ROCZNIK NAUKOWO - DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE

Zeszyt 41 Prace matematyczne VI Rok 1970

Zenon Moszner

O PEWNYM TWIERDZENIU Z TEORII CIĄGŁYCH GRUP PRZEKSZTAŁCEŃ

W pracy wykazano, że pewne twierdzenie w monografii Pontriagina [2] jest niedokładne, wypowiedziano i udowodniono pewne twierdzenie uzupełnione na ten sam temat, stwierdzono istotność założeń topologicznych w tym twierdzeniu i wskazano na jego zastosowania w różnych działach matematyki. Wyniki zawarte w niniejszej pracy były już sygnalizowane w notach [5] i [6].

§ 1. W monografii [2] str.139 wypowiedziano pewne twierdzenie dotyczące ciągłych grup przekształceń, w którym stwierdzono, między innymi, że

– jeżeli G jest tranzytywną i ciągłą grupą przekształceń przestrzeni topologicznej Γ, G i Γ są lokalnie dwuzwarte i G jest sumą przeliczalnej ilości podzbiorów dwuzwartych, to funkcja

/1/ $$\Psi(\xi) \overset{\mathrm{df}}{=} \left\{ x \in G : x^{*}(\alpha) = \xi \right\},$$

gdzie x^{*} oznacza tą transformację przestrzeni Γ, która odpowiada elementowi x w G, jest ciągła /a więc jest homeomorfizmem w tym przypadku/ dla każdego α z Γ.

Stwierdzenie to nie jest dokładne. Przyjmijmy bowiem za G grupę multyplikatywną liczb wymiernych z topologią dyskretną a za Γ zbiór liczb wymiernych, różnych od zera, z topologią przez otoczenia, które są zdefiniowane jako dopełnienia zbiorów skończonych. Widać łatwo, że G przez przyporządkowanie

$$x \longrightarrow (\beta = x\alpha),$$

gdzie $x \in G, \alpha \in \Gamma, \beta \in \Gamma$, jest grupą tranzytywną i ciągłą przestrzeni Γ i że G i Γ spełniają założenia twierdzenia dyskutowanego. Teza tego twierdzenia nie jest jednak prawdziwa w tym przypadku, bowiem funkcja

$$\Psi(\xi)=\{\xi/\alpha\}$$

nie jest funkcją ciągłą. Wynika to stąd, że w przestrzeni G zbieżne są jedynie ciągi prawie stałe, a w przestrzeni Γ także i inne.

Nie trudno zauważyć jaką conajmniej własność topologiczną musi posiadać przestrzeń Γ na to, by dyskutowane twierdzenie było prawdziwe. Przy prawdziwej tezie Γ musi przystawać topologicznie do zbioru warstw lewostronnych grupy G względem jej podgrupy $G_\alpha = \Psi(\alpha)$ ([2] str.23), a ponieważ ta ostatnia przestrzeń topologiczna jest całkowicie regularna ([2] str.102) więc i przestrzeń Γ musi być całkowicie regularna.

§ 2. Okazuje się, że jednak nie trzeba zakładać aż tak wiele. Jeżeli do powyżej obalonego twierdzenia dołożymy założenie, że przestrzeń jest przestrzenią Hausdorffa, to otrzymamy już twierdzenie prawdziwe. Co więcej możemy w nim pewne założenia osłabić. Przyjmijmy w tym celu definicje następujące.

Nazwijmy funkcję $F(\alpha,x):\Gamma\times G\longrightarrow\Gamma$, gdzie G i Γ są przestrzeniami topologicznymi, prawie ciągłą jeżeli

/2/ istnieje takie α_0 z Γ, że funkcja $F(\alpha_0,x)$ jest ciągła względem x w każdym punkcie przestrzeni G,

/3/ dla każdego x z G funkcja $F(\alpha,x)$ jest ciągła względem α na Γ.

