ROCZNIK NAUKOWO – DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE

Zeszyt 41 Prace matematyczne VI Rok 1970

Zenon Moszner, Zbigniew Powązka

WPŁYW REGULARNOŚCI FUNKCJI $|f(x)|$ NA REGULARNOŚĆ FUNKCJI $f(x)$

W pracy [2] udowodniono następujący lemat:
Jeżeli dla pewnej naturalnej liczby k funkcja $|f(x)|$ jest klasy C^{2k-1} w punkcie x_0 oraz funkcja $f(x)$ jest klasy C^{2k-2} w pewnym otoczeniu punktu x_0, to funkcja $f(x)$ jest klasy C^{2k-1} w punkcie x_0.

Po tym lemacie pokazano, że założenie klasy C^{2k-2} funkcji $f(x)$ w otoczeniu punktu x_0 jest istotne dla $k = 1$. Skonstruowano tam przykład funkcji ciągłej w punkcie $x_0 = 0$, której moduł jest klasy C^{∞} w całej swej dziedzinie i nie mającej pochodnej w punkcie $x_0 = 0$.

Nasuwa się pytanie czy dla dowolnego naturalnego k większego od 1 można podać przykład funkcji $f(x)$ spełniającej warunki powyższego przykładu czyli warunki następujące:

1/ $|f(x)|$ jest klasy C^{2k-1} w punkcie x_0,

2/ $f(x)$ ma w każdym punkcie pewnego otoczenia Δ punktu x_0 pochodną rzędu $2k - 2$ ciągłą w punkcie x_0,

3/ $f(x)$ nie jest klasy C^{2k-1} w punkcie x_0.

W pierwszej części niniejszej pracy pokażemy, że takiego przykładu skonstruować nie można, co wynika bezpośrednio z powyższego twierdzenia oraz twierdzenia 1 udowodnionego poniżej.

W części drugiej pokażemy, że dla istnienia pochodnej rzędu $2k - 1$ funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 wystarczy, by funkcja $|f(x)|$ miała w punkcie x_0 pochodną rzędu $2k - 1$ i by funkcja $f(x)$ miała pochodną rzędu $2k - 2$ w pewnym otoczeniu tego punktu /twierdzenie 2/.

Praca przynosi więc pewne wyniki dotyczące regularności funkcji wewnętrznej, gdy znane są regularności złożenia i funkcji zewnętrznej /zob. z tego cyklu np. praca [1]/.

1. Udowodnimy

Twierdzenie 1

Jeżeli dla pewnego k naturalnego większego od 1 funkcja $|f(x)|$ ma pochodną rzędu $2k-1$ w każdym punkcie pewnego otoczenia punktu x_0 i jeżeli funkcja $f(x)$ ma pochodną rzędu $2k-2$ w każdym punkcie pewnego otoczenia punktu x_0, to $f(x)$ jest klasy C^{2k-2} w otoczeniu punktu x_0.

Dla dowodu wykażemy

Lemat

Jeżeli Δ' jest takim otoczeniem punktu x_0, w którym istnieje $|f(x)|^{(2k-2)}$ oraz $f^{(2k-2)}(x_0)$, to dla każdego x z Δ' spełniony jest związek

$$/1/ \qquad |f(x)|^{(\lambda)} = \varepsilon(x) f^{(\lambda)}(x), \quad \text{gdzie} \quad \varepsilon^2(x) = 1 \quad \text{i} \quad \lambda = 1,2,\dots 2k-2.$$

Dowód

Niech $x_1 \in \Delta'$. Gdy $f(x_1) \neq 0$, to teza lematu jest oczywista, gdyż wtedy w pewnym otoczeniu punktu x_1 mamy $|f(x)| = f(x)$ lub $|f(x)| = -f(x)$ czyli $\varepsilon(x) = 1$ lub $\varepsilon(x) = -1$.

Gdy $f(x_1) = 0$, to rozważymy dwa przypadki:

A/ punkt x_1 jest izolowanym zerem funkcji $f(x)$,

B/ punkt x_1 jest punktem skupienia zer funkcji $f(x)$ x/.

Ad A. Mamy tu dwie możliwości:

A_1) funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_1 ekstremum lokalne,

A_2) funkcja $f(x)$ przy przejściu przez punkt x_1 zmienia znak.

Jeżeli zachodzi A_1, to $|f(x)| = f(x)$ w pewnym otoczeniu punktu x_1 lub $|f(x)| = -f(x)$ w pewnym otoczeniu punktu x_1, a więc teza lematu jest oczywista.

