ROCZNIK NAUKOWO - DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE

Zeszyt 41 Prace matematyczne VI Rok 1970

Józef Tabor

STRUKTURA OGÓLNEGO ROZWIĄZANIA RÓWNANIA TRANSLACJI NA GRUPOIDZIE EHRESMANNA ORAZ ROZKŁADY NIEZMIENNICZE TEGO GRUPOIDU

Wstęp

Praca ta składa się z 5 rozdziałów.

W rozdziale I /wprowadzającym/ przypomnimy definicje grupoidów Brandta i Ehresmanna oraz zacytujemy pewne twierdzenia dotyczące tych grupoidów, z których skorzystamy w następnych rozdziałach.

W rozdziale II podamy konstrukcję wszystkich rozkładów niezmienniczych ustalonego grupoidu Brandta i grupoidu Ehresmanna. Konstrukcja ta będzie najpierw podana w przypadku pewnego szczególnego grupoidu Brandta, następnie uzyskane wyniki zostaną przeniesione na dowolny grupoid Brandta a w końcu na grupoid Ehresmanna.

W rozdziale III podamy ogólne rozwiązanie równania translacji na grupoidzie Brandta i Ehresmanna. Podobnie jak w rozdziale II problem ten będzie rozwiązywany etapami: najpierw podamy ogólne rozwiązanie równania translacji na pewnym szczególnym grupoidzie Brandta /tym samym co poprzednio/, następnie - na dowolnym grupoidzie Brandta, a w końcu na grupoidzie Ehresmanna. W rozdziale tym podamy też pewne wnioski wynikające bezpośrednio z ogólnego rozwiązania.

W rozdziale IV wprowadzimy pojęcie topologicznego grupoidu Ehresmanna oraz udowodnimy pewne twierdzenia dotyczące przeniesienia wybranych własności grup topologicznych na grupoidy topologiczne. Udowodnimy też pewne zależności zachodzące między grupą topologiczną a odpowiednim grupoidem topologicznym Brandta.

Rozważania przeprowadzone w rozdziale V dotyczą znalezienia pewnych warunków koniecznych i pewnych warunków dostatecznych na to, by spełniające warunek tożsamości rozwiązanie równania translacji na topologicznym grupoidzie Brandta było ciągłe.

Chciałbym serdecznie podziękować Panu Prof.dr Z. Mosznerowi za trud wielokrotnego przeglądnięcia pracy i szereg cennych, poczynionych przy tej okazji, rad i wskazówek.

I. Wprowadzenie

Przyjmijmy za Waliszewskim /[14] str.6/ następującą definicję grupoidu:

Definicja 1. Rozważmy parę $(C,\cdot)$ gdzie C oznacza zbiór, a "." operację binarną w tym zbiorze. Przez R oznaczmy dziedzinę tej operacji. Niech C_0 będzie zdefiniowane następująco:

$$C_0 \overset{df}{=} \{e : e\in C \wedge (e,e)\in R \wedge e\cdot e = e\}.$$

Parę $(C\ \cdot)$ nazywać będziemy grupoidem, jeśli spełnione są następujące aksjomaty:

(I.1) $\bigwedge\limits_{x,y,z} \big(((x,y)\in R \wedge (y,z)\in R) \Longrightarrow (x,y\ z)\in R\big)$,

(I.2) $\bigwedge\limits_{x,y,z} \big(((x,y)\in R \wedge (y,z)\in R) \Longrightarrow (x,y,z)\in R\big)$,

(I.3) $\bigwedge\limits_{x,y,z} \big(((y,z)\in R \wedge (x,y,z)\in R) \Longrightarrow (x,y)\in R\big)$,

(I.4) $\bigwedge\limits_{x,y,z} \big(((x,y)\in R \wedge (x.y,z)\in R) \Longrightarrow (y,z)\in R\big)$,

(I.5) $\bigwedge\limits_{x,y,z} \big((x,y)\in R \wedge (y,z)\in R \wedge (x.y,z)\in R \wedge (x,y.z)\in R\big) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow (x.y).\ z = x(y.z)\big)$,

(I.6) $\bigwedge\limits_{x,y,z} \big(((x,y)\in R \wedge (x,z)\in R \wedge x.y = x.z) \Longrightarrow y = z\big)$,

(I.7) $\bigwedge\limits_{x,y,z} \big(((y,x)\in R \wedge (z,x)\in R \wedge y\cdot x = z\cdot x) \Longrightarrow y = z\big)$,

(I.8) $\bigwedge\limits_{x\in C}\ \bigvee\limits_{y\in C} \big((x,y)\in R \wedge x.y\in C_0\big)$.

W oparciu o powyższą definicję łatwo wykazać /[14] str.6-7/, że w grupoidzie spełnione są następujące warunki:

(I.9) $\bigwedge\limits_{e\in C_0}\ \bigwedge\limits_{x\in C} \big(((x,e)\in R \Longrightarrow x\cdot e = x) \wedge ((e,x)\in R \Rightarrow e\ x = x)\big)$,

(I.10) $\bigwedge\limits_{x\in C}\ \bigwedge\limits_{e_1,e_2\in C_0} \big(((x,e_1)\in R \wedge (x,e_2)\in R) \Rightarrow e_1 = e_2\big)$,

(I.11) $\bigwedge\limits_{x\in C}\ \bigwedge\limits_{e_1,e_2\in C_0} \big(((e_1,x)\in R \wedge (e_2,x)\in R) \Rightarrow e_1 = e_2\big)$,

(I.12) $\bigwedge\limits_{x,y} \big(((x,y)\in R \wedge x.y\in C_0) \Rightarrow ((y,x)\in R \wedge y.x\ \ C_0\big)$,

(I.13) $\bigwedge\limits_{x\in C}\ \bigvee\limits_{e_1,e_2\in C_0} \big((x,e_1)\in R \wedge (e_2,x)\in R\big)$,

(I.14) $C_0 = \{e : e\in C \wedge \bigwedge\limits_{x\in C} \big(((x,e)\in R \Rightarrow x.e = x) \wedge ((e,x)\in R \Rightarrow e.x = x)\big)\}$

(I.15) $\bigwedge\limits_{x,y,z} \big(((x,y)\in R \wedge (x,z)\in R \wedge x\cdot y\in C_0 \wedge x\cdot z\in C_0) \Rightarrow y = z\big)$,

(I.16) $\bigwedge\limits_{x,y,z} \big(((y,x)\in R \wedge (z,x)\in R \wedge y\cdot x\in C_0 \wedge z\cdot x\in C_0) \Rightarrow y = z\big)$.

Ze względu na to, że pojęcie grupoidu w sensie df.1 jest równoważne pojęciu grupoidu w sensie Ehresmanna /[14] str.9/, grupoid w sensie df.1 będziemy w dalszym ciągu nazywać grupoidem Ehresmanna.

W pracy tej korzystać będziemy z następującej definicji grupoidu Brandta /[12] str.8/:

Definicja 2. Zbiór C z operacją binarną "." w tym zbiorze nazywamy grupoidem Brandta, jeśli spełnione są następujące aksjomaty:

1/ Jeśli a.b = c, to każdy z elementów a,b,c jest jednoznacznie wyznaczony przez dwa pozostałe.

2/ Jeśli a,b i b.c mają sens, to także (a.b).c i a.(b. c) mają sens; jeśli a.b i (a.b).c mają sens, to b.c i a.(b.c) mają sens; jeśli b.c i a.(b.c) mają sens, to a.b i (a.b).c mają sens - we wszystkich wymienionych przypadkach (a.b).c = a.(b.c).

3/ Dla każdego elementu a istnieją trzy jednoznacznie wyznaczone elementy: prawostronna jedność e_a, lewostronna jedność $e_{a^{-1}}$ i element odwrotny a^{-1} takie, że

$$e_{a^{-1}}\cdot a = a\cdot e_a = a,$$

$$a^{-1}\cdot a = e_a \quad , \quad a\cdot a^{-1} = e_{a^{-1}}.$$

4/ Dla każdych dwu jedności e_a, e_b istnieje element c taki, że $c.e_a$ oraz $e_b.c$ mają sens.

Pojęcie grupoidu Brandta ilustruje

Przykład 1. Rozważmy dowolny zbiór A oraz zbiór AxA. Operację "." w zbiorze AxA definiujemy następująco: (a,b).(c,d) ma sens wtedy i tylko wtedy, gdy b = c - gdy to zachodzi wtedy:

$$(a,b)\cdot(c,d) \overset{df}{=} (a,d).$$

Łatwo sprawdzić, że zbiór AxA z tak określoną operacją "." jest grupoidem Brandta. Grupoid tej postaci będziemy w dalszym ciągu nazywać grupoidem parowym.

W rozprawie [14] podana jest nieco inna definicja grupoidu Brandta. Ponieważ brak w niej wyraźnego stwierdzenia, że podana tam definicja grupoidu Brandta jest równoważna definicji 2, a korzystać będziemy z wyników uzyskanych w [12] jak i w [14], udowodnimy następujące /w [14] przyjęte jako definicja/:

Twierdzenie 1. Zbiór C z operacją "." jest wtedy i tylko wtedy grupoidem Brandta, gdy jest grupoidem Ehresmanna spełniającym warunek:

(I.17) $\bigwedge_{x,y\in C} \bigvee_{u\in C} \left((x,u)\in R \wedge (u,y)\in R\right).$

<u>Dowód</u>. Wykażemy najpierw, że aksjomaty (1), (2) i (3) def. 2 są równoważne aksjomatom (I.1) - (I.8) def.1. Jest bezpośrednio widoczne, że aksjomaty (1) i (2) są równoważne aksjomatom (I.1) - (I.7). Dla wykazania, że z aksjomatów (1) - (3) wynika (I.8) wystarczy pokazać, że $e_{a^{-1}}\in C_0$ czyli, że $e_{a^{-1}}\cdot e_{a^{-1}} = e_{a^{-1}}$.
Ponieważ $e_{a^{-1}}\cdot a$ oraz $a.a^{-1}$ mają sens, więc na podstawie (2) ma sens $e_{a^{-1}}\cdot(a\cdot a^{-1})$. Korzystając w dalszym ciągu z (2) i (3) mamy:

$$e_{a^{-1}}\cdot e_{a^{-1}} = e_{a^{-1}}(a\cdot a^{-1}) = (e_{a^{-1}}\cdot a)\cdot a^{-1} = a\cdot a^{-1} = e_{a^{-1}}.$$

Udowodnimy z kolei, że z aksjomatów (I.1)-(I.8) wynika aksjomat (3). Na podstawie (I.8) i (I.12) wiemy, że do każdego x istnieje y takie, że $x\cdot y\in C_0$ i $y\cdot x\in C_0$.
Oznaczmy $x\cdot y \overset{df}{=} e_{x^{-1}}$, $y\cdot x \overset{df}{=} e_x$.
Na podstawie (I.1) i (I.9) mamy wtedy:

$$e_{x^{-1}}\cdot x = x \quad , \quad x\cdot e_x = x .$$

Jednoznaczność elementów $e_x{-1}$, e_x, y wynika z warunków (I.10), (I.11), (I.15).
Udowodniliśmy w ten sposób, że aksjomaty (I.1)-(I.8) def.1 są równoważne aksjomatom (1)-(3) def.2.

Dla ostatecznego zakończenia dowodu pozostaje wykazać równoważność aksjomatów (4) i (I.17) na gruncie grupoidu Ehresmanna. Z aksjomatu (I.17) wynika oczywiście aksjomat (4).
Udowodnimy, że z aksjomatu (4) wynika aksjomat (I.17). Rozważmy w tym celu dowolne elementy x, y ze zbioru C. Dla elementów e_x, $e_y{-1}$ na podstawie (4) istnieje c takie, że mają sens $e_x.c$, $c.e_y{-1}$. Ponieważ $x.e_x$ oraz $e_y{-1}_y$ mają sens, więc mają sens wyrażenia:

$$x\cdot(e_x\cdot c) = (x\cdot e_x)\cdot c = x\cdot c \quad , \quad (c\cdot e_{y^{-1}})\cdot y = c\cdot(e_{y^{-1}}\cdot y) = c\cdot y .$$

Warunek (I.17) został więc udowodniony, a w ten sposób zakończono dowód twierdzenia 1.

W [14] zostało udowodnione następujące

<u>Twierdzenie 2</u>. Zespół $(C,\cdot)$ jest grupoidem Ehresmanna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rozkład $\mathcal{U}$ zbioru C na takie zbiory rozłączne, że: $R\subset \bigcup\{M\times M : M\in\mathcal{U}\}$
i każdy zbiór A z rodziny $\mathcal{U}$ z zacieśnieniem operacji "." do zbioru A jest grupoidem Brandta. Jeśli $(C,\cdot)$ jest grupoidem Ehresmanna, wtedy taki rozkład jest jednoznaczny.

Rozkład, o którym mowa w powyższym twierdzeniu, podyktowany jest następującą relacją w zbiorze C /[14] str.10/:

(I.18) $x\,S\,y \overset{df}{\Longleftrightarrow} \bigvee_n\left((x,n)\in R \wedge (n,y)\in R\right).$

Korzystając z tej uwagi udowodnimy

Twierdzenie 3. Jeżeli elementy x, z grupoidu Ehresmanna są przemnażalne /$x.z$ ma sens/, to x i z należą do tego samego grupoidu Brandta, który jest jedną ze składowych rozkładu danego grupoidu Ehresmanna na grupoidy Brandta.

Dowód. Niech $(x,z)\in R$. Na podstawie (I.13) i (I.9) istnieje element e taki, że $(x,e)\in R$ i $x\cdot e = x$. Kładąc wtedy w (I.4): $x = x$, $y = e$, $z = z$ otrzymujemy: $(e,z)\in R$.

Mamy więc: $(x,e)\in R$ i $(e,z)\in R$.

Oznacza to, że elementy x, z są w relacji (I.18), co kończy dowód.

W niniejszej pracy w danym zbiorze rozważamy jedną tylko operację binarną ".". Zbiór C z operacją "." nazywać będziemy strukturą. Przyjmiemy następującą definicję izomorfizmu struktur:

Definicja 3. Struktury $(C_1,\cdot)$, $(C_2,\cdot)$ nazywamy izomorficznymi, jeżeli istnieje funkcja różnowartościowa f przekształcająca C_1 na C_2 taka, że spełniony jest warunek: $f(x)\cdot f(y)$ ma sens wtedy i tylko wtedy, gdy $x.y$ ma sens; - gdy to zachodzi wtedy:

$$f(x)\cdot f(y) = f(x\cdot y).$$

Jest bezpośrednio widoczne, że obrazem poprzez izomorfizm grupoidu Ehresmanna /Brandta/ jest grupoid Ehresmanna /Brandta/. Podobnie widoczne jest, że funkcja odwrotna do izomorfizmu jest izomorfizmem oraz złożenie izomorfizmów jest izomorfizmem.

W dalszym ciągu wprowadzimy pojęcie iloczynu prostego struktur. Przyjmijmy mianowicie:

Definicje 4. Rozważmy dwie dowolne struktury $(C_1,\cdot)$ i $(C_2,\cdot)$.

W zbiorze $C_1\times C_2$ operację "." definiujemy następująco:

$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)$ ma sens wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1\cdot x_2$ i $y_1\cdot y_2$ mają sens - gdy to zachodzi kładziemy

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) \overset{\mathrm{df}}{=} (x_1\cdot x_2,\ y_1\cdot y_2).$$

Zbiór $C_1\times C_2$ z tak określoną operacją "." nazywać będziemy iloczynem prostym struktur.

Łatwo sprawdzić, że iloczyn prosty grupoidów Ehresmanna /Brandta/ jest grupoidem Ehresmanna /Brandta/.

Przytoczymy za Nijenhuisem /[12] str.11/ następujące

Twierdzenie 4. Każdy grupoid Brandta jest izomorficzny z iloczynem prostym pewnego grupoidu parowego i pewnej grupy - obydwu wyznaczonych jednoznacznie /z dokładnością do izomorfizmu/.

Twierdzenie 4 w dalszych naszych rozważaniach odgrywać będzie zasadniczą rolę. Odwoływać się będziemy do nieco innej, podanej później wypowiedzi tego twierdzenia /twierdzenie 4'/. Dla większej jasności dalszych rozważań /w szczególności wypowiedzi twierdzenia 4'/ podamy za Nijenhuisem /nieco przez nas zmodyfikowany[x]/ szkic konstrukcji izomorfizmu,o którym mowa w twierdzeniu 4.

