwanymi podgrupami stabilnymi obiektów ω i δ odpowiednio dla elementów ω_0 i δ_0.

Zacytujemy twierdzenie 6 z [7] jako

Lemat. Tranzytywny abstrakcyjny obiekt geometryczny σ o włóknie $\mathcal{N}$ jest komitantą algebraiczną tranzytywnego abstrakcyjnego obiektu ω o włóknie $\mathcal{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją elementy ω_0 i σ_0 należące odpowiednio do włókien $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ takie, że $L_1(\omega_0) \subset L_2(\sigma_0)$.

Udowodnimy

Twierdzenie 1. Tranzytywny obiekt geometryczny σ o włóknie $\mathcal{N}$ jest komitantą algebraiczną tranzytywnego obiektu geometrycznego ω o włóknie $\mathcal{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego elementu ω_1 z włókna $\mathcal{M}$ istnieje element σ_1 we włóknie $\mathcal{N}$ taki, że $L_1(\omega_1) \subset L_2(\sigma_1)$.

Dowód. Dostateczność warunku wynika natychmiast z lematu.

Dowód konieczności warunku. Na podstawie lematu istnieją elementy ω_0 i σ_0 należące do włókien $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ takie, że

/5/ $\quad L_1(\omega_0) \subset L_2(\sigma_0).$

Z założenia i twierdzenia zawartego w [2] str. 23-24 wynika, że podgrupy $L_1(\omega_0)$ i $L_1(\omega_1)$ grupy G są sprzężone. Zatem w grupie G istnieje L_0 takie, że

/6/ $\quad L_1(\omega_1) = L_0^{-1} L_1(\omega_0) L_0.$

Z /5/ i /6/ wynika, że

/7/ $\quad L_1(\omega_1) = L_0^{-1} L_1(\omega_0) L_0 \subset L_0^{-1} L_2(\sigma_0) L_0.$

Z założenia i twierdzenia zawartego w [2] str. 23-24 p. K wynika, że podgrupa $L_0^{-1} L_2(\sigma_0) L_0$ jest podgrupą stabilną dla pewnego elementu z włókna $\mathcal{N}$. Element ten oznaczymy przez σ_1. Zatem z /7/ wynika, że

/8/ $\quad L_1(\omega_1) \subset L_2(\sigma_1).$

Z /8/ na podstawie lematu wynika konieczność warunku. Zatem twierdzenie zostało udowodnione.

Analogicznie jak twierdzenie 1 można udowodnić

Twierdzenie 2. Tranzytywny obiekt geometryczny σ o włóknie $\mathcal{N}$ jest komitantą algebraiczną tranzytywnego obiektu geometrycznego ω o włóknie $\mathcal{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego elementu σ_1 z włókna $\mathcal{N}$ istnieje element ω_1 należący do włókna $\mathcal{M}$ taki, że $L_1(\omega_1) \subset L_2(\sigma_1)$.

Niech będą dane: obiekt geometryczny ω o regule transformacyjnej /1/ i o włóknie $\mathcal{M}$ oraz dwa, dowolnie wybrane ale ustalone, elementy ω_0 i σ_0 odpowiednio ze zbiorów $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$. Oznaczmy przez $Z = Z(F, \omega_0, \sigma_0)$ zbiór wszystkich tranzytywnych rozwiązań równania

/9/ $\quad H[H(\sigma, l_1), l_2] = H(\sigma, l_2 . l_1)$

/"." oznacza działanie w grupie G/ na zbiorze $\mathcal{N} \times G$, które dla tranzytywnego obiektu geometrycznego ω o regule transformacyjnej /1/ i włóknie $\mathcal{M}$ oraz dla elementów ω_0 i δ_0 spełniają warunek

/10/ $L_1(\omega_0) \subset L_2(\delta_0)$.

Z twierdzenia 1 i twierdzenia 2 z [7] wynikają następujące 3 wnioski.

Wniosek 1. Jeżeli wyznaczymy zbiór Z, to każda funkcja tego zbioru jest regułą transformacyjną komitanty algebraicznej tranzytywnego obiektu ω o regule transformacyjnej /1/ oraz każda tranzytywna komitanta algebraiczna o włóknie $\mathcal{N}$ obiektu ω jest równoważna z pewnym obiektem o regule transformacyjnej należącej do zbioru Z.