Jeżeli zachodzi A_2, to dla x dostatecznie bliskich x_1 mamy $|f(x)| = f(x)$ dla $x < x_1$ lub $|f(x)| = -f(x)$ dla $x < x_1$, co daje tezę lematu.

Ad B. Jeżeli x_1 jest punktem skupienia zer funkcji $f(x)$, to z twierdzenia Rolle'a wynika, że w punkcie x_1 znikają wszystkie pochodne funkcji f co najmniej do rzędu $2k-2$. Analogiczna uwaga odnosi się do funkcji $|f(x)|$, a stąd

$$/2/ \qquad |f(x)|^{(\lambda)}_{x_1} = f^{(\lambda)}(x_1) = 0 \qquad \text{dla } \lambda = 1,2,\dots, 2k-2.$$

W ten sposób teza lematu została udowodniona. Przechodzimy obecnie do dowodu twierdzenia 1.

Niech Δ będzie takim otoczeniem punktu x_0, w którego każdym punkcie $|f(x)|$ ma pochodną aż do rzędu $2k-1$ zaś $f(x)$ pochodną rzędu $2k-2$ i niech x_1 będzie dowolnym punktem z tego otoczenia.

x/ Pomysł rozważenia takich przypadków jak i zastosowania twierdzenia Rolle'a w przypadku B podsunął nam S. Wołodźko.

Jeżeli $f(x_1) \neq 0$, to na podstawie ciągłości funkcji f teza twierdzenia jest oczywista. Niech więc $f(x_1) = 0$.
Dla dowodu twierdzenia rozpatrzymy podobne przypadki A i B jak przy dowodzie lematu.

Ad A. Jeżeli x_1 jest zerem izolowanym funkcji $f(x)$, to zachodzą podprzypadki A_1 lub A_2 z dowodu lematu.
W przypadku A_1 w pewnym otoczeniu punktu x_1 jest $f(x) = |f(x)|$ lub w pewnym otoczeniu punktu x_1 jest $f(x) = -|f(x)|$, co na podstawie założeń twierdzenia kończy dowód.
Jeżeli zachodzi A_2 to dla x dostatecznie bliskich x_1 mamy:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{gdy } x < x_1, \\ -f(x) & \text{gdy } x > x_1, \end{cases} \quad \text{lub} \quad |f(x)| = \begin{cases} -f(x) & \text{dla } x < x_1, \\ f(x) & \text{dla } x > x_1. \end{cases}$$

Wobec powyższego i założeń twierdzenia otrzymujemy dla dowolnego $\mu = 0,1,2,\ldots, 2k-3$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|f(x)|^{(\mu)}_{x_1+h} - |f(x)|^{(\mu)}_{x_1}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f^{(\mu)}_{(x_1+h)} - f^{(\mu)}_{(x_1)}}{h}$$

i

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|f(x)|^{(\mu)}_{x_1+h} - |f(x)|^{(\mu)}_{x_1}}{h} = -\lim_{h\to 0^+} \frac{f^{(\mu)}_{(x_1+h)} - f^{(\mu)}_{(x_1)}}{h},$$

lub

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|f(x)|^{(\mu)}_{x_1+h} - |f(x)|^{(\mu)}_{x_1}}{h} = -\lim_{h\to 0^-} \frac{f^{(\mu)}_{(x_1+h)} - f^{(\mu)}_{(x_1)}}{h}$$

i

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|f(x)|^{(\mu)}_{x_1+h} - |f(x)|^{(\mu)}_{x_1}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f^{(\mu)}_{(x_1+h)} - f^{(\mu)}_{(x_1)}}{h}.$$

Z równości (3) i (4) i faktu, że w x_1 istnieją pochodne funkcji $f(x)$ i $|f(x)|$ aż do rzędu $2k - 2$ wynika, że

/5/ $$|f(x)|^{(\mu+1)}_{x_1} = f^{(\mu+1)}(x_1) = 0 \quad \text{gdy} \quad \mu = 0,1,2,\ldots,2k-3.$$

Funkcja $|f(x)|$ ma w każdym punkcie otoczenia Δ, a więc w punkcie x_1 pochodną rzędu $2k - 1$, a stąd pochodna rzędu $2k - 2$ rozważanej funkcji w tym punkcie jest ciągła. Zachodzi więc

$$\lim_{x\to x_1} |f(x)|^{(2k-2)} = |f(x)|^{(2k-2)}_{x_1} = 0.$$

Na podstawie lematu w rozważanym otoczeniu spełniony jest związek /1/. Wobec tego

$$\lim_{x \to x_1} \varepsilon(x) f^{(2k-2)}(x) = 0,$$

czyli wobec ograniczoności funkcji $\varepsilon(x)$

$$\lim_{x \to x_1} f^{(2k-2)}(x) = 0.$$

Istnieje więc granica pochodnej rzędu $2k-2$ funkcji $f(x)$ w punkcie x_1 i jest równa wartości funkcji w tym punkcie, co dowodzi ciągłości funkcji $f^{(2k-2)}(x)$ w punkcie x_1.