Rozważmy dowolny grupoid Brandta H. Wszystkim elementom neutralnym tego grupoidu przypiszmy odpowiednie indeksy $\alpha, \beta, \ldots$, przy czym każdemu elementowi przypisujemy tylko jeden indeks /tzn. zakładamy,że $e_\alpha = e_\beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha = \beta$/.

Dla dalszego ciągu ustalmy dowolnie α. Zbiór takich elementów a że $e_\alpha \cdot a$ oraz $a \cdot e_\alpha$ mają sens, jest grupą. Grupę tę oznaczać będziemy w dalszym ciągu przez $\mathcal{G}_\alpha$. Każdemu różnemu od α wskaźnikowi β przypiszmy dokładnie jeden element $c_{\alpha\beta}$ ze zbioru takich elementów $\bar{c}_{\alpha\beta}$, że $e_\alpha \bar{c}_{\alpha\beta}$ oraz $\bar{c}_{\alpha\beta} \cdot e_\beta$ mają sens /istnienie takich elementów gwarantuje aksjomat (4)/. Przyjmijmy ponadto:

$$c_{\alpha\alpha} \overset{\mathrm{df}}{=} e_\alpha , \quad c_{\beta\gamma} \overset{\mathrm{df}}{=} c_{\alpha\beta}^{-1} \cdot c_{\alpha\gamma} .$$

Zbiór wszystkich otrzymanych w ten sposób elementów c oznaczmy przez H_α. Łatwo sprawdzić, że zbiór ten jest grupoidem Brandta /podgrupoidem grupoidu H/. Każdy element x z grupoidu H można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$x = c_{\beta\alpha}\, a\, c_{\alpha\gamma} , \qquad \text{gdzie} \quad a \in \mathcal{G}_\alpha ,\ c_{\beta\alpha}, c_{\alpha\gamma} \in H_\alpha .$$

Połóżmy wtedy:

$$f(x) \overset{\mathrm{df}}{=} (e_\beta, e_\gamma, a) .$$

Jest bezpośrednio widoczne, że tak określona funkcja f jest różnowartościowa.

Rozważmy dwa dowolne elementy z,y ze zbioru H. Wobec poprzednich uwag można je przedstawić w postaci

$$x = c_{\beta\alpha}\, a\, c_{\alpha\gamma} , \quad y = c_{\delta\alpha}\, a' c_{\alpha\varepsilon} .$$

Nietrudno sprawdzić, że x.y ma sens wtedy i tylko wtedy, gdy $\gamma = \delta$. Gdy to zachodzi, wtedy

$$x \cdot y = c_{\beta\alpha}\, a \cdot a^{-1} c_{\alpha\varepsilon} ,$$

a więc: $f(x \cdot y) = (e_\beta, e_\varepsilon, a \cdot a')$.

Jeśli przyjmiemy, że $(e_\beta, e_\gamma, a) \cdot (e_\delta, e_\varepsilon, a')$ ma sens wtedy i tylko wtedy, gdy $\gamma = \delta$ oraz przyjmiemy w tym przypadku:

$$(e_\beta, e_\gamma, a) \cdot (e_\gamma, e_\varepsilon, a') \overset{\mathrm{df}}{=} (e_\beta, e_\varepsilon, a \cdot a') ,$$

to f jest izomorfizmem, o którym mowa w tw.4.

Korzystając z powyższych rozważań twierdzenie 4 można również sformułować następująco:

Twierdzenie 4'. Każdy grupoid Brandta H jest izomorficzny z pewnym grupoidem postaci $(A \times A \times \mathcal{G})$, gdzie $\mathcal{G}$ jest grupą a operacja "." jest zdefiniowana następująco:

---

x/ Modyfikacja ta polega w swej istocie na tym,że za wartości konstruowanego izomorfizmu bierzemy trójki pewnych elementów.

$(\mu,\nu,x)\cdot(\mu_1,\nu_1,y) \overset{df}{=} (\mu,\nu,x\cdot y)$, gdzie $\mu,\nu,\mu_1,\nu_1 \in A$, $x,y \in \mathcal{G}$,
przy czym $(\mu,\nu,x)\cdot(\mu_1,\nu_1,y)$ ma sens wtedy i tylko wtedy, gdy $\nu = \mu_1$. Z drugiej strony jest bezpośrednio widoczne, że struktura $(A \times A \times G)$ /A - dowolny zbiór niepusty, $\mathcal{G}$ - dowolna grupa/, gdzie operacja "." jest rozumiana w powyższym sensie, jest grupoidem Brandta. Jeśli zbiór A jest jednoelementowy, to grupoid ten jest grupą izomorficzną z grupą $\mathcal{G}$, natomiast jeśli grupa $\mathcal{G}$ jest jednoelementowa, to grupoid ten jest izomorficzny z grupoidem parowym $(A\times A,\cdot)$.

II. Rozkłady niezmiennicze grupoidów Brandta i Ehresmanna

Przyjmijmy za S. Midurą i Z. Desznerem /[8] str. 325/ następujące definicje:

Definicja 5. Rodzinę $\{H_t\}_{t\in T}$ zbiorów niepustych, rozłącznych nazywamy rozkładem zbioru H, jeżeli $H = \bigcup_{t\in T} H_t$. Zbiory H_t nazywać będziemy składowymi rozkładu.

Definicja 6. Rozkład $\{H_t\}_{t\in T}$ zbioru H nazywamy niezmienniczym względem operacji "." określonej w H, jeżeli dla dowolnego $x \in H$ i dowolnego $t_1 \in T$ istnieje $t_2 \in T$ takie, że:

$$xH_{t_1} \subset H_{t_2},$$

gdzie $xH_{t_1} \overset{df}{=} \{z : \bigvee_{y\in H_{t_1}} (z = xy)\}$.

W nocie [8] udowodniono następujące

Twierdzenie 5. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by obiekt f określony na strukturze $(H,\cdot)$ był obiektem geometrycznym, jest, by rozkład zbioru H podyktowany obiektem /rozkład postaci $H = \bigvee_{\omega\in\Omega} f^{-1}(\{\omega\})$, gdzie Ω jest zapasem funkcji f/, był rozkładem niezmienniczym względem operacji ".".

Ponieważ, jak już wspominaliśmy, w pracy tej rozważać będziemy jedynie grupoidy /Brandta, Ehresmanna/, a więc zbiory z jedną tylko operacją ".", wobec tego zamiast rozkład niezmienniczy względem operacji ".", będziemy pisać krótko - rozkład niezmienniczy.

Wobec twierdzenia 5 wyznaczenie wszystkich obiektów geometrycznych /z dokładnością do równoważności/ określonych na danym grupoidzie H sprowadza się do wyznaczenia wszystkich rozkładów niezmienniczych tego grupoidu.

W [8] udowodniono, że rozkład grupy jest niezmienniczy wtedy i tylko wtedy, gdy jest rozkładem grupy na warstwy lewostronne względem pewnej podgrupy. Tak więc rozkłady niezmiennicze w grupie, to po prostu rozkłady grupy na warstwy lewostronne. Rozkłady niezmiennicze grupoidu parowego wyznaczone zostały przez Z. Mosznera. Konstrukcja tych rozkładów nie była publikowana. My zajmiemy się w dalszym ciągu wyznaczeniem rozkładów niezmienniczych grupoidu Brandta a następnie grupoidu Ehresmanna.

Przyjmijmy w tym celu następujące definicje:

<u>Definicja 7</u>. /[6] str.101/. Rozważmy dwa rozkłady zbioru H: $\{A_i\}_{i\in \mathcal{J}}$, $\{B_s\}_{s\in S}$. Rozkład $\{A_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ nazywamy sumorozkładem rozkładu $\{B_s\}_{s\in S}$, jeżeli dla dowolnego $i\in\mathcal{J}$ istnieje zbiór $\bar{S}\subset S$ taki, że:

$$A_i = \bigcup_{s\in\bar{S}} B_s .$$

<u>Definicja 8</u>. Rozważmy dowolny zbiór H i jego rozkład $\{H_{i,j}\}_{i\in\mathcal{J},j\in\mathcal{J}}$. Sumorozkład $\{B_s\}_{s\in S}$ rozkładu $\{H_{i,j}\}_{i\in\mathcal{J},j\in\mathcal{J}}$, taki, że przy każdym ustalonym i_0 ze zbioru $\mathcal{J}$ w każdym ze zbiorów B_s może zawierać się co najwyżej jeden zbiór z rodziny $\{H_{i_0,j}\}_{j\in\mathcal{J}}$ /tzn. jeśli $H_{i_0,j_0}\subset B_s$ i $H_{i_0,j_1}\subset B_s$, to $H_{i_0,j_0}=H_{i_0,j_1}$ /, nazywać będziemy sumorozkładem semiselekcyjnym względem i.

Rozkłady takie występują bez nazwy w pracy [6]. Wyznaczymy rozkłady niezmiennicze grupoidu postaci $A\times A\times \mathcal{G}$. Udowodnimy mianowicie następujące

<u>Twierdzenie 6</u>. Każdy rozkład niezmienniczy grupoidu $A\times A\times\mathcal{G}$ można otrzymać w następujący sposób:

1/ Zadajemy dowolny rozkład zbioru A na zbiory rozłączne, niepuste:

$$A = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{L}} A_\alpha .$$

2/ Dla każdego $\alpha\in\mathcal{L}$ wybieramy dowolną podgrupę $\mathcal{G}_\alpha$ grupy $\mathcal{G}$ oraz zadajemy dowolnie funkcję:

$$b_\alpha(\nu) : A_\alpha \longrightarrow \mathcal{G} .$$

3/ Konstruujemy rodzinę zbiorów postaci:

$$\text{(II.1)}\qquad C_{\mu,\alpha,a} \stackrel{df}{=} \{(\mu,\nu,x) : \nu\in A_\alpha \wedge x\in a\mathcal{G}_\alpha b_\alpha(\nu)\},$$

gdzie $\mu\in A$, $\alpha\in\mathcal{L}$, $a\in\mathcal{G}$.

Jest bezpośrednio widoczne, że rodzina ta stanowi pokrycie zbioru $A\times A\times\mathcal{G}$. Jak wykażemy później, zbiory tej rodziny są identyczne lub rozłączne, a więc rodzina ta po redukcji zbiorów identycznych stanowi rozkład zbioru $A\times A\times\mathcal{G}$. Możemy więc mówić o rozkładzie $\{C_{\mu,\alpha,a}\}$ rozumiejąc przez to rodzinę powstałą z rodziny $\{C_{\mu,\alpha,a}\}$ przez zredukowanie w niej zbiorów identycznych.

4/ Zadajemy dowolny semiselekcyjny względem μ sumorozkład $\{H_s\}_{s\in S}$ rozkładu $\{C_{\mu,\alpha,a}\}$.

Rodzina $\{H_s\}_{s\in S}$ jest szukanym rozkładem niezmienniczym.

<u>Dowód</u>. a/ Udowodnimy, że rodzina $\{H_s\}_{s\in S}$ podana konstrukcją 1-4 jest rozkładem niezmienniczym grupoidu $(A\times A\times\mathcal{G},\cdot)$. W tym celu wykażemy najpierw, że zbiory rodziny $\{C_{\mu,\alpha,a}\}$ są rozłączne lub identyczne. Udowodnimy właściwie coś więcej - wykażemy, że

$$C_{\mu_0,\alpha_0,a_0} = C_{\mu_1,\alpha_1,a_1}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu_0=\mu_1$, $\alpha_0=\alpha_1$, $a_0^{-1}a_1\in G_\alpha$ /tzn. a_0, a_1 należą do tej samej lewostronnej warstwy względem podgrupy G_α /, w pozostałych natomiast przypadkach zbiory te są rozłączne.

Niech bowiem $(\mu_0,\nu_0,x_0)\in C_{\mu_0,\alpha_0,a_0}\cap C_{\mu_1,\alpha_1,a_1}$.
Na podstawie (3) otrzymujemy stąd:
$\mu_0=\mu_1$ oraz $\nu_0\in A_{\alpha_0}\cap A_{\alpha_1}$, a więc $A_{\alpha_0}=A_{\alpha_1}$ i w konsekwencji $\alpha_0=\alpha_1$.
W dalszym ciągu mamy więc:

$$x_0\in a_0G_{\alpha_0}b_{\alpha_0}(\nu)\cap a_1G_{\alpha_0}b_{\alpha_0}(\nu_0).$$

Stąd otrzymujemy

$$a_0^{-1}x_0\in G_{\alpha_0}b_{\alpha_0}(\nu), \quad a_1^{-1}x_0\in G_{\alpha_0}b_{\alpha_0}(\nu_0),$$

a więc $\quad a_0^{-1}x_0\cdot(a_1^{-1}x_0)^{-1} = a_0^{-1}a_1\in G_{\alpha_0}$.
Mamy wtedy:

$$a_0^{-1}x_0\in G_{\alpha_0}b_{\alpha_0}(\nu), \quad a_1^{-1}x_0\in G_{\alpha_0}b_{\alpha_0}(\nu_0).$$

W konsekwencji dla dowolnego ν ze zbioru A_{α_0} zachodzi związek:

$$a_0G_{\alpha_0}b_{\alpha_0}(\nu) = a_1G_{\alpha_0}b_{\alpha_0}(\nu).$$

Ostatecznie wobec (II.1) otrzymujemy: $C_{\mu_0,\alpha_0,a_0} = C_{\mu_1,\alpha_1,a_1}$.
Z drugiej strony jest bezpośrednio widoczne, że jeżeli

$\mu_0=\mu_1$, $\alpha_0=\alpha_1$ i $a_0^{-1}a_1\in G_{\alpha_0}$, to $C_{\mu_0,\alpha_0,a_0}=C_{\mu_1,\alpha_1,a_1}$.

Wprost z określenia rodziny $\{C_{\mu,\alpha,a}\}$ wynika, że rodzina ta pokrywa zbiór $A\times A\times G$ a więc wobec przeprowadzonego rozumowania po zredukowaniu w niej zbiorów identycznych, jest ona rozkładem zbioru $A\times A\times G$
W konsekwencji rodzina $\{H_s\}_{s\in S}$ jest również rozkładem zbioru $A\times A\times G$
Pokażemy, że rozkład ten jest niezmienniczy. Rozważmy w tym celu zbiór:

$$(\mu_0,\nu_0,x_0)\cdot H_{s_0}.$$

Jeżeli w H_{s_0} nie zawiera się żaden zbiór rodziny $\{C_{\nu_0,\alpha,a}\}$ (ν_0 – ustalone), to wobec definicji operacji "." zbiorze A x A x G zbiór $(\mu_0,\nu_0,x_0)H_{s_0}$ jest pusty, więc zawiera się w każdym ze zbiorów H_s.
Jeśli natomiast istnieje zbiór postaci $C_{\nu_0,\alpha,a}$ zawarty w H_{s_0}, to wobec określenia zbiorów H_s zbiór taki jest tylko jeden. Element (μ_0,ν_0,x_0) jest przemnażalny tylko przez te elementy ze zbioru H_{s_0}, które należą do tego wyodrębnionego zbioru $C_{\nu_0,\alpha,a}$. Ponieważ rodzina $\{H_s\}_{s\in S}$ jest sumorozkładem rozkładu $\{C_{\mu,\alpha,a}\}$, więc istnieje taki wskaźnik s_1, że:

$$(\mu_0,\nu_0,x_0)C_{\nu_0,\alpha,a} = C_{\mu_0,\alpha,x_0a}\subset H_{s_1}.$$

Mamy zatem:

$$(\mu_0,\nu_0,x_0)H_{s_0} = (\mu_0,\nu_0,x_0)\cdot C_{\nu_0,\alpha,a}\subset H_{s_1}.$$

W ten sposób dowód pierwszej części twierdzenia 6 został zakończony.

b/ Wykażemy z kolei, że każdy rozkład niezmienniczy grupoidu $(A\times A\times \mathcal{G},\cdot)$ da się otrzymać konstrukcją 1/ - 4/.

Rozważmy w tym celu dowolny rozkład niezmienniczy $\{H_s\}_{s\in S}$ grupoidu $(A\times A\times \mathcal{G},\cdot)$.

Dla ustalonego $\mu_0\in A$ określamy rodzinę zbiorów postaci:

(II.2) $A_s^{\mu_0} \stackrel{df}{=} \{\nu: \bigvee_x (\mu_0,\nu,x)\in H_s\}$.

Wykażemy, że niepuste zbiory tej rodziny są identyczne lub rozłączne. Załóżmy dla dowodu, że $\nu\in A_{s_0}^{\mu_0}\cap A_{s_1}^{\mu_0}$.