Z wniosku 1 wynika, że dla wyznaczenia wszystkich komitant algebraicznych o włóknie $\mathcal{N}$ tranzytywnego obiektu geometrycznego ω z dokładnością do równoważności obiektów geometrycznych wystarczy wyznaczyć zbiór Z.

Wniosek 2. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby tranzytywny abstrakcyjny obiekt geometryczny ω posiadał jako komitanty algebraiczne tylko obiekty z nim równoważne i skalary jest, aby dla ustalonego ω_0 z włókna $\mathcal{M}$ obiektu ω każda podgrupa grupy G zawierająca podgrupę $L_1(\omega_0)$ i różna od niej była identyczna z grupą G.

Wniosek 3. Jeżeli dla tranzytywnego obiektu geometrycznego ω o regule transformacyjnej /1/ i dla ustalonego ω_0 ze zbioru $\mathcal{M}$ każda podgrupa grupy G zawierająca podgrupę $L_1(\omega_0)$ ma indeks różny od mocy zbioru $\mathcal{N}$, to obiekt ω nie ma komitant geometrycznych o włóknie $\mathcal{N}$.

Przykład 1. Rozważmy obiekt geometryczny typu /1,1,2//definicję typu można znaleźć w [1] str.15/ o regule transformacyjnej

/11/ $$\omega' = g\left[\frac{g^{-1}(\omega)}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right],$$

gdzie g jest ustaloną funkcją różnowartościową odwzorowującą zbiór liczb rzeczywistych na przedział (a,b) /por. [1] str.38/.

Wykażemy, że każda komitanta algebraiczna geometrycznego obiektu o regule transformacyjnej /11/ jest równoważna z tym obiektem lub jest skalarem. Niech $\omega_0 \in (a,b)$. Oznaczmy przez

/12/ $$L_3(\omega_0) \overset{df}{=} \left\{ \langle\alpha_1,\alpha_2\rangle \in L_1^2 : g\left[\frac{g^{-1}(\omega_0)}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_2^2}\right] = \omega_0\right\},$$

$$p \overset{df}{=} g^{-1}(\omega_0).$$

Z ostatniej równości i /12/ wynika, że

$$L_3(\omega_0) = \left\{ \langle \alpha_1, p(\alpha_1^2 - \alpha_1)\rangle \right\}_{\alpha_1 \in R_0},$$

gdzie $R_0 = (-\infty,\infty)\setminus\{0\}$ czyli jest zbiorem liczb rzeczywistych różnych od zera.

Przypuśćmy, że istnieje podgrupa H grupy L_1^2 taka, że $L_3(\omega_0)\subsetneqq H$. Niech $\langle\beta_1,\beta_2\rangle\in H$ i $\langle\beta_1,\beta_2\rangle\,\overline{\in}\,L_3(\omega_0)$. Do pary $\langle\beta_1,\beta_2\rangle$ i liczby p istnieje liczba t taka, że

$$\beta_2 = t\beta_1^2 - p\beta_1 \tag{13}$$

oraz $t\neq p$, bo $L_3(\omega_0)\subsetneqq H$. Łatwo sprawdzić, że

$$\langle\beta_1, t\beta_1^2 - p\beta_1\rangle\cdot\left\{\langle\alpha_1, p(\alpha_1^2-\alpha_1)\rangle\right\}_{\alpha_1\in R_0} = \tag{14}$$

$$=\left\{\langle\alpha_1, t\alpha_1^2-p\alpha_1\rangle\right\}_{\alpha_1\in R_0}.$$

Ponieważ $\langle\beta_1,\beta_2\rangle\in H\supset L_3(\omega_0)$ więc zbiór /14/ zawiera się w podgrupie H. Utwórzmy iloczyn dwu elementów ze zbioru /14/

$$\left\{\begin{aligned}&\langle\beta_1, t\beta_1^2 - p\beta_1\rangle\cdot\langle\alpha_1, t\alpha_1^2-p\alpha_1\rangle = \\ &=\langle\beta_1\alpha_1,\ t\beta_1\alpha_1^2 - p\beta_1\alpha_1 + t\beta_1^2\alpha_1^2 - p\beta_1\alpha_1^2\rangle\in H.\end{aligned}\right. \tag{15}$$