Grupę transformacji G zbioru Γ nazwijmy prawie ciągłą jeżeli jest prawie ciągła funkcja $F(\alpha,x)$ w przyporządkowaniu

$$x\longrightarrow(\beta = F(\alpha, x))$$

przez które G jest grupą transformacji zbioru Γ.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie 1.

- jeżeli G jest tranzytywną, prawie ciągłą i półdwuzwartą /tzn. sumą przeliczalnej ilości podzbiorów dwuzwartych/ grupą przekształceń przestrzeni Hausdorffa Γ lokalnie dwuzwartej w jednym przynajmniej punkcie, to funkcja Ψ, zdefiniowana powyżej związkiem /1/ jest ciągła na Γ.

Przed dowodem tego twierdzenia udowodnimy lemat następujący:

- jeżeli $F(\alpha,x)$ jest prawie ciągłym rozwiązaniem równania translacji

/4/ $$F(F(\alpha,x),y) = F(\alpha,yx)$$

na $\Gamma\times G$, gdzie G jest grupą topologiczną półdwuzwartą i Γ jest przestrzenią Hausdorffa lokalnie dwuzwartą choć w jednym punkcie i jeżeli spełniony jest warunek tranzytywności

/5/ $$\bigwedge_{\alpha,\beta\in\Gamma}\ \bigvee_{x\in G}\left(F(\alpha,x)=\beta\right),$$

wtedy F jest jako funkcja x przekształceniem otwartym dla każdego α z Γ.

Dowód.

1. Z założenia /5/ wynika, że jeżeli e jest neutralnym elementem grupy G, to

$$F(\beta,e)=F\big(F(\alpha,x),e\big)=F(\alpha,e\,x)=F(\alpha,x)=\beta,$$

dla dowolnego β z Γ, a stąd i z /4/ mamy

$$F\big(F(\alpha,x),\,x^{-1}\big)=F(\alpha,e)=\alpha\,,$$

a więc $F(\alpha,x)$ jako funkcja α jest funkcją odwrotną do funkcji $F(\alpha,\,x^{-1})$ traktowanej też jako funkcja α. Stąd i z założenia prawie ciągłości funkcji $F(\alpha,x)$ /warunek /3/ w definicji prawie ciągłości/ wynika, że $F(\alpha,x)$ jest dla każdego x z G względem α homeomorfizmem.

Stąd i z założenia lokalnej dwuzwartości przestrzeni Γ w conajmniej jednym punkcie oraz z założenia /5/ wynika, że przestrzeń Γ jest lokalnie dwuzwarta w każdym swoim punkcie.

2. Niech α_0 będzie elementem Γ występującym w warunku /2/ definicji prawie ciągłości funkcji $F(\alpha,x)$. Mamy $\alpha_0=F(\alpha_0,e)$. Rozważmy dowolne otoczenie U elementu neutralnego e w grupie G. Wykażemy, że istnieje zbiór otwarty V taki, że $\alpha_0\in V$ i

$$V\subset F(\alpha_0,\,U). \tag{/6/}$$

W tym celu wykażemy najpierw, że do otoczenia U istnieje takie otoczenie U_1 elementu e, że

$$\bar{U}_1^{-1}\cdot\bar{U}_1\subset U. \tag{/7/}$$

Ponieważ G jest grupą topologiczną więc ([2] str.95) do otoczenia U elementu e istnieje takie otoczenie U_2 tego elementu, że

$$U_2^{-1}\cdot U_2\subset U.$$

Oznaczmy przez U_3 takie otoczenie elementu e, że

$$U_3\subset U_2^{-1}\cap U_2.$$

Ponieważ przestrzeń grupy topologicznej G jest całkowicie regularna, a więc i regularna, do otoczenia U_3 istnieje takie otoczenie U_1 elementu e, że $\bar{U}_1\subset U_3$. Stąd $\bar{U}_1\subset U_2$, a więc $\bar{U}_1^{-1}\subset U_2^{-1}$, zatem

$$\bar{U}_1^{-1}\cdot\bar{U}_1\subset U_2^{-1}\cdot U_2\subset U,$$

czyli zachodzi /7/.