Oznacza to, że istnieją takie elementy $x_0, x_1\in \mathcal{G}$, że:

(II.3) $(\mu_0,\nu_0,x_0)\in H_{s_0}$, $(\mu_0,\nu_0,x_1)\in H_{s_1}$.

Stąd otrzymujemy:

(II.4) $(\mu_0,\mu_0,x_0x_1^{-1})(\mu_0,\nu_0,x_1) = (\mu_0,\nu_0,x_0)\in H_{s_0}$.

Załóżmy, że $\nu\in A_{s_1}^{\mu_0}$. Istnieje więc $x\in\mathcal{G}$ takie, że $(\mu_0,\nu,x)\in H_{s_1}$. Korzystając ze związków (II.3), (II.4) i z niezmienniczości rozkładu $\{H_s\}_{s\in S}$ otrzymujemy stąd:

$$(\mu_0,\mu_0,x_0x_1^{-1})(\mu_0,\nu,x) = (\mu_0,\nu,x_0x_1^{-1}x)\in H_{s_0}.$$

Wobec (II.2) oznacza to, że $\nu\in A_{s_0}^{\mu_0}$. Udowodniliśmy więc, że $A_{s_1}^{\mu_0}\subset A_{s_0}^{\mu_0}$. Zupełnie analogicznie dowodzi się inkluzji odwrotnej; prowadzi to ostatecznie do wniosku, że $A_{s_1}^{\mu_0} = A_{s_0}^{\mu_0}$.

Udowodniliśmy w ten sposób, że zbiory rodziny $\{A_s^{\mu_0}\}_{s\in S}$ są identyczne lub rozłączne.

Jest bezpośrednio widoczne, że rodzina zbiorów $\{A_s^{\mu_0}\}_{s\in S}$ pokrywa zbiór A. W połączeniu z poprzednią konkluzją prowadzi to do wniosku, że rodzina ta po "ściągnięciu" zbiorów identycznych i odrzuceniu pustych stanowi rozkład zbioru A.

Wykażemy w dalszym ciągu, że rozkład ten nie zależy od wyboru μ_0. Rozważmy w tym celu dwa dowolne elementy $\mu_0,\mu_1\in A$ oraz dowolny niepusty zbiór $A_{s_0}^{\mu_0}\in\{A_s^{\mu_0}\}_{s\in S}$. Weźmy dowolny ustalony element $(\mu_0,\nu_0,x_0)\in H_{s_0}$ /istnienie takiego elementu wynika z (II.2)/. Niech H_{s_1} będzie tą składową rozkładu $\{H_s\}_{s\in S}$ do której należy element (μ_1,ν_0,x_0). Wykażemy, że

$$A_{s_0}^{\mu_0} = A_{s_1}^{\mu_1}.$$

Mamy oczywiście:

(II.5) $(\mu_1,\mu_0,e)(\mu_0,\nu_0,x_0) = (\mu_1,\nu_0,x_0)\in H_{s_1}$.

Niech $\nu\in A_{s_0}^{\mu_0}$. Istnieje więc $x\in\mathcal{G}$, takie, że $(\mu_0,\nu,x)\in H_{s_0}$. Stąd i z niezmienniczości rozkładu /wobec (II.5) / otrzymujemy:

$$(\mu_1,\mu_0,e)(\mu_0,\nu,x) = (\mu_1,\nu,x)\in H_{s_1}.$$

Oznacza to, że $\nu\in A_{s_1}^{\mu_1}$. Udowodniliśmy więc, że $A_{s_0}^{\mu_0}\subset A_{s_1}^{\mu_1}$.

Załóżmy na odwrót, że $\nu \in A^{\mu_1}_{s_1}$. Wynika stąd, że istnieje $y \in \mathcal{G}$ takie, że $(\mu_1, \nu, y) \in H_{s_1}$.
Ponieważ $(\mu_0, \mu_1, e)(\mu_1, \nu_0, x_0) = (\mu_0, \nu_0, x_0) \in H_{s_0}$,
więc także $(\mu_0, \mu_1, e)(\mu_1, \nu, y) = (\mu_0, \nu, y) \in H_{s_0}$.
Oznacza to, że $\nu \in A^{\mu_0}_{s_0}$. Udowodniliśmy w ten sposób, że $A^{\mu_1}_{s_1} \subset A^{\mu_0}_{s_0}$, a więc $A^{\mu_0}_{s_0} = A^{\mu_1}_{s_1}$, stąd każdy zbiór rodziny $\{A^{\mu_0}_s\}_{s\in S}$ jest równy odpowiedniemu zbiorowi rodziny $\{A^{\mu_1}_s\}_{s\in S}$. Prowadzi to do wniosku, że rodziny te są identyczne.

Niepuste zbiory rodziny $\{A^{\mu_0}_s\}_{s\in S}$ /μ_0 - dowolnie ustalone/ ponumerujmy nowymi wskaźnikami $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ze zbioru $\mathcal{L}$, tak aby każdy zbiór miał tylko jeden wskaźnik i różne zbiory miały różne wskaźniki. Wobec niezależności rodziny $\{A^{\mu}_s\}_{s\in S}$ od μ spełniony jest następujący związek:

$$\text{(II.6)} \qquad \bigwedge_{\alpha\in\mathcal{L}} \bigwedge_{\mu\in A} \bigvee_{s\in S} (A_\alpha = A^{\mu}_s).$$

Dla dalszego ciągu rozważmy zbiór:

$$\{x : (\mu, \nu, x) \in H_s\},$$

gdzie μ, ν, s są dowolnie ustalonymi elementami odpowiednio ze zbiorów: A, A, S. Zbiór ten, w przypadku gdy jest on niepusty, oznaczać będziemy:

$$\text{(II.7)} \qquad W_{\mu,\nu,s} \stackrel{\text{df}}{=} \{x : (\mu, \nu, x) \in H_s\}.$$

Z faktu, że rodzina $\{H_s\}_{s\in S}$ jest rozkładem zbioru $A \times A \times \mathcal{G}$ wynika bezpośrednio, że przy ustalonych μ_0, ν_0 rodzina $\{W_{\mu,\nu_0,s}\}$ po "ściągnięciu" zbiorów identycznych jest rozkładem grupy $\mathcal{G}$. Wykażemy, że jest to rozkład na warstwy lewostronne względem pewnej podgrupy grupy $\mathcal{G}$. Wystarczy w tym celu wykazać /[8] str.327/, że rozkład ten jest niezmienniczy względem działania w grupie $\mathcal{G}$. Rozważmy w tym celu dowolny /ustalony/ zbiór W_{μ_0,ν_0,s_0}, dowolny element x_0 z tego zbioru oraz element postaci (μ_0, μ_0, y_0). Istnieje oczywiście s_1 takie, że:

$$\text{(II.8)} \qquad (\mu_0, \mu_0, y_0)(\mu_0, \nu_0, x_0) = (\mu_0, \nu_0, y_0x_0) \in H_{s_1}.$$

Niech $x \in W_{\mu_0,\nu_0,s_0}$.
Z (II.7) otrzymujemy wtedy: $(\mu_0, \nu_0, x) \in H_{s_0}$.
Wobec niezmienniczości rozkładu $\{H_s\}_{s\in S}$ oraz związku (II.8) mamy stąd:

$$(\mu_0, \mu_0, y_0)(\mu_0, \nu_0, x) = (\mu_0, \nu_0, y_0x) \in H_{s_1},$$

a więc w konsekwencji $y_0x \in W_{\mu_0,\nu_0,s_1}$.

Udowodniliśmy w ten sposób, że $y_0W_{\mu_0,\nu_0,s_0} \subset W_{\mu_0,\nu_0,s_1}$.
Ponieważ y_0 było dowolnie wybranym elementem grupy $\mathcal{G}$, oznacza to, że rodzina $\{W_{\mu_0,\nu_0,s}\}_{s\in S}$ /po "ściągnięciu" zbiorów identycznych/ jest rozkładem niezmienniczym grupy $\mathcal{G}$, a więc rozkładem na warstwy lewostronne względem pewnej jej podgrupy.

Rodziny warstw $\{W_{\mu_0,\nu_0,s}\}$, $\{W_{\mu_1,\nu_0,s}\}$ dla dowolnie ustalonego ν_0 są identyczne przy każdym μ_0, μ_1.
Rozważmy bowiem dowolną warstwę W_{μ_0,ν_0,s_0} i element tej warstwy x_0.
Weźmy takie s_1, że $x_0 \in W_{\mu_1,\nu_0,s_1}$.
Wtedy: $(\mu_1,\nu_0,x_0) \in H_{s_1}$.
Ponieważ $(\mu_1,\mu_0,e)(\mu_0,\nu_0,x_0) = (\mu_1,\nu_0,x_0) \in H_{s_1}$,
więc dla dowolnego x z warstwy W_{μ_0,ν_0,s_0} mamy:

$$(\mu_1,\mu_0,e)(\mu_0,\nu_0,x) = (\mu_1,\nu_0,x) \in H_{s_1}.$$

Wobec (II.7) prowadzi to do wniosku, że $x \in W_{\mu_1,\nu_0,s_1}$.
Pokazaliśmy w ten sposób, że W_{μ_0,ν_0,s_0} jest zawarte w W_{μ_1,ν_0,s_1}.
Zupełnie analogicznie dowodzi się inkluzji odwrotnej. Udowodniliśmy więc, że każda warstwa rodziny $\{W_{\mu_0,\nu_0,s}\}$ jest równa odpowiedniej warstwie rodziny $\{W_{\mu_1,\nu_0,s}\}$. Oznacza to, że rodziny te są identyczne.

Wyznaczymy z kolei podgrupy $\mathcal{G}_\alpha$ oraz skonstruujemy funkcje $b_\alpha(\nu)$. Oznaczmy w tym celu przez $\mathcal{G}_\nu$ podgrupę grupy $\mathcal{G}$, na tle której tworzone są warstwy $W_{\mu,\nu,s}$ /ν - ustalone/.

Rozważmy dowolne /ustalone/ $\alpha \in \mathcal{L}$. Ze zbioru A_α wybieramy jeden ustalony element ν_0 i połóżmy:

(II.9) $$\mathcal{G}_\alpha \overset{df}{=} \mathcal{G}_{\nu_0}.$$

Dla wyznaczenia funkcji $b_\alpha(\nu)$ rozważmy ustalone μ_0 oraz s_0, takie że $A_\alpha = A_{s_0}^{\mu_0}$. Dla $\nu \in A_\alpha$ zbiory W_{μ_0,ν,s_0} /jako niepuste/ są warstwami. Z każdej warstwy $W_{\mu_0,\nu,s}$ wybierzmy jeden ustalony element x_ν i przyjmijmy

(II.10) $$b_\alpha(\nu) \overset{df}{=} x_{\nu_0}^{-1} x_\nu.$$

Udowodnimy, że spełnione jest następująca <u>własność W</u>:

Rozważmy dowolne /ustalone/ $\mu \in A$ i $s \in S$ takie, że $A_s^\mu \neq \emptyset$.
Niech α będzie takim wskaźnikiem, że $A_s^\mu = A_\alpha$.
Istnieje wtedy $a \in \mathcal{G}$ takie, że dla dowolnego $\nu \in A_\alpha$ zachodzi:

(II.11) $$W_{\mu,\nu,s} = a\,\mathcal{G}_\alpha\, b_\alpha(\nu).$$

Wykażemy najpierw, że własność ta jest spełniona dla μ_0, s_0 ustalonych przy konstrukcji funkcji $b_\alpha(\nu)$.
Rozważmy warstwę W_{μ_0,ν_0,s_0} oraz W_{μ_0,ν,s_0} /dla $\nu \in A_\alpha$/.
Zgodnie z poprzednimi oznaczeniami mamy:

(II.12) $$x_{\nu_0} \in W_{\mu_0,\nu_0,s_0}, \quad x_\nu \in W_{\mu_0,\nu,s_0},$$

a więc:

(II.13) $$(\mu_0,\nu_0,x_{\nu_0}) \in H_{s_0}, \quad (\mu_0,\nu,x_\nu) \in H_{s_0}.$$

Rozważmy dowolny element y z grupy $\mathcal{G}$, taki, że

$$y x_{\nu_0} \in W_{\mu_0,\nu_0,s_0}, \text{ czyli } (\mu_0,\nu_0,y x_{\nu_0}) \in H_{s_0}.$$

Ponieważ

$$(\mu_0,\mu_0,y)(\mu_0,\nu_0,x_{\nu_0}) = (\mu_0,\nu_0,y x_{\nu_0}) \in H_{s_0},$$

więc wobec (II.13) i niezmienniczości rozkładu $\{H_s\}_{s\in S}$ mamy:

$$(\mu_0,\mu_0,y)(\mu_0,\nu,x_\nu)=(\mu_0,\nu,yx_\nu)\in H_{s_0}.$$

Oznacza to, że $yx_\nu\in W_{\mu_0,\nu,s_0}$.

Podobnie można udowodnić, że: jeżeli $yx_\nu\in W_{\mu_0,\nu,s_0}$,

to $yx_{\nu_0}\in W_{\mu_0,\nu_0,s_0}$.

Mamy więc:

$$yx_{\nu_0}\in W_{\mu_0,\nu_0,s_0}\Longleftrightarrow yx_\nu\in W_{\mu_0,\nu,s_0}.$$

Stąd i z (II.12) otrzymujemy:

$$x_{\nu_0}^{-1}yx_{\nu_0}\in\mathcal{G}_{\nu_0}\Longleftrightarrow x_\nu^{-1}yx_\nu\in\mathcal{G}_\nu,$$

a więc: $x_{\nu_0}\mathcal{G}_{\nu_0}x_{\nu_0}^{-1}=x_\nu\mathcal{G}_\nu x_\nu^{-1}$.

Stąd na podstawie (II.9), (II.10) i (II.12) otrzymujemy w dalszym ciągu:

(II.14) $\quad W_{\mu_0,\nu,s_0}=x_\nu\cdot\mathcal{G}_\nu=x_{\nu_0}\mathcal{G}_{\nu_0}x_{\nu_0}^{-1}x_\nu=x_{\nu_0}\mathcal{G}_\alpha b_\alpha(\nu).$

Wykazaliśmy w ten sposób, że warstwy W_{μ_0,ν,s_0} są postaci (II.11).

Rozważmy teraz dowolne $\mu\in A$, $s\in S$, $\alpha\in\mathcal{L}$ takie, że spełnione są założenia własności W.

Rozważmy dowolny element postaci $(\mu,\nu_0,x_1)\in H_s$.

Niech y_0 będzie elementem grupy $\mathcal{G}$ spełniającym związek

$$y_0x_{\nu_0}=x_1.$$

Mamy wtedy:

$$(\mu,\mu_0,y_0)(\mu_0,\nu_0,x_{\nu_0})=(\mu,\nu_0,x_1)\in H_s.$$

Stąd, na podstawie (II.13) i niezmienniczości rozkładu $\{H_s\}_{s\in S}$ dla dowolnego $\nu\in A_\alpha$ i dowolnego $x\in\mathcal{G}$, takich, że $(\mu_0,\nu,x)\in H_{s_0}$ a więc $x\in W_{\mu_0,\nu,s_0}$, mamy:

$$(\mu,\mu_0,y_0)(\mu_0,\nu,x)=(\mu,\nu,y_0x)\in H_s.$$

Oznacza to wobec (II.7), że dla każdego $\nu\in A_\alpha$ zachodzi

$$y_0W_{\mu_0,\nu,s_0}\subset W_{\mu,\nu,s}.$$

Stąd, ponieważ W_{μ_0,ν,s_0}, $W_{\mu,\nu,s}$ /przy ustalonym ν/ są warstwami lewostronnymi na tle tej samej podgrupy, mamy:

$$y_0W_{\mu_0,\nu,s_0}=W_{\mu,\nu,s}$$

Z tego wniosku i z (II.14) otrzymujemy:

$$W_{\mu,\nu,s}=y_0x_{\nu_0}\mathcal{G}_\alpha b_\alpha(\nu).$$

Ponieważ y_0, x_{ν_0} są ustalonymi elementami, oznacza to, że warstwy $W_{\mu,\nu,s}$ są postaci (II.11). Własność W została w ten sposób w zupełności dowiedziona.

Zbiory $C_{\mu,\alpha,a}$ definiujemy analogicznie jak w konstrukcji, tzn. przyjmujemy:

(II.15) $\quad C_{\mu,\alpha,a}\overset{\mathrm{df}}{=}\{(\mu,\nu,x):\nu\in A_\alpha\wedge x\in a\mathcal{G}_\alpha b_\alpha(\nu)\}.$

Z rozumowania przeprowadzonego w punkcie a/ na początku dowodu wiemy, że rodzina $\{C_{\mu,\alpha,a}\}$ po zredukowaniu w niej zbiorów identycznych jest rozkładem zbioru $A\times A\times \mathcal{G}$. Udowodnimy, że zbiory H_s są sumami zbiorów tej rodziny.