Przez $\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle$ oznaczmy dowolny element ze zbioru $L_1^2\setminus L_3(\omega_0)$. Rozważmy układ równań

$$\left\{\begin{aligned}&\beta_1\alpha_1 = \gamma_1\\ &t\beta_1\alpha_1^2 - p\beta_1\alpha_1 + t\beta_1^2\alpha_1^2 - p\beta_1\alpha_1^2 = \gamma_2\end{aligned}\right. \tag{16}$$

o niewiadomych α_1 i β_1. Z pierwszego równania układu /16/ obliczmy $\beta_1 = \frac{\gamma_1}{\alpha_1}$ i podstawmy do drugiego równania a otrzymamy

$$(t\gamma_1 - p\gamma_1)\alpha_1 = \gamma_2 - (t\gamma_1^2 - p\gamma_1). \tag{17}$$

Zauważyliśmy już, że $t\neq p$ więc równanie /17/ o niewiadomej α_1 posiada rozwiązanie. Ponieważ $\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle\,\overline{\in}\,L_3(\omega_0)$ zatem rozwiązanie równania /17/ jest różne od zera. Wykazaliśmy więc, że jeżeli $\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle\,\overline{\in}\,L_3(\omega_0)$, to układ równań /16/ posiada rozwiązanie. Zatem z /15/, /16/ i faktu, że $L_3(\omega_0)\subset H$ wynika, iż $H = L_1^2$. Wykazaliśmy więc, że jeżeli do podgrupy H należy choć jeden element oprócz elementów z podgrupy grupy $L_3(\omega_0)$ to $H = L_1^2$. Wobec tego, na podstawie wniosku 2, każda komitanta algebraiczna obiektu geometrycznego o regule transformacyjnej /11/ jest równoważna z tym obiektem lub jest skalarem.

W analogiczny sposób można udowodnić, że każda komitanta algebraiczna obiektu Piencowa jest równoważna z tym obiektem lub jest skalarem.

Przykład 2. W przykładzie tym zajmiemy się obiektami geometrycznymi typu /2, 2, 1/ /zob. [1] str.136-137/. Rozważmy dwa obiekty geometryczne:
a/ Wektor kontrawariantny o regule transformacyjnej

/18/ $$v^{i'} = A^{i'}_{i} v^{i},$$

którego włóknem jest zbiór par liczb rzeczywistych różnych od pary $\langle 0,0 \rangle$.
b/ Tranzytywny J-obiekt geometryczny o regule transformacyjnej

/19/ $$\Omega' = \Lambda[\varepsilon \mathcal{J} \lambda(\Omega)] \qquad (\Lambda[\lambda(\Omega)] = \Omega),$$

gdzie $\varepsilon = 1$ lub $\varepsilon = \operatorname{sgn} \mathcal{J}$.

Wykażemy, że obiekt geometryczny o regule transformacyjnej /19/ nie jest komitantą algebraiczną wektora kontrawariantnego.

Dla dowolnego elementu włókna obiektu o regule transformacyjnej /19/ podgrupa stacjonarna jest zbiorem transformacji spełniających warunek

/20/ $$\mathcal{J} = 1 \quad \text{lub} \quad |\mathcal{J}| = 1.$$

Dla elementu $\langle v_0^{1}, 0 \rangle$ i $v_0^{1} \neq 0$ podgrupą stacjonarną wektora kontrawariantnego o regule transformacyjnej /18/ jest zbiór transformacji spełniających warunek

/21/ $$\begin{cases} v_0^{1} = A^{1'}_{1} v_0^{1} \\ 0 \ \ = A^{2'}_{1} v_0^{1}. \end{cases}$$

Z /21/ i faktu, że $v_0^{1} \neq 0$ wynika

/22/ $$A^{1'}_{1} = 1 \quad \text{i} \quad A^{2'}_{2} = 0.$$

Rozważmy transformację spełniającą warunek /22/, dla której $|A^{2'}_{2}| \neq 1$, więc

/23/ $$\left|\det \begin{bmatrix} 1 & A^{1'}_{1} \\ 0 & A^{2'}_{2} \end{bmatrix}\right| = |A^{2'}_{2}| \neq 1.$$

Transformacja spełniająca warunek /23/ nie spełnia warunku /20/. Zatem podgrupa wektora kontrawariantnego dla pary $\langle v_0^{1}, 0 \rangle$ i $v_0^{1} \neq 0$ nie zawiera się w żadnej podgrupie stacjonarnej obiektu o regule transformacyjnej /19/. Wobec tego, na podstawie twierdzenia 1, obiekt geometryczny o regule transformacyjnej /19/ nie jest komitantą algebraiczną wektora kontrawariantnego.