Ad B. W tym przypadku na mocy dowodu lematu zachodzi wzór (2), a co za tym idzie i wzór (5). Dowód jest więc identyczny jak w przypadku A. Tak więc dowód twierdzenia 1 został zakończony.

2. Nasuwa się pytanie o ile można osłabić założenie rozważanego we wstępie lematu z pracy [2], gdyby chodziło nie o klasę C^{2k-1}, a tylko o istnienie pochodnej rzędu $2k-1$ funkcji $f(x)$ w punkcie x_0. W odpowiedzi na to pytanie udowodnimy:

Twierdzenie 2

Jeżeli funkcja $|f(x)|$ ma w punkcie x_0 pochodną rzędu $2k-1$ oraz funkcja $f(x)$ ma w pewnym otoczeniu punktu x_0 pochodną rzędu $2k-2$, to funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 pochodną rzędu $2k-1$.

Dowód. Jeżeli $f(x_0) \neq 0$, to na mocy ciągłości funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 teza twierdzenia jest oczywista.

Niech $f(x_0) = 0$. Rozważamy w punkcie x_0 przypadki A i B tak, jak w dowodzie lematu. W przypadku A, gdy zachodzi przypadek A_1 otrzymujemy rozumując jak w dowodzie lematu wniosek o istnieniu pochodnej rzędu $2k-1$ w punkcie x_0. W przypadku A, gdy zachodzi A_2 i w przypadku B rozumujemy w sposób następujący.

Rozwijając funkcję $|f(x)|$ w szereg Taylora aż do rzędu $2k-2$ w punkcie x_0 przy dostatecznie małych h dostajemy

$$|f(x_0+h)| = \frac{h^{2k-2}}{(2k-2)!} \left| f(x) \right|^{(2k-2)}_{x_0+\theta h}, \quad \text{gdzie } 0<\theta<1.$$

Stąd

$$|f(x)|^{(2k-2)}_{x_0+\theta h} > 0,$$

a dalej wobec dowolności znaku h:

$$|f(x)|^{(2k-1)}_{x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{|f(x)|^{(2k-2)}_{x_0+\theta h}}{\theta h} = 0.$$

Na mocy lematu mamy stąd

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varepsilon(x_0+h)\cdot f^{(2k-2)}(x_0+h)}{h} = 0,$$

czyli

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{(2k-2)}(x_0+h) - f^{(2k-2)}(x_0)}{h} = 0,$$

skąd $\quad f^{(2k-1)}(x_0) = 0,$

co kończy dowód twierdzenia 2.

Przez analogię do rozważań, które doprowadziły do twierdzenia 1 nasuwają się w stosunku do twierdzenia 2 dwa pytania, a mianowicie:

1. Czy twierdzenie 2 pozostanie prawdziwe, jeżeli rząd nieparzysty pochodnej zastąpimy rzędem parzystym, tzn. rzędy pochodnych w nim występujących obniżymy o 1?
2. Czy można w twierdzeniu 2 założenie istnienia pochodnej $f^{(2k-2)}(x)$ w pewnym otoczeniu punktu x_0 ograniczyć tylko do istnienia tej pochodnej w punkcie x_0?

Odpowiedź na pierwsze z wyżej wymienionych pytań jest negatywna, o czym świadczy następujący

Przykład 1

Rozważmy dla dowolnej liczby naturalnej l funkcję

$$f(x) = \begin{cases} x^{2l} & \text{dla} \quad x \geqslant 0, \\ -x^{2l} & \text{dla} \quad x < 0. \end{cases}$$

Funkcja $|f(x)|$ jest klasy C^{∞} dla każdego x. Funkcja $f(x)$ jest w punkcie $x_0 = 0$ klasy C^{2l-1}, nie ma natomiast w tym punkcie pochodnej rzędu $2l$.