Rozważmy w tym celu dowolną składową H_{s_1} oraz dowolny zbiór C_{μ_1,α_1,a_1}, taki, że:

$$C_{\mu_1,\alpha_1,a_1}\cap H_{s_1}\neq\emptyset .$$

Wykażemy, że $C_{\mu_1,\alpha_1,a_1}\subset H_{s_1}$.
Rozważmy element (μ_1,ν_1,x_1), taki, że:

(II.16) $(\mu_1,\nu_1,x_1)\in C_{\mu_1,\alpha_1,a_1}\cap H_{s_1}$.

Stąd na podstawie (II.2) i (II.15) mamy:

$$\nu_1\in A_{\alpha_1}\cap A_{s_1}^{\mu_1} .$$

Wobec konstrukcji zbiorów A_α oznacza to, że:

$$A_{\alpha_1}=A_{s_1}^{\mu_1} .$$

Rozważmy warstwę W_{μ_1,ν_1,s_1}. Wobec własności W musi być ona postaci:

$$W_{\mu_1,\nu_1,s_1}=a_0\mathcal{G}_{\alpha_1}b_{\alpha_1}(\nu) .$$

Stąd i z (II.16) mamy:

$$x_1\in a_1\mathcal{G}_{\alpha_1}b_{\alpha_1}(\nu_1)\cap a_0\mathcal{G}_{\alpha_1}b_{\alpha_1}(\nu_1) .$$

Wynika stąd, że zbiory $a\mathcal{G}_{\alpha_1}b_{\alpha_1}(\nu_1)$, $a_0\mathcal{G}_{\alpha_1}b_{\alpha_1}(\nu_1)$, jako warstwy lewostronne na tle tej samej podgrupy $([b_{\alpha_1}(\nu_1)]^{-1}\mathcal{G}_{\alpha_1}b_{\alpha_1}(\nu_1))$ posiadające element wspólny, są identyczne. Otrzymaliśmy więc:

(II.17) $W_{\mu_1,\nu_1,s_1}=a_1\mathcal{G}_{\alpha_1}b_{\alpha_1}(\nu_1)$.

Niech $(\mu_1,\nu,x)\in C_{\mu_1,\alpha_1,a_1}$. Wykażemy, że $(\mu_1,\nu,x)\in H_{s_1}$.
Z przyjętego założenia wobec (II.15) mamy:

$$x\in a_1\mathcal{G}_{\alpha_1}b_{\alpha_1}(\nu) .$$

Z (II.17) i własności W wynika, że:

$$W_{\mu_1,\nu,s_1}=a_1\mathcal{G}_{\alpha_1}b_{\alpha_1}(\nu)\quad \text{dla}\quad \nu\in A_{\alpha_1} .$$

Wykazaliśmy więc, że $x\in W_{\mu_1,\nu,s}$, czyli $(\mu_1,\nu,x)\in H_{s_1}$.
Udowodniliśmy w ten sposób, że $C_{\mu_1,\alpha_1,a_1}\subset H_{s_1}$.
Przeprowadzone rozumowanie oznacza, że rozkład $\{H_s\}_{s\in S}$ jest sumorozkładem rozkładu $\{C_{\mu,\alpha,a}\}$.

Dla ostatecznego zakończenia dowodu twierdzenia 6 pozostało nam jeszcze do wykazania, że sumorozkład ten jest semiselekcyjny względem μ.
Załóżmy w tym celu, że:

$$C_{\mu_1,\alpha_1,a_1}\subset H_{s_1}\ ,\quad C_{\mu_1,\alpha_2,a_2}\subset H_{s_1} .$$

Z określenia zbiorów A_α mamy wtedy:

$$A_{\alpha_1}=A_{s_1}^{\mu_1}=A_{\alpha_2} ,$$

a więc $\alpha_1=\alpha_2$.
Z własności W dla dowolnego $\nu\in A_{\alpha_1}$ mamy zatem:

$$a_1\mathcal{G}_{\alpha_1}b_{\alpha_1}(\nu)=W_{\mu_1,\nu,s_1}=a_2\mathcal{G}_{\alpha_2}b_{\alpha_2}(\nu).$$

Prowadzi to do wniosku, że $C_{\mu_1,\alpha_1,a_1} = C_{\mu_2,\alpha_2,a_2}$.
Wykazaliśmy więc, że każdy zadany rozkład niezmienniczy $\{H_s\}_{s\in S}$ grupoidu $(A\times A\times \mathcal{G},\cdot)$ da się przedstawić konstrukcją 1/ – 4/.
Dowód twierdzenia 6 został w ten sposób zakończony.

Z definicji izomorfizmu struktur bezpośrednio wynika następujące:

Twierdzenie 7. Niezmienniczość rozkładu jest niezmiennikiem izomorfizmu struktur.

Ze względu na to, że izomorfizm struktur jest relacją symetryczną, z twierdzenia 7 wynika:

Twierdzenie 7'. Jeżeli struktury $(C_1,\cdot),(C_2,\cdot)$ są izomorficzne, to rodzina $\{C_\alpha^1\}_{\alpha\in\mathcal{L}}$ jest rozkładem niezmienniczym struktury $(C_1,\cdot)$ wtedy i tylko wtedy, gdy rodzina $\{f(C_\alpha^1)\}_{\alpha\in\mathcal{L}}$, gdzie f jest izomorfizmem struktury $(C_1,\cdot)$ na strukturę $(C_2,\cdot)$, jest rozkładem niezmienniczym struktury C_2.

Bezpośrednim wnioskiem z twierdzeń: 4,' 6, 7' jest następujące

Twierdzenie 8. Jedynymi rozkładami niezmienniczymi zadanego grupoidu Brandta $(H,\cdot)$ są rodziny zbiorów otrzymane w następujący sposób:

1/ Zadajemy dowolny izomorfizm f grupoidu $(H,\cdot)$ na grupoid postaci $(A\times A\times \mathcal{G},\cdot)$.
2/ Konstrukcją 1/ - 4/ zadajemy dowolny rozkład niezmienniczy $\{H_s'\}_{s\in S}$ grupoidu $(A\times A\times \mathcal{G},\cdot)$.
3/ "Powielamy" ten rozkład poprzez funkcję f^{-1} na zbiór H, tzn. przyjmujemy:
$$H_s \stackrel{\mathrm{df}}{=} f^{-1}(H_s') \qquad \text{dla} \quad s\in S.$$

Otrzymujemy w ten sposób poszukiwany rozkład niezmienniczy $\{H_s\}_{s\in S}$ grupoidu $(H,\cdot)$.

Zajmiemy się z kolei wyznaczeniem rozkładów niezmienniczych grupoidu Ehresmanna. Udowodnimy w tym celu

Twierdzenie 9. Jedynymi rozkładami niezmienniczymi zadanego grupoidu Ehresmanna E są rodziny zbiorów otrzymane w następujący sposób:

1/ Rozważmy rozkład grupoidu E na rozłączne grupoidy Brandta/twierdzenie 2/:
$$E = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{L}} H^\alpha, \qquad \text{gdzie } H^\alpha \text{ jest grupoidem Brandta.}$$
2/ Zadajemy dowolny rozkład niezmienniczy $\{H_s^\alpha\}_{s\in S_\alpha}$ każdego grupoidu H^α.
Jest bezpośrednio widoczne, że rodzina $\{H_s^\alpha\}_{s\in S_\alpha,\alpha\in\mathcal{L}}$ jest rozkładem zbioru E.
3/ Zadajemy dowolny semiselekcyjny względem α sumorozkład $\{E_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ rozkładu $\{H_s^\alpha\}_{s\in S_\alpha,\alpha\in\mathcal{L}}$.

Rodzina zbiorów $\{E_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ jest szukanym rozkładem niezmienniczym.

Dowód.

a/ Udowodnimy najpierw, że sumorozkład $\{E_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ wyznaczony konstrukcją 1/ - 3/ jest rozkładem niezmienniczym grupoidu E.

Ze względu na twierdzenie 3, niezmienniczość każdego rozkładu $\{H_s^\alpha\}_{s\in S_\alpha}$ oraz fakt, że sumorozkład $\{E_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ rozkładu $\{H_s^\alpha\}_{s\in S_\alpha,\alpha\in\mathcal{L}}$ jest semiselekcyjny względem α - dla zadanego $x\in E, i\in\mathcal{J}$ istnieje $\alpha\in\mathcal{L}$ $s\in S_\alpha$, $s_1\in S_\alpha$, $i_1\in\mathcal{J}$ takie, że $xE_i\subset xH_s^\alpha\subset H_{s_1}^\alpha\subset E_{i_1}$.
Oznacza to właśnie, że rozkład $\{E_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ jest rozkładem niezmienniczym grupoidu E.

b/ Załóżmy na odwrót, że dany jest rozkład niezmienniczy $\{E_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ grupoidu Ehresmanna E. Wykażemy, że rozkład $\{E_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ da się otrzymać konstrukcją 1/ - 3/. Wobec twierdzenia 2 grupoid E można przedstawić w postaci

(II.18) $E=\bigcup_{\alpha\in\mathcal{L}}H^\alpha$, gdzie H^α jest grupoidem Brandta oraz $H^{\alpha_1}\cap H^{\alpha_2}=\emptyset$ dla $\alpha_1\neq\alpha_2$.

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$$\mathcal{J}_\alpha\overset{df}{=}\{i\in\mathcal{J}: E_i\cap H^\alpha\neq\emptyset\},\quad \mathcal{L}_i\overset{df}{=}\{\alpha\in\mathcal{L}: E_i\cap H^\alpha\neq\emptyset\},$$
$$H_i^\alpha\overset{df}{=}E_i\cap H^\alpha.$$

Z (II.18) oraz z faktu, że rodzina $\{E_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ jest rozkładem niezmienniczym grupoidu E wynika, że rodzina $\{H_i^\alpha\}_{i\in\mathcal{J}_\alpha}$ jest rozkładem niezmienniczym grupoidu Brandta H_α, co w oparciu o twierdzenie 3 prowadzi do wniosku, że rodzina $\{H_i^\alpha\}_{i\in\mathcal{J}_\alpha,\alpha\in\mathcal{L}}$ jest rozkładem niezmienniczym grupoidu E.

Mamy ponadto:

$$E_i=E_i\cap E=E_i\cap\bigcup_{\alpha\in\mathcal{L}}H^\alpha=\bigcup_{\alpha\in\mathcal{L}}E_i\cap H^\alpha=\bigcup_{\alpha\in\mathcal{L}}H_i^\alpha=\bigcup_{\alpha\in\mathcal{L}_i}H_i^\alpha.$$

Oznacza to, że rozkład $\{E_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ jest sumorozkładem semiselekcyjnym względem α rozkładu $\{H_i^\alpha\}_{i\in\mathcal{J}_\alpha,\alpha\in\mathcal{L}}$.

Udowodniliśmy w ten sposób, że zadany rozkład niezmienniczy $\{E_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ grupoidu Ehresmanna E da się otrzymać konstrukcją 1/ - 3/. Dowód twierdzenia 9 został więc zakończony.

III. Ogólne rozwiązanie równania translacji w grupoidzie Brandta i w grupoidzie Ehresmanna

Oznaczmy przez $(\Gamma\times H;\Gamma)$ rodzinę wszystkich funkcji o polu zawartym w zbiorze $\Gamma\times H$ i o wartościach w zbiorze Γ. W oparciu o [15] /str.68 aksjomat B/ przyjmiemy następującą definicję spełniania równania translacji[x/]:

Definicja 9. Rozważmy dowolny zbiór Γ oraz dowolną strukturę $(H,\cdot)$. Mówimy, że funkcja $F\in(\Gamma\times H;\Gamma)$ spełnia równanie translacji, jeśli spełnione są następujące dwa warunki:

1/ Dla dowolnego α ze zbioru Γ istnieje w zbiorze H element x taki, że $F(\alpha,x)$ ma sens.

2/ Dla dowolnego α ze zbioru Γ i dowolnych x,y ze zbioru H - jeśli $F(\alpha,y)$ i yx mają sens, to mają sens wyrażenia: $F(\alpha,x), F[F(\alpha,x),y], F(\alpha,yx)$ i zachodzi:

$$F[F(\alpha,x),y]=F(\alpha,yx). \tag{III.1}$$

Zdefiniujemy z kolei ogólne rozwiązanie równania translacji. Przyjmiemy mianowicie następującą

Definicję 10. Zbiór wszystkich funkcji F spełniających równanie translacji /przy zadanym zbiorze Γ i zadanej strukturze $(H,\cdot)$/ nazywać będziemy ogólnym rozwiązaniem równania translacji.

Przyjmijmy ponadto - również w oparciu o [15] /str.68 aksjomat C/ - następującą

Definicję 11. Mówimy, że funkcja $F\in(\Gamma\times H;\Gamma)$ /Γ jest dowolnym zbiorem a $(H,\cdot)$ dowolną strukturą/ spełnia warunek tożsamości, jeżeli spełnione są następujące dwa warunki:

1/ Dla dowolnego α ze zbioru Γ i dowolnych x, e_x ze zbioru H - jeśli $F(\alpha,x)$ ma sens i $e_x\cdot x=x$ to $F(\alpha,e_x)$ ma sens i $F(\alpha,e_x)=\alpha$.

2/ Dla dowolnego α ze zbioru Γ i dowolnych x, δ_x ze zbioru H - jeśli $F(\alpha,x)$ ma sens i $x\cdot\delta_x=x$, to $F(\alpha,\delta_x)$ ma sens i $F(\alpha,\delta_x)=\alpha$.

Rozwiązanie ogólne równania translacji w przypadku, gdy $(H,\cdot)$ jest grupą i przy założeniu, że F odwzorowuje $\Gamma\times H$ na Γ podał S. Łojasiewicz w nocie [5] i niezależnie od niego Z. Moszner. Rozwiązanie ogólne równania translacji na grupie przy słabszym założeniu, że F odwzorowuje $\Gamma\times H$ w Γ /założenie, że F jest określona na $\Gamma\times H$ jest, jak pokażemy poniżej w przypadku grupy, zbędne/ podał Z. Moszner w nocie [9].

x/ W dalszym ciągu noty [15] /str.69/ korzysta się faktycznie z aksjomatu /różnego od aksjomatu B, w sformułowaniu którego nastąpiła pomyłka druku/, który prowadzi do innej definicji spełniania równania translacji. My pozostaniemy jednak przy pierwotnie przyjętej definicji. Inne uogólnienia pojęcia spełniania równania translacji będą przedmiotem oddzielnych rozważań.

Rozwiązanie to składa się z funkcji następującej postaci:

(III.2) $F(\alpha, x) = g_i^{-1}[x \cdot g_i f(\alpha)]$ dla $f(\alpha) \in \Gamma_i$

gdzie:

1/ f jest dowolną funkcją o polu Γ spełniającą równanie
$f[f(\alpha)] = f(\alpha)$ dla $\alpha \in \Gamma$,

2/ $\{\Gamma_i\}_{i \in J}$ jest dowolnym rozkładem zbioru $f(\Gamma)$ takim, że

3/ moc zbioru Γ_i jest równa indeksowi pewnej podgrupy grupy H i

4/ funkcja g_i realizuje 3 /przekształca różnowartościowo zbiór Γ_i na zbiór odpowiednich warstw lewostronnych/.

Znane jest również /[1] str.22/ ogólne rozwiązanie następującego równania funkcyjnego:

(III.3) $F[F(\alpha, \mu, \nu), \nu, \nu_1] = F(\alpha, \mu, \nu_1)$,

gdzie $\mu, \nu, \nu_1 \in A$, $\alpha \in \Gamma$ (Γ, A dowolne zbiory),
przy założeniu, że spełniony jest warunek tożsamości tzn. zachodzi:

(III.4) $F(\alpha, \nu, \nu) = \alpha$ dla $\alpha \in \Gamma, \nu \in A$.

Równanie (III.3) jest więc równaniem translacji /przy zmienionej kolejności działania/ na grupoidzie parowym AxA. Rozwiązanie ogólne tego równania przy warunku (III.4) ma postać następującą /sformułowanie zaczerpnięte z [7] str.12/:

(III.5) $F(\alpha, \mu, \nu) = h^{-1}(h(\alpha, \mu), \nu)$, $\alpha \in \Gamma$, $\mu, \nu \in A$,

gdzie $h(\alpha, \nu)$ jest rodziną funkcji zależnych od parametru ν, przekształcających różnowartościowo zbiór Γ na siebie /a poza tym dowolnych/.

