ROCZNIK NAUKOWO - DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE

Zeszyt 41 Prace matematyczne VI Rok 1970

Adam Piprek-Płocki

MACIERZ KORELACJI INFORMACYJNEJ I JEJ PEWNE WŁASNOŚCI

Niech składowymi n-wymiarowego wektora losowego X będą zmienne losowe dyskretne $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Niech x_i /dla $i = 1,2,\ldots,n$/ oznacza proces losowy określony dystrybuantą zmiennej losowej X_i.
Oznaczmy poprzez pewną analogię do oznaczeń przyjętych w [3] i dla uproszczeń zapisu

$$h_{ii} = J(x_i, x_i) = H(x_i),$$

$$h_{ij} = J_{-i-j}(x_i, x_j),$$

gdzie $-i-j$ oznacza koniunkcję procesów losowych $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ /dla $i < j$/.
Nazwijmy macierzą korelacji informacyjnej wektora losowego $X(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ macierz:

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \ldots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \ldots & h_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n1} & h_{n2} & \ldots & h_{nn} \end{bmatrix}.$$

Macierz ta, jak łatwo zauważyć jest macierzą symetryczną. W pracy [2] nazwano $k_{x_i x_j} = \frac{h_{ij}}{\sqrt{h_{ii} h_{jj}}}$ stosunkiem korelacji informacyjnej procesów losowych x_i, x_j /dla $i,j = 1,2,\ldots,n$/.
Macierz

$$K_{XX} = \begin{bmatrix} k_{x_1x_1} & k_{x_1x_2} & \ldots & k_{x_1x_n} \\ k_{x_2x_1} & k_{x_2x_2} & \ldots & k_{x_2x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{x_nx_1} & k_{x_nx_n} & \ldots & k_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$

nazwiemy unormowaną macierzą korelacji informacyjnej wektora losowego X. Z definicji stosunku korelacji informacyjnej wynika

<u>Twierdzenie 1</u>. Jeżeli składowe $X_1, X_2, \dots, X_n$ wektora losowego X są parami niezależne, to K_{XX} jest macierzą jednostkową.

Rozważmy wektory losowe $X(X_1, X_2, \dots, X_n)$ i $Y(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$. Niech $p_{ij} = p_{x_i y_j}$ /$i = 1,2,\dots,n$; $j = 1,2,\dots,m$/ oznacza zdefiniowany w [2] współczynnik ścieżki.

Oznaczmy macierz współczynników ścieżek

$$P_{XY} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nm} \end{bmatrix}.$$

Niech P^T_{XY} oznacza transpozycję macierzy P_{XY}.

Niech $k_{ij} = k_{x_i y_j}$ /$i = 1,2,\dots,n$; $j = 1,2,\dots,m$/ oznacza zdefiniowany w [2] stosunek korelacji informacyjnej procesów losowych x_i oraz y_j. Macierz odpowiednich stosunków korelacji informacyjnej

$$K_{XY} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nm} \end{bmatrix}$$

nazwiemy unormowaną macierzą korelacji informacyjnej wektorów losowych X i Y.

<u>Twierdzenie 2</u>. Niech składowe $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ wektora losowego Y będą parami niezależne i niech procesy losowe $y_1, y_2, \dots, y_m$ będą przyczynkami procesów losowych $x_1, x_2, \dots, x_n$. Wówczas:

a/ $K_{XX} = P_{XY} \cdot P^T_{XY}$,

b/ $K_{XX} = K_{XY} \cdot P^T_{XY}$,

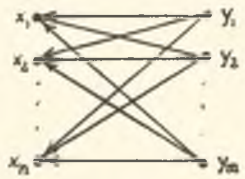
c/ $K_{XY} = P_{XY}$.

<u>Dowód</u>. Ad a/. Dla $i = j$ wyraz b_{ij} macierzy $[b_{ij}] = P_{XY} \cdot P^T{}_{XY}$ jest równy $b_{ii} = p_{i1} \cdot p_{i1} + p_{i2} \cdot p_{i2} + \dots + p_{im} \cdot p_{im} = 1$.

Dla $i \neq j$ mamy $b_{ij} = p_{i1}\, p_{j1} + p_{i2}\, p_{j2} + \dots + p_{im}\, p_{jm} = k_{x_i x_j}$.

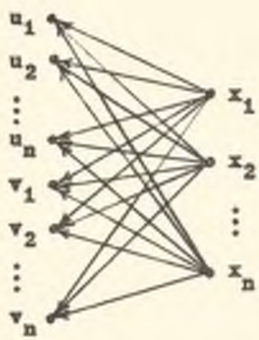
Wobec założeń jest $k_{x_i y_j} = p_{x_i y_j}$ co kończy dowód związków 2b/ i 2c/.

Schemat określony założeniami twierdzenia 2 przedstawiony jest grafem na rys.1.