Z półdwuzwartości grupy G wynika, że

$$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n,$$

gdzie G_n są zbiorami dwuzwartymi.

Rozważmy rodzinę zbiorów postaci $x U_1$, gdzie $x \in G$. Są to zbiory otwarte i pokrywające G, a więc pokrywające każdy ze zbiorów dwuzwartych G_n. Z pokrycia tego możemy wybrać pokrycie skończone dla każdego G_n. Istnieje więc ciąg elementów

/8/ $$x_1, x_2, \ldots$$

i taki ciąg rosnący liczb naturalnych m_n, że ciąg

$$x_{m_{n-1}+1} U_1, \ldots, x_{m_n} U_1$$

stanowi pokrycie zbioru G_n $(m_0 = 0)$ takie, że

/9/ $$x_v U_1 \cap G_n \neq \emptyset \quad \text{dla} \quad v = m_{n-1}+1, \ldots, m_n.$$

Rozważmy ciąg zbiorów

$$\overline{x_1 \cdot U_1} \cap G_1, \ldots, \overline{x_{m_1} \cdot U_1} \cap G_1, \overline{x_{m_1+1} U_1} \cap G_2, \ldots$$

i oznaczmy jego elementy kolejno przez $D_1, D_2, \ldots$. Ponieważ G_n jako dwuzwarte zbiory przestrzeni całkowicie regularnej, a więc przestrzeni Hausdorffa są ([2] str.75) domknięte, więc i zbiory D_m są domknięte, a więc, jako podzbiory dwuzwartych zbiorów G_n, są dwuzwarte. Ponadto rodzina zbiorów D_m stanowi pokrycie zbioru G. Zbiory

$$C_m \overset{df}{=} F(\alpha_0, D_m)$$

jako ciągłe obrazy zbiorów dwuzwartych są dwuzwarte, a więc jako podzbiory przestrzeni Hausdorffa Γ są też domknięte ([2] str.75). Ponadto z tranzytywności /5/ funkcji F wynika, że zbiory C_m pokrywają przestrzeń Γ.

Przypuśćmy, że żaden ze zbiorów C_m nie ma punktów wewnętrznych. Ponieważ - jak to wykazano w punkcie 1 dowodu - przestrzeń Γ jest lokalnie dwuzwarta w każdym swoim punkcie, a więc i w punkcie α_0, istnieje takie otoczenie V_1 tego punktu, że $\overline{V_1}$ jest zbiorem dwuzwartym. Wobec przyjętego przypuszczenia zbiór C_1 nie zawiera zbioru $\overline{V_1}$, a więc istnieje taki punkt p, że $p \in \overline{V_1}$ i $p \notin C_1$. Zbiór $\overline{V_1}$, traktowany jako przestrzeń, jest przestrzenią dwuzwartą, a jako podzbiór przestrzeni Hausdorffa sam stanowi też przestrzeń Hausdorffa. Stąd $\overline{V_1}$ jest ([2] str.75) przestrzenią normalną. Ponieważ zbiory $\overline{V_1} \cap C_1$ i $\{p\}$ są domknięte i rozłączne, istnieje więc taki zbiór otwarty V_2, zawarty w V_1 i taki, że

$$\overline{V_2} \cap C_1 = \emptyset .$$

Stosując powyższe postępowanie do zbiorów V_2 i C_2 i tak dalej, skonstruujemy ciąg otoczeń $V_1, V_2, \ldots$ czyniących zadość warunkom

/10/ $\quad V_v \supset V_{v+1}$ dla $v = 1,2,\ldots,$

/11/ $\quad \overline{V}_v$ jest zbiorem dwuzwartym,

/12/ $\quad \overline{V}_v \cap (C_1 \cup \ldots \cup C_{v-1}) = \emptyset$ dla $v = 2,3,\ldots$