Niech Γ, A będą dowolnymi zbiorami, a $\mathcal{G}$ dowolną grupą. Rozważmy równanie:

(III.6) $F[F(\alpha, \mu, \nu, x), \nu, \nu, y] = F(\alpha, \mu, \nu_1, yx)$, $\alpha \in \Gamma$, $\mu, \nu, \nu_1 \in A$, $x, y \in \mathcal{G}$,

gdzie szukana funkcja F ma odwzorowywać zbiór $\Gamma \times A \times A \times \mathcal{G}$ w zbiór Γ. Rozwiązanie ogólne tego równania przy założeniu, że spełniony ma być warunek tożsamości tzn.:

(III.7) $F(\alpha, \nu, \nu, e) = \alpha$ dla $\nu \in A$, $\alpha \in \Gamma$,

można wyrazić następująco /[1] str.23, [6] str.132/:

(III.8) $F(\alpha, \mu, \nu, x) = h^{-1}(H[h(\alpha, \mu), x], \nu)$,

gdzie $H(\alpha, x)$ jest dowolnym rozwiązaniem równania translacji na grupie $\mathcal{G}$ spełniającym warunek tożsamości, a $h(\alpha, \mu)$ ma poprzednie znaczenie.

W rozdziale tym zajmować się będziemy wyznaczeniem ogólnego rozwiązania równania translacji na grupoidzie Brandta, a następnie wyznaczeniem ogólnego rozwiązania tego równania na grupoidzie Ehresmanna.

Udowodnimy w tym celu najpierw następujące

<u>Twierdzenie 10</u>. Jeżeli funkcja $F \in (\Gamma \times H; \Gamma)$ gdzie H jest grupoidem Brandta, spełnia równanie translacji, to funkcja ta jest określona na całym zbiorze $\Gamma \times H$.

Dowód. Niech funkcja F spełnia założenia twierdzenia. Rozważmy dowolny element $\alpha \in \Gamma$. Wobec warunku (1) def.9 istnieje $x_0 \in H$ takie, że $F(\alpha, x_0)$ ma sens. Pokażemy, że przy każdym $x \in H$, $F(\alpha, x)$ ma sens. Rozważmy w tym celu dowolny element $x \in H$ oraz element $c \in H$, taki, że $x_0 c$ i cx mają sens. Ponieważ $F(\alpha, x_c)$ ma sens i $x_0 c$ ma sens, więc na podstawie warunku (2) def.9, $F(\alpha, c)$ ma sens. Korzystając teraz ponownie z warunku (2) def.9 możemy zawnioskować, że $F(\alpha, x)$ ma sens. Dowód twierdzenia 10 został w ten sposób zakończony.

Udowodnimy z kolei następujące

Twierdzenie 11. Jeśli struktury $(C_1, \cdot)$, $(C_2, \cdot)$ są izomorficzne, to funkcja $F(\alpha, x) \in (\Gamma \times C_1; \Gamma)$ spełnia równanie translacji wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $\overset{*}{F} \in (\Gamma \times C_2; \Gamma)$ postaci:

$$\overset{*}{F}(\alpha, x') \overset{df}{=} F[\alpha, \varphi^{-1}(x')] \quad \text{dla } x' \in C_2, \tag{III.9}$$

gdzie φ jest dowolnym /ustalonym/ izomorfizmem struktury $(C_1, \cdot)$ na strukturę $(C_2, \cdot)$, spełnia to równanie.

Dowód. Załóżmy, że funkcja $F \in (\Gamma \times C_1; \Gamma)$ spełnia równanie translacji. Pokażemy, że wtedy funkcja $\overset{*}{F}$ dana związkiem (III.9) spełnia równanie translacji.

Fakt, że $\overset{*}{F}$ spełnia warunek (1) def.9 wynika natychmiast z faktu, że F spełnia ten warunek.

Pozostaje zatem sprawdzić, że funkcja $\overset{*}{F}$ spełnia warunek (2) def.9. Załóżmy w tym celu, że $\overset{*}{F}(\alpha, y')$ oraz $y'x'$ mają sens. Wobec tego $F[\alpha, \varphi^{-1}(y)]$ i $\varphi^{-1}(y')\varphi^{-1}(x')$ mają sens. Wynika stąd, że ma sens wyrażenie $F[F(\alpha, \varphi^{-1}(x'))\varphi^{-1}(y')]$, a więc ma także sens wyrażenie $\overset{*}{F}[\overset{*}{F}(\alpha, x'), y']$. Korzystając z (III.9) i z faktu, że F spełnia równanie translacji, otrzymujemy stąd w dalszym ciągu:

$$\overset{*}{F}[\overset{*}{F}(\alpha, x'), y'] = F[F(\alpha, \varphi^{-1}(x')), \varphi^{-1}(y')] = F[\alpha, \varphi^{-1}(y') \cdot \varphi^{-1}(x')] = F[\alpha, \varphi^{-1}(y'x')] = \overset{*}{F}(\alpha, y'x').$$

Wykazaliśmy więc, że jeśli F spełnia równanie translacji, to funkcja $\overset{*}{F}$ dana związkiem (III.9) również spełnia to równanie /na odpowiedniej strukturze/. Dowód warunku odwrotnego jest zupełnie analogiczny.

Wyznaczymy teraz ogólne rozwiązanie równania translacji na grupoidzie Brandta postaci $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{G}$. Udowodnimy mianowicie następujące

Twierdzenie 12. Ogólne rozwiązanie równania translacji na grupoidzie $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{G}$ /przy zadanym zbiorze Γ/ jest rodziną funkcji $F(\alpha, \mu, \nu, x)$ następującej postaci:

$$F(\alpha, \mu, \nu, x) = h^{-1}(H(h(\varphi(\alpha, \nu), \nu), x), \mu) \tag{III.10}$$

$$\text{dla } \alpha \in \Gamma, \ \mu, \nu \in \mathcal{A}, \ x \in \mathcal{G},$$

gdzie:

1/ φ jest dowolną funkcją przekształcającą zbiór $\Gamma\times A$ w Γ spełniającą następujące dwa warunki:

a/ $\varphi[\varphi(\alpha,\nu),\nu]=\varphi(\alpha,\nu)$ dla $\alpha\in\Gamma,\ \nu\in A$,

b/ zbiory postaci $\Gamma_\nu\overset{df}{=}\varphi(\Gamma\times\{\nu\})$ /zapas funkcji φ przy ustalonym ν / są równoliczne,

2/ $h(\alpha,\nu)$ jest dowolną funkcją / ν traktujemy jako parametr/ przekształcającą różnowartościowo zbiór Γ_ν na zbiór Γ_{μ_0}, gdzie μ_0 jest dowolnie ustalonym elementem zbioru A,

3/ $H(\alpha,x)$ jest dowolną funkcją określoną na zbiorze $\Gamma_{\mu_0}\times\mathcal{G}$ spełniającą równanie translacji i warunek tożsamości.

Dowód. Dla uproszczenia zapisu zamiast $\varphi(\alpha,\nu)$, $h(\alpha,\nu)$ będziemy pisać odpowiednio /jeśli to będzie wygodne/ $\varphi_\nu(\alpha)$, $h_\nu(\alpha)$.

Wykażemy najpierw, że funkcja F określona związkiem (III.10) spełnia równanie translacji.

Jest bezpośrednio widoczne, że funkcja ta jest określona na zbiorze $\Gamma\times(A\times A\times\mathcal{G})$. Wystarczy zatem sprawdzić tylko warunek (2) def.9. Rozważmy w tym celu dwa dowolne przemnażalne elementy grupoidu $A\times A\times\mathcal{G}$, a więc elementy postaci:

$$(\mu,\mu_1,y),\ (\mu_1,\nu,x)\in A\times A\times\mathcal{G}.$$

Mamy oczywiście: $(\mu,\mu_1,y)\cdot(\mu_1,\nu,x)=(\mu,\nu,x)$.

Sprawdzimy, że:

$$F[F(\alpha,\mu_1,\nu,x),\mu,\mu_1,y]=F(\alpha,\mu,\nu,y\cdot x).$$

Sens wyrażeń występujących w tym związku mamy zagwarantowany, gdyż funkcja F jest określona na zbiorze $\Gamma\times A\times A\times\mathcal{G}$, a wartości ma w zbiorze Γ.

Z (III.10) mamy:

$$F[F(\alpha,\mu_1,\nu,x),\mu,\mu_1,y]=h_\mu^{-1}H(h_{\mu_1}\varphi_{\mu_1}h_{\mu_1}^{-1}H(h_\nu\varphi_\nu(\alpha),x),y).$$

Ze związku 1/ a/ wynika bezpośrednio, że przy ustalonym μ_1 funkcja $\varphi_{\mu_1}(\alpha)$ jest tożsamością na zbiorze Γ_{μ_1}.

Korzystając ponadto z faktu, że $H(\alpha,x)$ spełnia rrównanie translacji, z ostatniej równości otrzymujemy:

$$F[F(\alpha,\mu_1,\nu,x),\mu,\mu_1,y]=h_\mu^{-1}H(H(h_\nu\varphi_\nu(\alpha),x),y)=$$
$$=h_\mu^{-1}H(h_\nu\varphi_\nu(\alpha),y\cdot x)=F(\alpha,\mu,\nu,y\cdot x).$$

Pierwsza część dowodu twierdzenia 12 została więc zakończona.

Załóżmy na odwrót, że funkcja $F\in(\Gamma\times(A\times A\times\mathcal{G});\Gamma)$ spełnia równanie translacji. Wykażemy, że F da się przedstawić w postaci (III.9). Dowód tego faktu rozbijemy na kilka części.

1. Niech e oznacza jedność grupy $\mathcal{G}$. Połóżmy:

(III.11) $\varphi_\nu(\alpha)\overset{df}{=}F(\alpha,\nu,\nu,e)$ dla $\alpha\in\Gamma,\ \nu\in A$,

(III.12) $\Gamma_\nu\overset{df}{=}\varphi_\nu(\Gamma)$.

Ponieważ, wobec twierdzenia 10, funkcja F jest określona na zbiorze $\Gamma \times (A \times A \times G)$, więc funkcja φ_ν jest określona na zbiorze Γ.
Mamy ponadto:

$$\varphi_\nu(\varphi_\nu(\alpha)) = F[F(\alpha,\nu,\nu,e),\nu,\nu,e] = F(\alpha,\nu,\nu,e) = \varphi_\nu(\alpha).$$

Wykażemy, że przy ustalonym μ zapasem zarówno funkcji $F(\alpha,\mu,\nu,e)$ jak i funkcji $F(\alpha,\mu,\nu,x)$ jest zbiór Γ_μ.

Wprost z określenia funkcji $\varphi_\mu(\alpha)$ wynika, że zbiór Γ_μ zawiera się w zapasie funkcji $F(\alpha,\mu,\nu,e)$. Stąd zaś wynika, że zbiór Γ_μ zawiera się także w zapasie funkcji $F(\alpha,\mu,\nu,x)$.
Z drugiej strony z (III.11) i z faktu, że F spełnia równanie translacji otrzymujemy:

$$\varphi_\mu(F(\alpha,\mu,\nu,x)) = F[F(\alpha,\mu,\nu,x),\mu,\mu,e] = F(\alpha,\mu,\nu,x).$$

Oznacza to, że zapas funkcji $F(\alpha,\mu,\nu,x)$ jest zawarty w zbiorze Γ_μ. W konsekwencji, zapas funkcji $F(\alpha,\mu,\nu,e)$ jest także zawarty w zbiorze Γ_μ.

2. Niech μ_0 będzie dowolnie ustalonym elementem zbioru A. Rozważmy dowolny element $\beta \in \Gamma_\mu$. Wobec (III.12) i (III.11) istnieje $\alpha \in \Gamma$, takie, że:

$$\beta \in F(\alpha,\nu,\nu,e).$$

Połóżmy:

(III.13) $\quad h_\nu(\beta) \overset{df}{=} F(\alpha,\mu_0,\nu,e).$

Pokażemy, że tak określone przyporządkowanie nie zależy od wyboru α a więc, że jest funkcyjne. Jeśli bowiem:

$$F(\alpha_0,\nu,\nu,e) = F(\alpha_1,\nu,\nu,e),$$

to wobec faktu, że F spełnia równanie translacji mamy:

$$F(\alpha_0,\mu_0,\nu,e) = F[F(\alpha_0,\nu,\nu,e),\mu_0,\nu,e] = F[F(\alpha_1,\nu,\nu,e),\mu_0,\nu,e] =$$
$$= F(\alpha_1,\mu_0,\nu,e).$$

Oznacza to właśnie niezależność określenia (III.13) od wyboru α.
Analogicznie - otrzymujemy:
jeśli $F(\alpha_0,\mu_0,\nu,e) = F(\alpha_1,\mu_0,\nu,e)$,
to $F(\alpha_0,\nu,\nu,e) = F(\alpha_1,\nu,\nu,e)$.
Funkcja h_ν jest więc różnowartościowa.
Pokażemy, że przekształca ona zbiór Γ_ν na zbiór Γ_{μ_0}.
Wprost z określenia tej funkcji wynika, że jest ona określona na zbiorze Γ_ν. Wystarczy zatem wykazać, że jej zapasem jest zbiór Γ_{μ_0}. Rozważmy w tym celu dowolny element $\beta \in \Gamma_{\mu_0}$.
Wobec (III.11) i (III.12) β można przedstawić w postaci:

$$\beta = F(\alpha_0,\mu_0,\mu_0,e).$$

Ze względu na to, że przy ustalonym ν zapasem funkcji $F(\alpha,\nu,\mu,e)$ jest zbiór Γ_ν mamy:

$$F(\alpha_0,\nu,\mu_0,e) \in \Gamma_\nu.$$

Istnieje zatem $\alpha_1 \in \Gamma$, takie, że:

$$F(\alpha_0, \nu, \mu_0, e) = \varphi_\nu(\alpha_1) = F(\alpha_1, \nu, \nu, e).$$

Stąd otrzymujemy:

$$F(\alpha_0, \mu_c, \mu_c, e) = F[F(\alpha_0, \nu, \mu_0, e), \mu_0, \nu, e] = F[F(\alpha_1, \nu, \nu, e), \mu_c, \nu, e] = F(\alpha_1, \mu_0, \nu, e).$$

Mamy zatem:

$$h_\nu(F(\alpha_1, \nu, \nu, e)) = F(\alpha_1, \mu_0, \nu, e) = F(\alpha_0, \mu_0, \mu_c, e) = \beta.$$

Wykazaliśmy więc, że β należy do zapasu funkcji h_ν.

Udowodnimy z kolei, że dla dowolnego $\alpha \in \Gamma$ i dla dowolnego $\mu \in A$ zachodzi:

(III.14) $F(\alpha, \mu, \mu_c, e) = h_\mu^{-1}(F(\alpha, \mu_0, \mu_c, e))$.

Rozważmy w tym celu dowolnie ustalone $\alpha \in \Gamma$ i dowolnie ustalone $\mu \in A$. Jak wykazaliśmy w 1. $F(\alpha, \mu, \mu_0, e) \in \Gamma_\mu$.

Istnieje zatem $\bar{\alpha} \in \Gamma$, takie, że:

(III.15) $F(\bar{\alpha}, \mu, \mu, e) = F(\alpha, \mu, \mu_0, e)$.

Stąd, ze względu na to, że F spełnia równanie translacji, otrzymujemy:

(III.16) $F(\bar{\alpha}, \mu_c, \mu, e) = F[F(\bar{\alpha}, \mu, \mu, e), \mu_c, \mu, e] = F[F(\alpha, \mu, \mu_0, e), \mu_0, \mu, e] =$
$= F(\alpha, \mu_0, \mu_c, e)$.

Z (III.13), (III.15) i (III.16) otrzymujemy:

$$h_\mu(F(\alpha, \mu, \mu_c, e)) = h_\mu(F(\bar{\alpha}, \mu, \mu, e)) = F(\bar{\alpha}, \mu_c, \mu, e) = F(\alpha, \mu_c, \mu_c, e).$$

Stąd, w widoczny sposób, wynika związek (III.14).

3. Określimy funkcję $H(\alpha, x)$. Kładziemy mianowicie:

(III.17) $H(\alpha, x) \stackrel{df}{=} F(\alpha, \mu_c, \mu_c, x)$ dla $\alpha \in \Gamma_{\mu_0}$, $x \in G$.