Zauważmy, że na drugie z postawionych pytań dla $k = 1$ odpowiedź jest pozytywna, bowiem gdy $f(x_1) = 0$, to zachodzi związek

$$f'(x_1) = |f(x)|'_{x_1} = 0.$$

Okazuje się jednak, że gdy $k > 1$ odpowiedź na rozważane pytanie jest negatywna. Fakt ten wynika z następującego

Przykładu 2

W każdym z przedziałów $\left[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}\right]$ dla $i = 1, 2, \ldots,$ obieramy środek S_i oraz pewne /dostateczne małe tak, by mogły być spełnione poniższe warunki b/ i c// otoczenie P_i tego środka o domknięciu zawartym w przedziale $\left(\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}\right)$. W każdym przedziale P_i zlepiamy ze sobą w środku S_i dwie krzywe o równaniach

$$y_1 = \left[x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i+1} + \frac{1}{i}\right)\right]^{2k-2} \quad \text{oraz} \quad y_2 = -\left[x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i+1} + \frac{1}{i}\right)\right]^{2k-2}$$

/k dowolne naturalne większe od 1/, przy czym jeżeli i jest liczbą nieparzystą, to robimy to podobnie jak w przykładzie 1, jeżeli zaś i jest liczbą parzystą, to funkcje y_1, y_2 umieszczone jak w przykładzie 1 odbijamy symetrycznie w osi x.

Tak otrzymane krzywe uzupełniamy do wykresu funkcji $f(x)$ określonej na przedziale $[0,1]$ i spełniającej w przedziale $(0,1)$ warunki następujące:

a/ $f(x)$ jest klasy C^∞ z wyjątkiem punktów S_i dla $i = 1,2,\ldots$,

b/ $f(x)$ jest klasy C^∞ oraz pochodna $|f(x)|^{(\nu)}$ są ograniczone dla $\nu = 0,1,2,\ldots 2k-1$,

c/ pochodne $f^{(\nu)}(x)$ są ograniczone dla $\nu = 0,1,2,\ldots, 2k-3$.

Funkcja $F(x) = x^{2k} f(x)$ ma następujące własności: $|F(x)|$ jest klasy C^{2k-1} w punkcie 0, $F(x)$ ma w punkcie 0 pochodną rzędu $2k-2$, nie mając tej pochodnej w otoczeniu tego punktu /nie ma jej bowiem w punktach S_i/, a stąd $F(x)$ nie ma w punkcie 0 pochodnej rzędu $2k-1$.

Prace cytowane

[1] A. Hoborski, Über die Ableitung zusammengezetzter Funktionen, Mathematica 7 /1933/, str.32-37.

[2] Z. Moszner, I. Lawera, Twierdzenia dotyczące regularności krzywych położonych na powierzchni II, Rocznik Naukowo-Dydaktyczny WSP w Krakowie nr 31 /1968/, str.27-36.

Resumé

L'influence de la régularité de la fonction $|f(x)|$ sur la régularité de la fonction $f(x)$

On a démontré dans la note les deux théorèmes suivants.

1. Si pour un k entier plus grand que 1 la fonction $|f(x)|$ a la dérivée d'ordre $2\cdot k-1$ en chaque point d'un entourage d'un point x_0 et $f(x)$ a la dérivée d'ordre $2\cdot k-2$ en chaque point d'un entourage du point x_0, dans ce cas $f(x)$ est de la classe C^{2k-2} dans un entourage du point x_0.
2. Si la fonction $|f(x)|$ a la dérivée d'ordre $2\cdot k-1$ en point x_0 et la fonction $f(x)$ a la dérivée d'ordre $2\cdot k-2$ dans un entourage du point x_0, alors $f(x)$ a la dérivée d'ordre $2\cdot k-1$ en point x_0.

On a montre aussi qu'on ne peut pas remplaçer pour $k>1$ dans le théorème 2 de la supposition que $f(x)$ possède la dérivée d'ordre $2\cdot k-2$ dans un entuorage du point x_0 par la supposition qu'il existe $f^{(2k-2)}(x_0)$.

Резюме

ПОСТУПЛЕНИЕ РЕГУЛЯРНОСТИ ФУНКЦИИ $|f(x)|$ НА РЕГУЛЯРНОСТЬ ФУНКЦИИ $f(x)$

В работе доказаны следующие две теоремы:

Теорема I

Если для некоторого натурального $k>1$ функция $|f(x)|$ имеет производную $2k-1$ ряда в любой точке некоторой окрестности точки x_0 и если $f(x)$ имеет производную $2k-2$ ряда в любой точке некоторой окрестности точки x_0, то $f(x)$ является C^{2k-2} в некоторой окрестности точки x_0.

Теорема 2

Если функция $|f(x)|$ имеет в точке x_0 производную $2k-1$ ряда и функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 производную $2k-2$ ряда, то она имеет в точке x_0 производную $2k-1$ ряда.

Указано также, что в теореме 2 предложение обладания через функцию $f(x)$ производной $2k-2$ ряда в некоторой окрестности точки x_0 невозможно при $k>1$ заменить предложением существования $f^{(2k-2)}(x_0)$.