Rezultat ten uzyskuje się w monografii [1] /str.136-137/ przez udowodnienie, że odpowiednie równanie funkcyjne nie posiada rozwiązania niestałego.

§ 3. Załóżmy teraz, że obiekty geometryczne o regułach transformacyjnych /1/ i /2/ nie są tranzytywne. Przypuśćmy, że włóknami tranzytywnymi włókien $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ są zbiory z rodzin

$$\{\mathcal{M}_t\}_{t\in T} \quad \text{i} \quad \{\mathcal{N}_p\}_{p\in P}$$

oraz $\bigcup_{t\in T} \mathcal{M}_t = \mathcal{M}$ i $\bigcup_{p\in P} \mathcal{N}_p = \mathcal{N}$. Wiadomo, że obiekt geometryczny nietranzytywny jest sumą pewnej rodziny obiektów geometrycznych tranzytywnych. Obiekt geometryczny o regule transformacyjnej /1/,//2/ / obciętej do zbioru $\mathcal{M}_t \times G$ /$\mathcal{N}_p \times G$/ jest obiektem geometrycznym tranzytywnym. Zatem z twierdzenia 1 wynika

<u>Twierdzenie 3</u>. <u>Obiekt geometryczny</u> σ <u>o regule transformacyjnej /2/ jest komitantą algebraiczną obiektu geometrycznego</u> ω <u>o regule transformacyjnej /1/ wtedy i tylko wtedy, gdy</u>:

a/ <u>istnieje funkcja</u> h <u>odwzorowująca zbiór</u> T <u>na zbiór</u> P,

b/ <u>dla dowolnego</u> t <u>ze zbioru</u> T <u>i dla dowolnie ustalonego</u> m_t <u>z włókna</u> $\mathcal{M}_t$ <u>istnieje</u> n_t <u>należące do włókna</u> $\mathcal{N}_{h(t)}$ <u>takie, że</u> $L_1(m_t) \subset L_2(n_t)$.

Można też sformułować analogon twierdzenia 2 dla obiektów geometrycznych nietranzytywnych.

P r a c e c y t o w a n e

[1] J. A c z e l und S. G o ł ą b, Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte, Warszawa 1960.

[2] L.S. P o n t r i a g i n, Grupy topologiczne, Warszawa 1961.

[3] M. K u c h a r z e w s k i and M. K u c z m a, Basic concepts of the theory of geometric objects, Rozprawy Matematyczne 43/1964/.

[4] E. S i w e k et A. Z a j t z, Contribution à la théorie des pseudo-objects géométriques, Annales Polonici Mathematici 19 /1967/, str.185-192.

[5] S. M i d u r a, Sur les solutions de l'équation de translation, Aequationes Mathematicae, vol.I, fasc.1/2/1968/, str.77-84.

[6] M. K u c h a r z e w s k i und A. Z a j t z, Klassifikation der linearen homogenen geometrischen Objekte, deren Komponentenzahl die Dimension des Raumes nicht übertrifft, Coll. Math. 16 /1967/, str.185-192

[7] S. M i d u r a, Sur l'équivalence et les comitants algebriques des objects géometriques abstraits, Annales Polonici Mathematici 22/1969/ str.179-187.

[8] E. S i w e k et A. Z a j t z, Sur les comitants algébriques des densités, Prace Mat. Uniw.Śląskiego, 1 /1969/, str.91-98.

R é s u m é

Quelques remarques au sujet de la détermination des comitants algébriques des objets géométriques

Dans la note on renforce de deux manières une condition nécessaire, donné dans [7], pour qu'un objet géométrique serait le comitant algébrique d'un objet géométrique. On donne aussi des applications de cette condition renforcée.

Р е з ю м е

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИИ НА ТЕМУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КОМИТАНТОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЁКТОВ

В работе усиливается двумя способами некоторое необходимое условие, данное в [7], для того чтобы геометрический объект являлся алгебраическим комитантом другого геометрического объекта. Приводятся также некоторые применения этого усиленного условия.