Funkcja $H(\alpha, x)$ jest określona na zbiorze $\Gamma_{\mu_0} \times G$. W 1. pokazaliśmy, że przy ustalonym μ_c zapasem funkcji $F(\alpha, \mu_0, \nu, x)$ jest zbiór Γ_{μ_0}. Wynika stąd, że zapas funkcji $H(\alpha, x)$ zawiera się w zbiorze Γ_{μ_c}. Mamy więc:

(III.18) $H(\alpha, x) \in (\Gamma_{\mu_c} \times G; \Gamma_{\mu_c})$.

Z faktu, że F spełnia równanie translacji otrzymujemy:

(III.19) $H(H(\alpha, x), y) = F[F(\alpha, \mu_c, \mu_c, x), \mu_c, \mu_c, y] = F(\alpha, \mu_0, \mu_c, yx) =$
$= H(\alpha, yx)$.

Związki (III.18) i (III.19) oznaczają, że funkcja $H(\alpha, x)$ spełnia równanie translacji na zbiorze $\Gamma_{\mu_c} \times G$.

Wykażemy, że funkcja $H(\alpha, x)$ spełnia też warunek tożsamości. Rozważymy w tym celu dowolny element α ze zbioru Γ_{μ_c}. Wobec (III.12) element ten można przedstawić w postaci:

$\alpha = F(\beta, \mu_c, \mu_0, e)$, gdzie β jest pewnym elementem zbioru Γ.

Stąd i z założenia, że F spełnia równanie translacji otrzymujemy:

$$H(\alpha, e) = F(\alpha, \mu_c, \mu_c, e) = F[F(\beta, \mu_c, \mu_0, e), \mu_c, \mu_c, e] = F(\beta, \mu_c, \mu_c, e) = \alpha.$$

Oznacza to, że funkcja $H(\alpha, x)$ spełnia warunek tożsamości.

4. Pokażemy, że funkcja F spełnia związek (III.10).

Z założenia, że F spełnia równanie translacji oraz ze związków (III.13)

(III.14) i (III.17) otrzymujemy:

$$F(\alpha,\mu,\nu,x)=F\{F(\alpha,\mu_0,\nu,x),\mu,\mu_0,e\}=F\{F[F(\alpha,\mu_0,\nu,e),\mu_0,\mu_c,x],\mu,\mu_c,e\}=$$

$$=h_\mu^{-1}(F\{F[h_\nu(F(\alpha,\nu,\nu,e),\mu_0,\mu_0,x],\mu_c,\mu_0,e\})=h_\mu^{-1}(F\{h_\nu(F(\alpha,\nu,\nu,e),\mu_0,\mu_0,x\})=h_\mu^{-1}(H(h_\nu\varphi_\nu(\alpha),x)).$$

Dowód twierdzenia 12 został w ten sposób zakończony.

Z pierwszej części przeprowadzonego dowodu jest bezpośrednio widoczne, że założenie iż $H(\alpha,x)$ spełnia warunek tożsamości jest w tym twierdzeniu nieistotne. Założenie to przyjęliśmy ze względu na to, że w dalszych prowadzonych przez nas rozważaniach prowadzi ono do znacznych uproszczeń.

Korzystając z twierdzenia 12 i z ogólnego rozwiązania równania translacji na grupie (III.2), można uzyskać bezpośrednio ostateczną postać ogólnego rozwiązania równania translacji na grupoidzie $A\times A\times \mathcal{G}$. Zauważmy najpierw, że funkcja F dana związkiem (III.2) spełnia warunek tożsamości wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f występująca w tym związku jest tożsamością. Rozwiązanie ogólne równania translacji na grupoidzie $A\times A\times \mathcal{G}$ ma zatem postać:

(III.20) $F(\alpha,\mu,\nu,x)=h_\mu^{-1}g_i^{-1}(x\,g_i^{-1}h_\nu\varphi_\nu(\alpha))$ dla $h_\nu\varphi_\nu(\alpha)\in\Gamma^i_{\mu_c}$,

gdzie:

1/ μ_0 jest dowolnie ustalonym elementem zbioru A,

2/ $\varphi_\nu(\alpha)$, $h_\nu(\alpha)$ mają takie znaczenie jak w twierdzeniu 12,

3/ $\{\Gamma^i_{\mu_c}\}_{i\in\mathcal{J}}$ jest dowolnym rozkładem zbioru $\Gamma_{\mu_c}=\varphi_{\mu_c}(\Gamma)$ takim, że

4/ dla każdego $i\in\mathcal{J}$ istnieje podgrupa $\mathcal{G}_i$ grupy $\mathcal{G}$ o indeksie równym mocy zbioru $\Gamma^i_{\mu_0}$,

5/ g_i odwzorowuje wzajemnie jednoznacznie zbiór $\Gamma^i_{\mu_0}$ na zbiór warstw lewostronnych grupy $\mathcal{G}$ względem podgrupy $\mathcal{G}_i$.

Na podstawie twierdzenia 12 i 11 można wyznaczyć ogólne rozwiązanie równania translacji na dowolnym grupoidzie Brandta H. Wystarczy w tym celu dowolnie zadać izomorfizm φ grupoidu H na grupoid postaci $A\times A\times\mathcal{G}$ i położyć:

(III.21) $F(\alpha,x)=\overset{*}{F}(\alpha,\varphi(x))$ dla $x\in H$,

gdzie $\overset{*}{F}$ jest ogólnym rozwiązaniem równania translacji na grupoidzie $A\times A\times\mathcal{G}$.

Udowodnimy teraz dwa twierdzenia będące wnioskami z twierdzenia 12.

Twierdzenie 13. Ogólne rozwiązanie równania translacji na grupoidzie $A\times A\times\mathcal{G}$ przy założeniu, że spełniony jest warunek tożsamości, ma postać:

(III.22) $F(\alpha,\mu,\nu,x)=h_\mu^{-1}(H(h_\nu(\alpha),x))$ dla $\alpha\in\Gamma$, $\mu,\nu\in A$, $x\in\mathcal{G}$,

gdzie $h_\nu(\alpha)$ jest dowolną funkcją /rodziną funkcji z parametrem / przekształcającą różnowartościowo zbiór Γ na siebie, a $H(\alpha,x)$ jest dowolnym rozwiązaniem równania translacji na zbiorze $\Gamma\times\mathcal{G}$ spełniającym warunek tożsamości.

Związek (III.22) jest więc odpowiednikiem związku (III.8).

Dowód. Wstawiając w związku (III.10) $\mu=\nu$, $x=e$ i korzystając z faktu, że $H(\alpha,x)$ spełnia warunek tożsamości otrzymujemy:

$$F(\alpha,\nu,\nu,e)=h_\nu^{-1}H(h_\nu\varphi_\nu(\alpha),e)=h_\nu^{-1}h_\nu\varphi_\nu(\alpha)=\varphi_\nu(\alpha).$$

Jest stąd widoczne, że funkcja F dana związkiem (III.10) spełnia warunek tożsamości wtedy i tylko wtedy, gdy każda funkcja $\varphi_\nu(\alpha)$ jest tożsamością.

Jeśli $\varphi_\nu(\alpha)$ jest tożsamością, to wobec przyjętych oznaczeń $\Gamma_\nu'=\Gamma$ w konsekwencji funkcje h_ν są wzajemnie jednoznacznymi przekształceniami zbioru Γ na siebie, a funkcja $H(\alpha,x)$ jest rozwiązaniem równania translacji na zbiorze $\Gamma\times\mathcal{G}$.

Związek (III.10) przyjmuje więc wtedy postać (III.22). Dowód twierdzenia 13 został w ten sposób zakończony.

Twierdzenie 14. Ogólne rozwiązanie równania translacji na grupoidzie parowym $A\times A$ ma postać:

(III.23) $F(\alpha,\mu,\nu)=h_\mu^{-1}h_\nu\varphi_\nu(\alpha)$, $\alpha\in\Gamma$, $\mu,\nu\in A$,

gdzie funkcje φ_ν, h_ν mają takie znaczenie jak w twierdzeniu 12.

Dowód. Rozważmy dowolną grupę jednoelementową $\{e\}$ i połóżmy:

$$\varphi(\mu,\nu)=(\mu,\nu,e) \qquad \text{dla} \quad \mu,\nu\in A.$$

Jest bezpośrednio widoczne, że tak określona funkcja φ jest izomorfizmem grupoidu parowego $A\times A$ na grupoid $A\times A\times\{e\}$. Wobec twierdzenia 12 i związku (III.21) ogólne rozwiązanie równania translacji na grupoidzie $A\times A$ ma postać:

$$F(\alpha,\mu,\nu)=\overset{*}{F}(\alpha,\mu,\nu,e)=h_\mu^{-1}H(h_\nu\varphi_\nu(\alpha),e)=h_\mu^{-1}h_\nu\varphi_\nu(\alpha).$$

Dowód twierdzenia 14 został więc zakończony.

Jak stwierdziliśmy w dowodzie twierdzenia 13, funkcja F dana związkiem (III.10), spełnia warunek tożsamości wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi_\nu(\alpha)$ jest tożsamością. Jeśli więc założymy, że spełniony jest warunek tożsamości, to związek (III.23) przyjmie postać:

(III.24) $F(\alpha,\mu,\nu)=h_\mu^{-1}h_\nu(\alpha)$, $\alpha\in\Gamma$, $\mu,\nu\in A$,

przy czym h_ν jest teraz dowolnym wzajemnie jednoznacznym przekształceniem zbioru Γ na siebie. Związek (III.24) jest jak widać analogonem związku (III.5).

Powyższym rozumowaniem udowodniliśmy następujące

Twierdzenie 15. Ogólne rozwiązanie równania translacji na grupoidzie parowym $A \times A$ przy założeniu, że spełniony ma być warunek tożsamości, jest rodziną funkcji $F(\alpha,\mu,\nu)$ zadanych związkiem (III.24).

Przystąpimy teraz do wyznaczenia ogólnego rozwiązania równania translacji na dowolnym grupoidzie Ehresmanna. Udowodnimy mianowicie następujące

Twierdzenie 16. Rozwiązaniem ogólnym równania translacji na zbiorze $\Gamma \times E$, gdzie Γ jest dowolnym zbiorem a E jest dowolnym grupoidem Ehresmanna - jest rodzina funkcji $F(\alpha,x)$ otrzymanych w następujący sposób:

1/ Rozważamy rozkład /jednoznaczny wobec twierdzenia 2/ grupoidu E na rozłączne grupoidy Brandta:

$E = \bigcup_{s\in S} H_s$, gdzie H_s jest grupoidem Brandta.

2/ Dla każdego $s \in S$ zadajemy dowolnie zbiór $\Gamma_s \subset \Gamma$ ale tak, aby:

(III.25) $\bigcup_{s\in S} \Gamma_s = \Gamma$.

3/ Dla każdego $s \in S$ takiego, że $\Gamma_s \neq \emptyset$ zadajemy dowolnie funkcję $F_s(\alpha,x)$ spełniającą równanie translacji na zbiorze $\Gamma_s \times H_s$.

4/ Funkcję $F(\alpha,x)$ określamy następująco:

$F(\alpha,x) \stackrel{df}{=} F_s(\alpha,x)$ dla $(\alpha,x) \in \Gamma_s \times H_s$.

Przyjmujemy ponadto, że jeśli nie istnieje $s \in S$ takie, że $(\alpha,x) \in \Gamma_s \times H_s$, to symbol $F(\alpha,x)$ nie ma sensu.

Dowód. Ze względu na twierdzenie 3 jest bezpośrednio widoczne, że tak określona funkcja $F(\alpha,x)$ spełnia równanie translacji.

Załóżmy więc na odwrót, że dana jest funkcja $F(\alpha,x)$ spełniająca równanie translacji na zbiorze $\Gamma \times E$. Wykażemy, że F da się przedstawić w postaci wyszczególnionej w dowodzonym twierdzeniu.

Zdefiniujemy najpierw zbiory Γ_s. Przyjmiemy mianowicie:

$$\Gamma_s \stackrel{df}{=} \left\{\alpha \in \Gamma : \bigvee_{x\in H_s} \left(F(\alpha,x) \text{ ma sens}\right)\right\}.$$

Wprost z określenia zbiorów Γ_s i z faktu, że F spełnia równanie translacji /warunek 1/ definicji 9/ wynika, że spełniony jest związek (III.25).

Pokażemy z kolei, że zbiór $\Gamma_s \times H_s$ /H_s ma poprzednie znaczenie/ zawiera się w polu funkcji F. Rozważmy w tym celu dowolny niepusty zbiór Γ_s i dowolny element α z tego zbioru. Z definicji zbioru Γ_s wynika, że istnieje $x_0 \in H_s$ takie, że $F(\alpha,x_0)$ ma sens. Na podstawie dowodu twierdzenia 10 wynika stąd, że dla dowolnego $y \in H_s$, $F(\alpha,y)$ ma sens. Przyjmijmy:

$$F_s(\alpha,x) \stackrel{df}{=} F(\alpha,x) \quad \text{dla} \quad (\alpha,x) \in \Gamma_s \times H_s.$$

Z poprzednich rozważań wynika, że funkcja F_s jest określona na zbiorze $\Gamma_s \times H_s$. Wobec faktu, że F spełnia równanie translacji, dla sprawdzenia, że F_s spełnia równanie translacji na zbiorze $\Gamma_s \times H_s \neq \emptyset$ wystarczy pokazać, że wartości funkcji F_s należą do zbioru Γ_s. Rozważmy w tym celu dowolne $\alpha \in \Gamma_s$ ($\Gamma_s \neq \emptyset$) i dowolne $x \in H_s$. Niech y będzie takim elementem grupoidu H_s, że yx ma sens. Jak pokazaliśmy poprzednio - $F(\alpha, y)$ ma sens. Ma więc także sens wyrażenie $F[F(\alpha, x), y]$. Oznacza to wobec definicji zbioru Γ_s i funkcji F_s, że:

$$F_s(\alpha, x) = F(\alpha, x) \in \Gamma_s .$$

Dowód twierdzenia 16 został więc zakończony.

Z udowodnionego twierdzenia wynikają bezpośrednio dwa następujące wnioski:

<u>Wniosek 1</u>.

Funkcja $F(\alpha, x)$ spełniająca równanie translacji na grupoidzie Ehresmanna spełnia warunek tożsamości wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje $F_s(\alpha, x)$ spełniają ten warunek.

<u>Wniosek 2</u>.

Funkcja $F(\alpha, x)$ spełniająca równanie translacji na grupoidzie Ehresmanna /przy zadanym zbiorze Γ / jest określona na zbiorze $\Gamma \times E$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $s \in S$ zachodzi:

$$\Gamma_s = \Gamma .$$

Jak widać z twierdzenia 16, przy przyjętej przez nas definicji spełniania równania translacji istnieją /przy odpowiednim doborze zbioru Γ i struktury $(C, \cdot)$ /takie funkcje $F(\alpha, x) \in \Gamma$ spełniające równanie translacji, że odrzucenie pewnych elementów struktury $(C, \cdot)$ nie zmienia funkcji F. Chodzi tu o takie elementy x struktury $(C, \cdot)$, dla których nie istnieje $\alpha \in \Gamma$ takie, że $F(\alpha, x)$ ma sens. Dlatego wydaje się sensowne uzupełnienie definicji 9 następującym warunkiem:

(III.21) Dla każdego $x \in H$ istnieje $\alpha \in \Gamma$ takie, że $F(\alpha, x)$ ma sens.

Wobec twierdzenia 10 taka modyfikacja definicji 9 nie wpłynie na zmianę rozwiązania równania translacji na grupoidzie Brandta. Jest natomiast bezpośrednio widoczne, że w przypadku rozpatrywania równania translacji na grupoidzie Ehresmanna zaproponowana modyfikacja definicji 9 wpłynie jedynie na to, że wszystkie występujące w rozwiązaniu zbiory Γ_s będą niepuste. W konsekwencji dla każdego $s \in S$ będzie określona funkcja $F_s(\alpha, x)$.

IV. Pojęcie grupoidu topologicznego Ehresmanna

W tym i w następnym rozdziale rozważać będziemy pewne przestrzenie topologiczne z topologią zadaną przez bazę otoczeń.

Przyjmiemy następującą

Definicję 12. Zbiór E nazywamy przestrzenią topologiczną, jeśli zadana jest w tym zbiorze rodzina Σ podzbiorów zbioru E, pokrywająca zbiór E taka, że spełnione są następujące dwa warunki:

W-1. Dla każdych dwóch różnych elementów a,b zbioru E istnieje zbiór $U \in \Sigma$ taki, że $a \in U$ i $b \notin U$.