Rys.1

Rozważmy n-wymiarowe wektory losowe X,U,V.
Niech odpowiednio U_i i V_i oznacza i-tą składową wektora U i V. Niech według przyjętej w [2] terminologii procesy $x_y,x_2,\dots,x_n$ będą niezależnymi przyczynami procesów losowych u_i i v_j /dla $i = 1, 2,\dots,n$ oraz $j = 1,2,\dots,n$/.
Rysunek 2a przedstawia odpowiedni graf, a rysunek 2b jego skróconą postać.



Rys.2a

Rys.2b

Przy powyższych założeniach zachodzi

Twierdzenie 3. $K_{UV} = P_{UX}\cdot P_{VX}^T$.

Dowód. Wyraz a_{ij} macierzy $[a_{ij}] = P_{UX}\cdot P_{VX}^T$ ma postać

$$a_{ij} = p_{u_i x_1} p_{v_j x_1} + p_{u_i x_2} p_{v_j x_2} + \dots + p_{u_i x_n} p_{v_j x_n} = k_{u_i v_j} .$$

Wyraz b_{ij} macierzy $[b_{ij}] = K_{UV}$ jest równy $k_{u_i v_j}$ co należało stwierdzić.

Rozważmy czwórkę n-wymiarowych wektorów losowych X,Y,U,V. X_i,Y_i,U_i,V_i niech oznaczają i-te składowe odpowiednio wektorów X,Y,U i V. Niech składowe $X_1,X_2,\dots,X_n,Y_1,Y_2,\dots,Y_n$ będą parami niezależne i niech procesy losowe x_i i y_j /dla $i,j = 1,2,\dots,n$/ będą przyczynami procesów u_k i v_l /dla $k,l = 1,2,\dots,n$/. Ilustruje ten schemat graf na rys. 3. Zachodzi wówczas

Twierdzenie 4. $K_{UV} = P_{UX} \cdot P_{VX}^T + P_{UY} \cdot P_{VY}^T$.

Dowód. Wyraz ogólny a_{ij} macierzy $P_{UX} \cdot P_{VX}^T$ jest równy

$$a_{ij} = p_{u_i x_1} p_{v_j x_1} + p_{u_i x_2} p_{v_j x_2} + \dots + p_{u_i x_n} p_{v_j x_n} .$$

Z kolei dla macierzy $P_{UY} \cdot P_{VY}^T$ wyraz ogólny b_{ij} wynosi

$$b_{ij} = p_{u_i y_1} p_{v_j y_1} + p_{u_i y_2} p_{v_j y_2} + \dots + p_{u_i y_n} p_{v_j y_n},$$

a więc

$$a_{ij} + b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \left(p_{u_i x_k} p_{v_j x_k} + p_{u_i y_k} p_{v_j y_k} \right) = k_{u_j y_j} ,$$

co należało stwierdzić.

Uogólnieniem twierdzenia 4 jest następujące

Twierdzenie 4a. Rozważmy wektory $X^1(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$, $X^2(x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2)$, ..., $X^m(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m)$, których składowe $x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1, x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2, \dots, x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m$ są parami niezależne. Niech procesy losowe x_i^k /dla $i = 1,2,\dots,n$ oraz $k = 1,2,\dots,m$/ będą przyczynami procesów losowych u_j oraz v_l /dla $j,l = 1,2,\dots, n$/, gdzie u_j jest procesem losowym określonym dystrybuantą zmiennej losowej V_l.

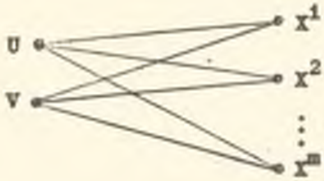
Zachodzi wówczas równość:

$$K_{UV} = \sum_{s=1}^{m} P_{UX^s} \cdot P_{VX^s}^T .$$

Dowód analogiczny jak dla twierdzenia 4.

Schemat określony założeniami twierdzenia 4a przedstawia rys.4.

Rys.3



Rys.4

Twierdzenia powyższe mogą znaleźć zastosowanie przy badaniu kanałów informacyjnych.

P r a c e   c y t o w a n e

[1] J. B u r z y ń s k i, A simple explanation of the method of path coefficients, Archiwum Górnictwa, t.VI, z.2, 1961.

[2] A. P i p r e k-P ł o c k i, O ścieżkowej strukturze entropii, Rocznik Naukowo-Dydaktyczny WSP w Krakowie, z.31, Prace Matematyczne V.

[3] W.S. P u g a c z e w, Teoria funkcji przypadkowych i jej zastosowanie do zagadnień sterowania automatycznego, MON, 1960.

S u m m a r y

Information correlation matrix and some of its propertien

In this report a definition of path factors matrix and information correlation ratios matrix /see [2]/ for let vectors with by pairs independent components is given, and some theorems /2,3,4/ concerning these matrices are formulated.

Р е з ю м е

МАТРИЦА ИНФОРМАЦИОННОЙ КОРРЕЛЯЦИИ И ЕЕ НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА

В работе определено для лотерейных векторов с парами независимыми составляющими матрица коэффициентов дорожеек, а также матрица отношений информационной корреляции см. [2] и сформулированы некоторые теоремы 2,3,4 относящиеся к этим матрицам.