Ponieważ $\overline{V}_1$ jest przestrzenią dwuzwartą, więc $\bigcap_{v=1}^{\infty} \overline{V}_v \neq \emptyset$ ([2] str.73). Wobec warunku /12/ istnieje element, który nie należy do żadnego ze zbiorów C_m, co jest sprzeczne z faktem, że zbiory C_m pokrywają przestrzeń Γ. Wynika stąd, że któryś ze zbiorów C_m ma punkt wewnętrzny.

Ponieważ

$$F(\alpha_0, x\,.\overline{U}_1) = F(F(\alpha_0, \overline{U}_1), x),$$

więc z 1 punktu dowodu wynika, że zbiór $F(\alpha_0, x\,.\overline{U}_1)$ przystaje topologicznie do zbioru $F(\alpha_0, \overline{U}_1)$.

Dla dowolnego x_n z ciągu /8/ rozważanego powyżej oznaczmy przez l taki wskaźnik, że

$$x_n \cdot \overline{U}_1 \cap G_l \neq \emptyset .$$

Wskaźnik taki istnieje wobec /9/. Mamy ponadto

$$\overline{x \cdot U_1} \subset \overline{x \cdot \overline{U}_1} = x \cdot \overline{U}_1 ,$$

a stąd

$$F(\alpha_0, x_n \overline{U}_1) \supset F(\alpha_0, \overline{x_n \cdot U_1}) \supset F(\alpha_0, \overline{x_n \cdot U_1 \cap G_l}) = F(\alpha_0, D_n) = C_n .$$

Ponieważ któryś ze zbiorów C_m ma punkt wewnętrzny, musi go mieć któryś ze zbiorów $F(\alpha_0, x_n \overline{U}_1)$, a więc musi go posiadać, przystający doń topologicznie, zbiór $F(\alpha_0, \overline{U}_1)$. Stąd istnieje takie otoczenie V_0, że

/13/ $$V_0 \subset F(\alpha_0, \overline{U}_1).$$

Dla dowolnego elementu x ze zbioru $\overline{U}_1$ mamy, wobec /7/,

$$x^{-1}.\,\overline{U}_1 \subset U ,$$

a stąd

$$F(V_0, x^{-1}) \subset F(F(\alpha_0, \overline{U}_1), x^{-1}) = F(\alpha_0, x^{-1}\,\overline{U}_1) \subset F(\alpha_0, U).$$

Zbiór $F(V_0, x^{-1})$ jest otwarty, jako obraz przez homeomorfizm zbioru otwartego V_0, a stąd zbiór

$$V = \bigcup_{x \in \overline{U}_1} F(V_0, x^{-1})$$

jest otwarty, a ponadto zachodzi /6/. Dla zakończenia dowodu wystarczy więc jeszcze tylko pokazać, że $\beta_0 \in V$. Otóż dla dowolnego β z V_0 istnieje wobec /13/ takie $\bar{x}$ z $\overline{U}_1$, że

$$\beta = F(\alpha_0, \bar{x}),$$

a stąd

$$\alpha_0 = F(\alpha_0, e) = F\left(F(\alpha_0, \bar{x}), \bar{x}^{-1}\right) = F(\beta, x^{-1}) \in V.$$

3. Wykażemy obecnie, że przy ustalonym dowolnie α z Γ funkcja $F(\alpha, x)$ zmiennej x jest otwartym przekształceniem grupy G. Wystarczy w tym celu pokazać, że jeżeli x_0 jest ustalonym elementem G, to do każdego otoczenia U tego elementu istnieje zbiór otwarty V_1 taki, że $F(\alpha, x_0) \in V_1$ i $V_1 \subset F(\alpha, U)$.