W-2. Dla każdego $a \in E$, $U,V \in \Sigma$ takich, że $a \in U$ i $a \in V$ istnieje zbiór $W \in \Sigma$ taki, że $a \in W \subset U \cap V$.

Rodzinę spełniającą powyższe warunki nazywać będziemy bazą przestrzeni E, natomiast zbiór $U \in \Sigma$ taki, że $a \in U$ nazywać będziemy otoczeniem elementu a.

Uwaga.

Wszystkie używane przez nas w dalszym ciągu, a osobno nie definiowane pojęcia topologiczne należy rozumieć w powszechnie przyjętym sensie /np. zgodnie z [13]/.

Zdefiniujemy teraz grupoid topologiczny. Rozważmy w tym celu dowolny grupoid Ehresmanna $(E,\cdot)$. Przez R oznaczmy dziedzinę operacji "$\cdot$". Zbiór R jest więc zdefiniowany następująco:

(IV.1) $R \overset{df}{=} \{(x,y) : x \in E \wedge y \in E \wedge x\cdot y \text{ ma sens}\}$.

Przyjmujemy następującą

Definicję 13. Grupoid Ehresmanna $(E,\cdot)$ nazywamy grupoidem topologicznym /Ehresmanna/, jeśli w zbiorze E zadana jest taka topologia, że:

a/ funkcja $x.y$ jest ciągła w podprzestrzeni R przestrzeni ExE /ExE - iloczyn kartezjański przestrzeni topologicznej E przez siebie/,

b/ funkcja x^{-1} jest ciągła w przestrzeni E.

Niech w dalszym ciągu $(E,\cdot)$ będzie grupoidem Ehresmanna. Rozważmy dowolne zbiory V, V_1, V_2 zawarte w E. Przyjmijmy następujące znane /np. z [13]/ oznaczenia:

(IV.2) $V_1 \cdot V_2 \overset{df}{=} \{z : \bigvee_{x\in V_1} \bigvee_{y \in V_2} (z = x\cdot y)\}$,

(IV.3) $V^{-1} \overset{df}{=} \{z : \bigvee_{x\in V} (z = x^{-1})\}$.

Udowodnimy następujące

Twierdzenie 17. Grupoid Ehresmanna $(E,\cdot)$ gdzie E jest przestrzenią topologiczną z bazą Σ jest grupoidem topologicznym wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące dwa warunki:

W-3. Dla każdego otoczenia U elementu xy istnieją otoczenia V_1, V_2 elementów odpowiednio x,y takie, że

$$V_1 \cdot V_2 \subset U.$$

W-4. Dla każdego otoczenia U elementu x^{-1} istnieje otoczenie V elementu x, takie że:

$$V^{-1} \subset U.$$

Dowód.

Warunek W-4 jest w widoczny sposób równoważny ciągłości funkcji x^{-1}. Pozostaje więc udowodnić równoważność warunku W-3 z warunkiem a/ definicji 3. Ze względu na sposób zadania topologii w przestrzeni R, otoczeniami w tej przestrzeni są zbiory postaci:

(IV.4) $$U^* = (U_1 \times U_2) \cap R$$

gdzie U_1, U_2 są otoczeniami w przestrzeni R.

Ciągłość funkcji x.y w przestrzeni R oznacza /[13] str.64/, że dla zadanych, przemnażalnych elementów x_1, $y_1 \in E$ oraz dla zadanego otoczenia U elementu $x \cdot y_1$ istnieje otoczenie U^* pary (x_1, y_1) /przestrzeni R/ takie, że jeśli $(x,y) \in U^*$, to $x.y \in U$. Ze względu na (IV.4) warunek powyższy jest w dalszym ciągu równoważny następującemu warunkowi:

Dla zadanych przemnażalnych elementów x_1, $y_1 \in E$ oraz zadanego otoczenia U elementu $x_1 \cdot y_1$ istnieją otoczenia U_1, U_2 elementów odpowiednio x_1, y_1, takie, że:

$$U_1 \cdot U_2 \subset U.$$

W ten sposób dowód twierdzenia 17 został zakończony.

Jeśli rozważać grupę z zadaną w niej topologią przez bazę, to warunki W-4, W-3 są równoważne następującemu warunkowi /[13] str.94/:

W-5. Dla każdego otoczenia U elementu $x \cdot y^{-1}$ istnieją otoczenia U_1, U_2 elementów odpowiednio x,y takie, że

$$U_1 \cdot U_2 \subset U.$$

W przypadku grupoidu Ehresmanna /Brandta/ z topologią przez bazę w nim zadaną - w widoczny sposób z warunków W-3, W-4 wynika warunek W-5. Wynikanie odwrotne jednak nie zachodzi. Przekonuje nas o tym następujący

Przykład 2. Rozważmy grupoid parowy RxR, gdzie R jest zbiorem liczb rzeczywistych. Za bazę Σ przyjmujemy rodzinę zbiorów postaci:

$$U \stackrel{df}{=} \{(x_c, y) : a < y < b\},$$

gdzie x_c; a, b są dowolnymi elementami ze zbioru R, takimi że $a < b$. Jest bezpośrednio widoczne, że warunki W-1 i W-2 są spełnione. Sprawdzimy, że spełniony jest także warunek W-5. Weźmy w tym celu pod uwagę dowolne dwa elementy postaci (x_c, y_c), (x_1, y_c) oraz rozważmy element

$(x_c, y_c) \cdot (x_1, y_c)^{-1}$.

Mamy oczywiście:

$$(x_0,y_0)(x_1,y_0)^{-1} = (x_0,y_0)(y_0,x_1) = (x_0,x_1).$$

Rozważmy dowolne otoczenia U, U_1, U_2, elementów odpowiednio (x_0,x_1), (x_0,y_0), (x_1, x_0). Są to więc zbiory postaci:

$$U = \{(x_0,y): a_0 < y < b_0\}, \quad \text{gdzie} \quad a_0 < x_1 < b_0,$$
$$U_1 = \{(x_0,y): a_1 < y < b_1\}, \quad \text{gdzie} \quad a_1 < y_0 < b_1,$$
$$U_2 = \{(x_1,y): a_2 < y < b_2\}, \quad \text{gdzie} \quad a_2 < y_0 < b_2.$$

Mamy stąd:

$$U_2^{-1} = \{(y,x_1): a_2 < y < b_2\}$$

i w konsekwencji

$$U_1 \cdot U_2^{-1} = \{(x_0,x_1)\} \subset U.$$

Sprawdziliśmy więc, że spełniony jest warunek W-5. Nie jest natomiast spełniony warunek W-4, gdyż U_2^{-1} nie jest zawarte w żadnym otoczeniu.

Rozważmy dowolny grupoid topologiczny Brandta H. Niech φ będzie izomorfizmem /algebraicznym/ grupoidu H na grupoid postaci $A \times A \times \mathcal{G}$. Wprowadzimy w zbiorze $A \times A \times \mathcal{G}$ topologię tak, by funkcja φ była też homeomorfizmem. Wystarczy w tym celu za bazę w zbiorze $A \times A \times \mathcal{G}$ przyjąć rodzinę obrazów elementów bazy grupoidu H poprzez funkcję φ. Jest oczywiste /φ jest różnowartościowa/, że tak otrzymana rodzina zbiorów spełnia aksjomaty W-1, W-2, a więc można ją rzeczywiście uważać za bazę nowej przestrzeni. Ze względu na to, że izomorfizm "zachowuje działanie" jest przy tym bezpośrednio widoczne, że nowa baza spełnia aksjomaty W-3, W-4. Z tak wprowadzoną topologią grupoid $A \times A \times \mathcal{G}$ jest więc grupoidem topologicznym. Funkcja φ jest wtedy izomorfizmem grupoidu topologicznego H na grupoid topologiczny $A \times A \times \mathcal{G}$, gdzie przez izomorfizm grupoidów topologicznych rozumiemy izomorfizm algebraiczny, który jest homeomorfizmem.

Jest bezpośrednio widoczne, że w opisany sposób można otrzymać wszystkie takie topologie w grupoidzie $A \times A \times \mathcal{G}$, przy których staje się on grupoidem topologicznym. Postępowanie powyższe można przy tym odwrócić, tzn. można w podobny sposób indukować topologię z grupoidu topologicznego $A \times A \times \mathcal{G}$ na grupoid H /izomorficzny z grupoidem $A \times A \times \mathcal{G}$/, tak aby otrzymać grupoid topologiczny.

Powyższe rozważania można streścić w formie następującego

Twierdzenia 18. Każdy grupoid topologiczny Brandta jest izomorficzny z pewnym grupoidem topologicznym postaci $A \times A \times \mathcal{G}$.

Zajmiemy się teraz indukowaniem topologii z grupoidu $A \times A \times \mathcal{G}$ na grupę $\mathcal{G}$ i na zbiór A. Udowodnimy najpierw następujące

Twierdzenie 19. Niech rodzina Σ będzie bazą grupoidu topologicznego $A \times A \times \mathcal{G}$, a u_c dowolnie ustalonym elementem zbioru A. Wtedy rodzina Σ^* zbiorów postaci:

(IV.5) $U^* \overset{df}{=} \{x : (\mu_c, \mu_c, x) \in U\}$,

gdzie U jest dowolnym elementem bazy Σ, jest bazą grupy $\mathcal{G}$ i grupa $\mathcal{G}$ z tą bazą jest grupą topologiczną.

Dowód.

Jest bezpośrednio widoczne, że rodzina Σ^* pokrywa zbiór $\mathcal{G}$ oraz spełnia aksjomaty W-1 i W-2. Stanowi więc ona bazę przestrzeni $\mathcal{G}$.

Pokażemy, że spełniony jest aksjomat W-3. Rozważmy w tym celu dowolne otoczenie U^* elementu x.y. Istnieje wtedy $U \in \Sigma$ takie, że $(\mu_c, \mu_c, xy) \in U$ i U^* jest związane z U poprzez związek (IV.5). Mamy:

$$(\mu_c, \mu_c, x)(\mu_c, \mu_c, y) = (\mu_c, \mu_c, xy) \in U.$$

Stąd wobec przyjętego założenia, że $A \times A \times \mathcal{G}$ jest grupoidem topologicznym /a więc spełnia aksjomat W-3/ wynika, że istnieją otoczenia V_1, V_2 elementów odpowiednio $(\mu_c, \mu_c, x), (\mu_c, \mu_c, y)$ takie, że $V_1 \cdot V_2 \subset U$. Mamy wtedy:

$$(V_1 \cap (\{\mu_c\} \times \{\mu_c\} \times \mathcal{G})) \cdot (V_2 \cap (\{\mu_c\} \times \{\mu_c\} \times \mathcal{G})) \subset (V_1 \cap (\{\mu_c\} \times A \times \mathcal{G})) \cdot (V_2 \cap (A \times \{\mu_c\} \times \mathcal{G})) =$$

$$= (V_1 V_2) \cap (\{\mu_c\} \times \{\mu_c\} \times \mathcal{G}) \subset U \cap (\{\mu_c\} \times \{\mu_c\} \times \mathcal{G}).$$

Ze związku tego wynika, że $V_1^* \cdot V_2^* \subset U^*$.

Udowodniliśmy w ten sposób, że spełniony jest warunek W-3.

Udowodnimy z kolei, że spełniony jest warunek W-4. Rozważmy w tym celu dowolne otoczenie U^* elementu x^{-1}. Z określenia zbioru U^* wynika, że istnieje otoczenie U elementu (μ_c, μ_c, x^{-1}) takie, że U i U^* spełniają związek (IV.5). Mamy:

$$(\mu_c, \mu_c, x^{-1}) = (\mu_c, \mu_c, x)^{-1} \in U.$$

Istnieje zatem otoczenie V elementu (μ_c, μ_c, x) takie, że

$$V^{-1} \subset U.$$

Stąd otrzymujemy:

$$V \cap (\{\mu_c\} \times \{\mu_c\} \times \mathcal{G}))^{-1} = V^{-1} \cap (\{\mu_c\} \times \{\mu_c\} \times \mathcal{G}) \subset U.$$

Oznacza to, że $(V^*)^{-1} \subset V^*$. Ponadto oczywiście $x \in V^*$.

Spełniony więc jest warunek W-4. Zakończyliśmy w ten sposób dowód twierdzenia 19.

Topologię w grupie $\mathcal{G}$ wprowadzoną przy pomocy topologii w grupoidzie topologicznym $A \times A \times \mathcal{G}$ w sposób opisany w twierdzeniu 19 nazywać będziemy topologią indukowaną z grupoidu topologicznego $A \times A \times \mathcal{G}$ przez ustalenie dwóch pierwszych składowych /w przypadku twierdzenia 19 na tym samym elemencie μ_c /.

Jak pokażemy później, metodą opisaną w twierdzeniu 19 można również indukować topologię z grupoidu topologicznego $A \times A \times \mathcal{G}$ na zbiór A.

O takiej topologii mówić będziemy, że jest indukowana z topologii w grupoidzie topologicznym $A \times A \times \mathcal{G}$ przez ustalenie odpowiednich dwóch składowych /np. drugiej i trzeciej/.

Udowodnimy następujące

Twierdzenie 20. Topologia w grupie $\mathcal{G}$ indukowana z topologii w grupoidzie topologicznym $A \times A \times \mathcal{G}$ przez ustalenie dwóch pierwszych składowych nie zależy od wyboru tych składowych.

Dowód.

Niech rodzina Σ będzie bazą grupoidu topologicznego $A \times A \times \mathcal{G}$. Ustalmy dowolnie $\mu_0 \in A$ oraz wybierzmy ustalony element $(\mu_1, \nu_1) \in A \times A$. Rozważmy rodziny Σ^*, Σ^{**} zbiorów odpowiednio postaci:

$$U^* \overset{df}{=} \{x : (\mu_0, \mu_0, x) \in U\},$$

$$U^{**} \overset{df}{=} \{x : (\mu_1, \nu_1, x) \in U\}, \tag{IV.6}$$

gdzie w obu wypadkach U jest dowolnym elementem bazy Σ.

Jest widoczne, że rodziny Σ^*, Σ^{**} pokrywają grupę $\mathcal{G}$ oraz spełniają aksjomaty W-1, W-2. Stanowią więc bazy przestrzeni $\mathcal{G}$. Wykażemy, że bazy te są równoważne, a więc w konsekwencji, że odpowiednie topologie są identyczne. Wystarczy w tym celu udowodnić /[13] str.60/, że dla każdego otoczenia $U^* \in \Sigma^*$ elementu x istnieje otoczenie $U^{**} \in \Sigma^{**}$ tegoż elementu takie, że $U^{**} \subset U^*$ oraz na odwrót, że dla dowolnego otoczenia $V^{**} \in \Sigma^{**}$ elementu x istnieje otoczenie $V^* \in \Sigma^{**}$ elementu x takie, że $V^* \subset V^{**}$.

Rozważmy więc dowolne otoczenie U^* elementu $x \in \mathcal{G}$. Wobec postaci U^* (IV.5) istnieje otoczenie $U \in \Sigma$ elementu (μ_0, μ_0, x) takie, że U i U^* spełniają związek (IV.5).

Mamy:

$$(\mu_0, \mu_1, e)(\mu_1, \nu_1, x)(\nu_1, \mu_0, e) = (\mu_0, \mu_0, x) \in U. \tag{IV.7}$$

Analogicznym rozumowaniem jak w przypadku grupy topologicznej łatwo wykazać /w oparciu o warunek W-3/, że w grupoidzie topologicznym dla dowolnego otoczenia V elementu xyz istnieją otoczenia V_1, V_2, V_3 elementów odpowiednio x, y, z takie, że:

$$V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 \subset V,$$

gdzie "iloczyn" $V_1 \cdot V_2 \cdot V_3$ należy rozumieć jako naturalne uogólnienie "iloczynu" dwóch czynników (IV.2).

Ze związku (IV.7) wobec powyższej uwagi wynika, że istnieją takie otoczenia U_1, U_2, U_3 elementów odpowiednio $(\mu_0, \mu_1, e), (\mu_1, \nu_1, x), (\nu_1, \mu_0, e)$, że zachodzi:

$$U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 \subset U.$$

Korzystając z tego związku mamy:

$$(\mu_0, \mu_1, e) \cdot (U_2 \cap (\{\mu_1\} \times \{\nu_1\} \times \mathcal{G})) \cdot (\nu_1, \mu_0, e) \subset (U_1 \cap (\{\mu_0\} \times A \times \mathcal{G})) \cdot U_2 (U_3 \cap (A \times \{\mu_0\} \times \mathcal{G}) =$$

$= (U_1 \cdot U_2 \cdot U_3) \cap (\{\mu_c\} \times \{\mu_c\} \times \mathcal{G}) \subset U \cap (\{\mu_c\} \times \{\mu_c\} \times \mathcal{G})$.