Z warunku tranzytywności /5/ wynika, że istnieje $\bar{x}$ z G, dla którego

$$F(\alpha_0, \bar{x}) = \alpha.$$

Zbiór $\bar{x}^{-1} \cdot x_0^{-1} \cdot U \cdot \bar{x}$ jest otoczeniem elementu e, a więc z drugiej części dowodu istnieje taki zbiór otwarty V, że

$$\beta_0 \in V \qquad \text{i} \qquad V \subset F(\alpha_0, \bar{x}^{-1} \cdot x_0^{-1} \cdot U \cdot \bar{x}).$$

Stąd

$$V_1 \overset{df}{=} F(V, x_0\bar{x}) \subset F\left(F(\alpha_0, \bar{x}^{-1} x_0^{-1} U \bar{x}), x_0\bar{x}\right) = F\left(F(\alpha, \bar{x}), U\right) = F(\alpha, U)$$

a ponadto V_1, jako obraz homeomorficzny zbioru otwartego V, jest zbiorem otwartym. Mamy też

$$F(\alpha, x_0) = F\left(F(\alpha_0, \bar{x}), x_0\right) = F(\alpha_0, x_0 \cdot \bar{x}) \in V_1,$$

bowiem $\alpha_0 \in V$. Dowód lematu został więc ukończony.

Dowód twierdzenia 1.

Niech

$$x \longrightarrow \left(\beta = F(\alpha, x)\right)$$

będzie przekształceniem, dzięki któremu G jest grupą przekształceń zbioru Γ. Jak wiadomo ([2] str.23) funkcja $\Psi(\xi)$ określona związkiem (1) odwzorowywuje zbiór Γ na zbiór warstw lewostronnych G/G_α grupy G względem podgrupy stabilności $G_\alpha \overset{df}{=} \Psi(\alpha) = \{ x \in G : F(\alpha, x) = \alpha \}$. Mówiąc o ciągłości Ψ mamy na myśli w G/G_α topologię indukowaną na zbiór warstw z topologii w G /zob.[2] str.99-100/, a więc wykazanie, że Ψ jest funkcją ciągłą polegać będzie na pokazaniu, że do dowolnego otoczenia V^* warstwy $\Psi(\xi_0)$ istnieje zbiór otwarty U taki, że $\xi_0 \in U$ i

/14/ $$\Psi(U) \subset V^*.$$

Zgodnie z definicją otoczenia warstwy $\Psi(\xi_0)$ zbiór V^* jest postaci $\{x \cdot G_\alpha : x \in V\}$, gdzie V jest pewnym otoczeniem w G, a ponadto

$\Psi(\xi_0) \in \{x \cdot G_\alpha : x \in V\}$, tzn. istnieje takie x_0 w V, że $\Psi(\xi_0) = x_0 \cdot G_\alpha$, czyli $x_0 \in \Psi(\xi_0)$, a więc $F(\alpha, x_0) = \xi_0$. Stąd V jest otoczeniem elementu x_0.

Przyjmijmy $U = F(\alpha, V)$. Z lematu wynika, że jest to zbiór otwarty. Ponieważ $\xi_0 = F(\alpha, x_0)$ dla $x_0 \in V$, mamy $\xi_0 \in U$. Niech $\xi \in U$, wtedy istnieje takie $\bar{x}$ z V, że $\xi = F(\alpha, \bar{x})$. Zbiór $\Psi(\xi)$ jest warstwą postaci $\bar{x}\, G_\alpha$, a więc $\Psi(\xi) \in V^*$, co dowodzi zachodzenia /14/ i kończy dowód twierdzenia 1.

§ 3. Pokażemy, że wszystkie założenia topologiczne w twierdzeniu 1 są istotne, co dowodzi zarazem, że każde z nich jest niezależne od pozostałych.

1/ Istotność założenia hausdorffowskości przestrzeni Γ wykazana została przez przykład w § 1.

2/ Niech G będzie grupą multyplikatywną liczb rzeczywistych z topologią dyskretną a Γ niech będzie zbiorem liczb rzeczywistych różnych od zera z topologią zwykłą i połóżmy

$$F(\alpha, x) = \alpha \cdot x .$$

Spełnione są wtedy wszystkie założenia twierdzenia 1 z wyjątkiem półdwuzwartości grupy G, a teza tego twierdzenia nie jest tu prawdziwa z tych samych powodów, co brak ciągłości funkcji Ψ w przykładzie w § 1.

3/ Niech G będzie addytywną grupą liczb wymiernych z topologią dyskretną a Γ niech będzie zbiorem liczb wymiernych z topologią określoną przez otoczenia zdefiniowane następująco: połóżmy

$$Z(\alpha) \overset{df}{=} \left\{\alpha + \frac{1}{k} : \ k \ \text{liczba całkowita}\right\}$$

dla $\alpha \in \Gamma$ i niech otoczeniem α będzie zbiór $(\alpha - \frac{1}{i}, \alpha + \frac{1}{i}) \setminus Z(\alpha)$ przy dowolnym i naturalnym. Połóżmy

$$F(\alpha, x) = \alpha + x .$$

Wtedy spełnione są wszystkie założenia twierdzenia 1, z wyjątkiem lokalnej dwuzwartości przestrzeni Γ w pewnym punkcie (Γ nie jest lokalnie dwuzwarta w żadnym swoim punkcie α, bowiem zbiór $Z(\alpha)$ nie ma punktów zagęszczenia ([2] str.73)), a teza spełniona nie jest. Mamy bowiem $\Psi(\xi) = \{\xi - \alpha\}$ i brak ciągłości funkcji Ψ spowodowany jest tymi samymi względami, co w przykładach poprzednich.

Pokażemy jeszcze, że warunki (2) i (3) w definicji prawie ciągłości są od siebie niezależne.

4/ Niech G będzie grupą addytywną liczb wymiernych z topologią zwykłą, Γ zbiorem liczb wymiernych z topologią dyskretną a $F(\alpha, x) = \alpha + x$. Wtedy warunek /3/ w definicji prawie ciągłości jest spełniony, a warunek /2/ nie.

5/ Przyjmijmy za G grupę addytywną liczb wymiernych z topologią dyskretną a za Γ zbiór liczb wymiernych z topologią

a/ dyskretną, dla liczb większych od $\sqrt{2}$,

b/ zwykłą, dla liczb mniejszych od $\sqrt{2}$

i niech $F(\alpha, x) = \alpha + x$. Jest wtedy spełniony warunek /2/ /przy dowolnym α_0 z Γ/ w definicji prawie ciągłości, natomiast warunek /3/ spełniony nie jest /przy zadanym $x > 0$ funkcja ta nie jest ciągła względem α w punkcie α_0 takim, że $\alpha_0 < \sqrt{2}$ oraz $\alpha_0 + x > \sqrt{2}$/.

§ 4. Udowodnimy obecnie następujące twierdzenie 2. będące zastosowaniem twierdzenia 1 do teorii równania translacji

- przy założeniach lematu funkcja F jest ciągła na $\Gamma \times G$.

Dowód. Wiadomo /zob. np. [4]/, że ogólne rozwiązanie translacji przy warunku tranzytywności /5/ jest postaci

/15/ $$F(\alpha, x) = \Psi^{-1}(x\,\Psi(\alpha)),$$

gdzie $$\Psi(\alpha) \overset{df}{=} \{x \in G : F(\alpha_0, x) = \alpha\}$$

dla dowolnego ustalonego α_0 z Γ. Ustalmy α_0 na występującym w założeniu /2/ definicji prawie ciągłości funkcji F i przyjmijmy w związku /15/ $\alpha = \alpha_0$. Z ciągłości $F(\alpha_0, x)$ względem x w dowolnym punkcie grupy G wnioskujemy stąd z łatwością o ciągłości funkcji Ψ /bez założeń topologicznych o Γ i G !/. Z twierdzenia 1 wynika, że Ψ jest też funkcją ciągłą, a stąd oraz z /15/ i z tego, że G jest grupą topologiczną wynika ciągłość funkcji F na $\Gamma \times G$.

Uwaga. Z przeprowadzonego rozumowania i z przykładu 5/ wynika, że z ciągłości funkcji Ψ^{-1} nawet przy założeniach topologicznych o Γ i G, występujących w twierdzeniu 2, nie wynika ciągłość funkcji Ψ. Ciągłość funkcji Ψ^{-1} wynika już bowiem z warunku /2/ w definicji prawie ciągłości, a ciągłość funkcji Ψ wobec /15/ pociągałaby warunek /3/ w tej definicji.

Wskażemy obecnie na pewne zastosowania poznanych twierdzeń w topologii i w teorii obiektów geometrycznych, wypowiadając je w języku tych teorii.

Twierdzenie 3. Jeżeli dla lokalnie dwuzwartej choć w jednym punkcie przestrzeni Hausdorffa Γ istnieje tranzytywna, prawie ciągła i półdwuzwarta grupa G transformacji tej przestrzeni, to Γ jest przestrzenią jednorodną topologiczną /espace homogène topologique [1] str.24) odpowiadającą grupie topologicznej G, w szczególności Γ jest przestrzenią całkowicie regularną a G jest ciągłą grupą przekształceń przestrzeni Γ.

Jeżeli $\Gamma(\alpha, x)$ jest tranzytywnym obiektem geometrycznym abstrakcyjnym, prawie ciągłym na $\Gamma \times G$, gdzie Γ jest lokalnie dwuzwartą w pewnym punkcie przestrzenią Hausdorffa a G jest półdwuzwartą grupą topologiczną, to F jest obiektem regularnym ([3] str.44), tzn. F jest funkcją ciągłą i dla każdego α z Γ funkcja $F(\alpha, x)$ jest względem x przekształceniem otwartym.

P r a c e c y t o w a n e

[1] N. B o u r b a k i, Eléments de Mathématique, Livre III, Chapitres 3 et 4, 1960.

[2] L.S. P o n t r i a g i n, Grupy topologiczne, 1961.

[3] A. Z a j t z, Über die Äquivalenz der geometrischen Objekte, Ann.Pol.Math. XX, 1968, str.41-50.

[4] Z. M o s z n e r, Solution générale de l'équation de translation et ses applications, Aequationes Math. 1,3; 1968, str.291-293.

[5] Z. M o s z n e r, Sur un théorème de la théorie des groupes continus des transformations, Compt.Rend. de l'Acad. des Sciences de Paris, 268, 1969, str.769-771.

[6] Z. M o s z n e r, O pewnym twierdzeniu z teorii ciągłych grup przekształceń, w druku w Zeszytach Naukowych Politechniki Wrocławskiej.

R é s u m é

Sur un théorème de la théorie des groupes continus des transformations

On corrige dans la note un théorème au sujet des groupes continus des transformations qui se trouve dans le livre [2] p.139. On montre aussi qu'elles sont essentielles toutes les suppositions du théorème corrigé et on donne des applications du théorème en question dans la thèorie de l'équation de translation, dans la théorie des objets géometriques et dans la topologie. Les resultats de cette note sont signales dans [5] et [6].

Р е з ю м е

О НЕКОТОРОЙ ТЕОРЕМЕ ИЗ ТЕОРИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В работе исправлено некоторую теорему на тему непрерывных групп преобразований, изложенную в книге [2] , стр. 139. Доказывается, что все предположения этой исправленной теоремы существенны и приводятся некоторые применения рассматриваемой теоремы к теории уравнения сдвига, к теории геометрических объектов, а также к топологии. О результатах этой работы упоминалось в [5] и [6] .