Wynika stąd, że $U_2^{**} \subset U^*$. Ponadto ponieważ $(\mu_1, \nu_1, x) \in V_2$ więc $x \in V^{**}$. Pierwsza część dowodu została więc zakończona.

Zupełnie analogicznie przeprowadza się drugą część dowodu.

Zajmiemy się w dalszym ciągu indukowaniem topologii z grupoidu topologicznego $A \times A \times \mathcal{G}$ na zbiór A. Udowodnimy w związku z tym następujące

Twierdzenie 21. Wszystkie topologie indukowane z grupoidu topologicznego $A \times A \times \mathcal{G}$ na zbiór A poprzez ustalenie odpowiednich dwóch składowych są identyczne.

Dowód.

Wystarczy wykazać, że odpowiednie bazy są równoważne. Rozważmy w tym celu trzy przypadki.

1. Ustalamy dowolnie na dwa sposoby $((\nu_0, x_0), (\nu_1, x_1))$ drugą i trzecią składową w grupoidzie topologicznym $A \times A \times \mathcal{G}$. Niech Σ^*, Σ^{**} oznaczają rodziny zbiorów odpowiednio postaci:

(IV.7) $\quad U^* \overset{df}{=} \{\mu : (\mu, \nu_0, x_0) \in U\}$ dla $U \in \Sigma$,

(IV.8) $\quad U^{**} \overset{df}{=} \{\mu : (\mu, \nu_1, x_1) \in U\}$ dla $U \in \Sigma$,

gdzie Σ jest bazą grupoidu topologicznego $A \times A \times \mathcal{G}$. Jest oczywiste, że zarówno rodzina Σ^* jak i Σ^{**} stanowią pokrycie zbioru A oraz spełniają aksjomaty W-1, W-2. Można je więc uważać za bazy przestrzeni A.

Pokażemy, że bazy te są równoważne. Rozważmy w tym celu dowolne otoczenie U^* elementu μ_0. Istnieje wtedy otoczenie U elementu (μ_0, ν_0, x_0) spełniające (IV.7). Niech $\bar{x}$ będzie takim elementem grupy $\mathcal{G}$, że:

$$x_1 \cdot \bar{x} = x_c .$$

Mamy wtedy:

$$(\mu_c, \nu_1, x_1)(\nu_1, \nu_c, \bar{x}) = (\mu_c, \nu_c, x_c).$$

Istnieją więc na mocy W-3 takie otoczenia U_1, U_2 elementów odpowiednio $(\mu_c, \nu_1, x_1), (\nu_1, \nu_c, \bar{x})$, że:

$$U_1 \cdot U_2 \subset U .$$

Stąd otrzymujemy:

$(U_1 \cap (A \times \{\nu_1\} \times \{x_1\})) \cdot (\nu_1, \nu_0, \bar{x}) \subset (U_1 \cdot U_2) \cap (A \times \{\nu_0\} \times \{x_c\}) \subset (A \times \{\nu_c\} \times \{x_c\})$.

Wynika stąd, że $U_1^{**} \subset U^*$. Ponadto ponieważ $(\mu_c, \nu_1, x_1) \in U$ więc wobec (IV.8) mamy: $\mu_c \in U^{**}$.

Zupełnie analogicznie dowodzi się, że dla każdego otoczenia V^{**} elementu μ istnieje takie otoczenie V^* tego elementu, że $V^* \subset V^{**}$. Bazy Σ^*, Σ^{**} są więc równoważne.

2. Ustalmy dowolnie na dwa sposoby pierwszą i trzecią składową w grupoidzie topologicznym $A \times A \times \mathcal{G}$. Analogicznym sposobem jak w pierwszym przy-

padku można wykazać, że indukowane w ten sposób topologie w zbiorze A są identyczne.

3. Rozważmy dwie topologie indukowane w zbiorze A - jedną przez ustalenie /dowolne/ pierwszej i trzeciej składowej, drugą przez ustalenie drugiej i trzeciej składowej w grupoidzie topologicznym $A \times A \times \mathcal{G}$. Pokażemy, że takie topologie są identyczne.

Wobec udowodnionych przypadków 1 i 2 nie zmniejszymy ogólności zakładając, że pierwsza ustalona składowa w przypadku pierwszej topologii jest równa drugiej ustalonej składowej w przypadku drugiej topologii, natomiast w obu wypadkach trzecia składowa jest ustalona na elemencie neutralnym e.

Oznaczmy podobnie jak poprzednio przez Σ^*, Σ^{**} rodziny zbiorów odpowiednio postaci:

(IV.9) $\quad U^* = \{\nu : (\mu_c, \nu, e) \in U\}$ dla $U \in \Sigma$,

(IV.10) $\quad U^{**} = \{\mu : (\mu, \mu_c, e) \in U\}$ dla $U \in \Sigma$,

gdzie Σ jest bazą grupoidu topologicznego $A \times A \times \mathcal{G}$. Wykażemy, że rodziny Σ^*, Σ^{**} traktowane jako bazy przestrzeni A są równoważne.

Niech bowiem U^* będzie dowolnym otoczeniem elementu ν_0. Istnieje wtedy $U \in \Sigma$ takie, że $(\mu_0, \nu_0, e) \in U$ i U wraz z U^* spełniają warunek (IV.9). Mamy zatem:

$$(\nu_c, \mu_c, e)^{-1} = (\mu_c, \nu_c, e) \in U.$$

Wobec W-4 wynika stąd istnienie takiego otoczenia U_1 elementu (ν_c, μ_c, e), że zachodzi:

$$U_1^{-1} \subset U.$$

Stąd otrzymujemy:

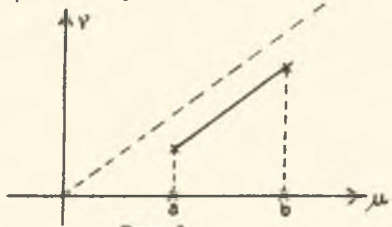
$$(U_1 \cap (A \times \{\mu_0\} \times \{e\}))^{-1} = U_1^{-1} \cap (\{\mu_c\} \times A \times \{e\}) \subset U \cap (\{\mu_c\} \times A \times \{e\}).$$

Wynika stąd, że $U_1^{**} \subset U^*$. Ponadto z faktu, że $(\nu_c, \mu_c, e) \in U_1$ i z (IV.10) wynika, że $\nu_c \in U_1^{**}$. Pierwsza część dowodu równoważności baz Σ^*, Σ^{**} została w ten sposób zakończona. Dowód drugiej części jest analogiczny.

Można oczywiście również indukować topologię z grupoidu topologicznego $A \times A \times \mathcal{G}$ na zbiór $A \times A$ przez ustalenie trzeciej składowej. Jednak tak wprowadzona topologia w zbiorze $A \times A$ zależy od wyboru ustalonej trzeciej składowej. Rozważmy bowiem następujący

Przykład 3. Niech A będzie zbiorem liczb rzeczywistych, a $\mathcal{G}$ grupą dwuelementową złożoną z elementów 0,1 z działaniem dodawania modulo 2. Rozważmy grupoid $A \times A \times \mathcal{G}$. Oznaczmy przez Σ rodzinę zbiorów składających się ze zbiorów jednoelementowych postaci $\{(\mu, \nu, 1)\}$ oraz ze zbiorów postaci:

(IV.11) $\quad U_{a,b,c} \overset{\mathrm{df}}{=} \{(\mu, \nu, 0) : \mu \in (a,b) \text{ i } \nu = \mu + c\}$, gdzie (a,b) oznacza niezerowy przedział otwarty o końcach a,b, a c jest dowolną stałą rzeczywistą. Zbiory $U_{a,b,c}$ można interpretować jako rzut równoległy do osi ν, przedziału otwartego niezerowego (a,b) na osi μ, na prostą $\nu = \mu + c$ /rys.1/.



Rys.1

Jest bezpośrednio widoczne, że rodzina Σ spełnia aksjomaty bazy. Sprawdzimy, że spełnione są aksjomaty W-3, W-4, a więc, że grupoid $A \times A \times G$ z topologią przez bazę Σ jest grupoidem topologicznym. Wprost z określenia bazy Σ wynika, że spełniony jest aksjomat W-4.

Dla sprawdzenia, że spełniony jest aksjomat W-3 rozważmy najpierw dwa elementy postaci: $(\mu_0, \nu_0, 0)$, $(\nu_0, \nu_1, 0)$.

Mamy:

$$(\mu_0, \nu_0, 0) \cdot (\nu_0, \nu_1, 0) = (\mu_0, \nu_1, 0).$$

Rozważmy dowolne otoczenie $U_{a,b,c}$ /postaci IV.11 / elementu $(\mu_0, \nu_1, 0)$.

Mamy wtedy:

(IV.12) $\mu_0 \in (a,b)$

i $\nu_1 = \mu_0 + c$, czyli $c = \nu_1 - \mu_0$.

Połóżmy:

$$U_1 \overset{df}{=} U_{a,b,\nu_0-\mu_0},$$

$$U_2 \overset{df}{=} U_{a+\nu_0-\mu_0,\, b+\nu_0-\mu_0,\, \nu_1-\nu_0}.$$

Z (IV.11) i (IV.12) wynika bezpośrednio, że:

$$(\mu_0, \nu_0, 0) \in U_1, \quad (\nu_0, \nu, 0) \in U_2.$$

Wobec określenia zbiorów U_1, U_2 mamy ponadto:

$$U_1 \cdot U_2 = \{(\mu, \nu, 0) : \mu \in (a,b) \text{ i } \nu = \mu + \nu_1 - \nu_0\} =$$

$$= \{(\mu, \nu, 0) : \mu \in (a,b) \text{ i } \nu = \mu + c\} = U_{a,b,c}.$$

Sprawdziliśmy w ten sposób, że dla elementów o trzeciej składowej zero spełniony jest aksjomat W-3. Spełniony jest też oczywiście aksjomat W-3 dla elementów postaci $(\mu_0, \nu_0, 1)$, $(\nu_0, \nu_1, 1)$. Otoczeniami bowiem tych elementów są zbiory jednoelementowe. Podobnie widoczne jest, że spełniony jest aksjomat W-3 dla elementów o różnych trzecich składowych. Rozważmy bowiem np. elementy postaci $(\mu_0, \nu_0, 1)$, $(\nu_0, \nu_1, 0)$. Wystarczy wtedy za U_2 wziąć dowolne otoczenie elementu $(\nu_0, \nu_1, 0)$. Wobec (IV.11) otrzymujemy:

$$\{(\mu_0, \nu_0, 1)\} \cdot U_2 = \{(\mu_0, \nu_0, 1)\}.$$

Analogicznie dowodzi się, że spełniony jest aksjomat W-3 dla elementów postaci $(\mu_0, \nu_0, 0), (\nu_0, \nu_1, 1)$.

Udowodniliśmy w ten sposób ostatecznie, że baza Σ spełnia aksjomaty W-3, W-4, a więc, że grupoid $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\times\mathcal{G}$ z bazą Σ jest grupoidem topologicznym.

Jest przy tym bezpośrednio widoczne, że ustalając trzecią składową w tym grupoidzie topologicznym raz na elemencie 0, a drugi raz na elemencie 1 otrzymamy dwie różne topologie /odpowiednie bazy nie są bowiem równoważne/.

Prawdziwe jest jednak następujące

Twierdzenie 22. Grupoid parowy $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ z topologią indukowaną z topologii w grupoidzie topologicznym $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\times\mathcal{G}$ przez ustalenie trzeciej składowej na elemencie neutralnym grupy G jest grupoidem topologicznym.

Dowód tego twierdzenia przeprowadza się podobnie jak dowód twierdzenia 19.

Udowodnimy z kolei następujące

Twierdzenie 23. Jeśli dany jest parowy grupoid topologiczny $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ i grupa topologiczna $\mathcal{G}$, to grupoid $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\times\mathcal{G}$ z topologią indukowaną z topologii w $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ i $\mathcal{G}$ na iloczyn kartezjański $(\mathcal{A}\times\mathcal{A})\times\mathcal{G}$ jest grupoidem topologicznym.

Dowód.

Sprawdzimy najpierw, że spełniony jest aksjomat W-3.

Rozważmy w tym celu dwa dowolne elementy postaci:

$$(\mu_0, \nu_0, x_0), (\nu_0, \nu_1, x_1).$$

Mamy oczywiście:

$$(\mu_0, \nu_0, x_0)(\nu_0, \nu_1, x_1) = (\mu_0, \nu_1, x_0 x_1),$$

$$(\mu_0, \nu_0)(\nu_0, \nu_1) = (\mu_0, \nu_1).$$

Niech U będzie dowolnym otoczeniem elementu $(\mu_0, \nu_0, x_0 x_1)$. Ze względu na rodzaj topologii w zbiorze $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\times\mathcal{G}$, U jest postaci:

(IV.13) $\quad U = V\times W,$

gdzie V jest pewnym otoczeniem elementu (μ_0, ν_1) a W jest pewnym otoczeniem elementu $x_0 x_1$.

Wobec przyjętych założeń istnieją takie otoczenia V_1, V_2 elementów odpowiednio (μ_0, ν_0), (ν_0, ν_1) oraz takie otoczenia W_1, W_2 elementów odpowiednio x_0, x_1, że zachodzi:

(IV.14) $\quad V_1\cdot V_2 \subset V, \quad W_1\cdot W_2 \subset W.$

Połóżmy:

(IV.15) $\quad U_1 \overset{df}{=} V_1\times W_1, \quad U_2 \overset{df}{=} V_2\times W_2.$

Z (IV.15), (IV.14) i (IV.13) otrzymujemy:

$$U_1\cdot U_2 = (V_1\times W_1)\cdot(V_2\times W_2) = (V_1\cdot V_2)\times(W_1\cdot W_2) \subset V\times W = U.$$

Dla sprawdzenia aksjomatu W-4 rozważmy dowolny element $(\mu_0, \nu_0, x_0)^{-1} = (\nu_0, \mu_0, x_0^{-1})$ oraz dowolne jego otoczenie $U = V \times W$, gdzie V jest pewnym otoczeniem elementu $(\mu_0, \nu_0)^{-1} = (\nu_0, \mu_0)$, a W jest pewnym otoczeniem elementu x_0^{-1}. Istnieje wtedy takie otoczenie V_1 elementu (μ_0, ν_0) i takie otoczenie W_1 elementu x_0, że zachodzi:

$$V_1^{-1} \subset V \ , \ W_1^{-1} \subset W.$$

Połóżmy: $U_1 = V_1 \times W_1$.

Otrzymujemy stąd: $(\mu_0, \nu_0, x_0) \in U_1$

i $U_1^{-1} = (V_1 \times W_1)^{-1} = V_1^{-1} \times W_1^{-1} \subset V \times W = U$.

Dowód twierdzenia 23 został w ten sposób zakończony.

W dalszym ciągu udowodnimy jeszcze jedno twierdzenie dotyczące związku między grupą topologiczną a grupoidem topologicznym. Będzie to następujące

Twierdzenie 24. Jeśli zadana jest dowolna topologia w zbiorze A, oraz taka topologia w grupie $\mathcal{G}$, że $\mathcal{G}$ jest grupą topologiczną, to grupoid $A \times A \times \mathcal{G}$ z topologią indukowaną z topologii w A i w $\mathcal{G}$ na iloczyn kartezjański $A \times A \times \mathcal{G}$ jest grupoidem topologicznym.

Dowód.

Wykażemy najpierw, że spełniony jest aksjomat W-3. Weźmy w tym celu pod uwagę dwa dowolne elementy postaci:

$$(\mu_0, \nu_0, x_0) \ , \ (\nu_0, \nu_1, x_1) \in A \times A \times \mathcal{G}$$

Mamy: $(\mu_0, \nu_0, x_0)(\nu_0, \nu_1, x_1) = (\mu_0, \nu_1, x_0 x_1)$.

Rozważmy dowolne otoczenie elementu $(\mu_0, \nu_1, x_0 x_1)$. Otoczenie to musi być postaci $U \times V_1 \times W$, gdzie U, V_1, W są otoczeniami odpowiednio elementów: μ_0, ν_1, $x_0 x_1$ /w odpowiednich przestrzeniach/.

Wobec założenia, że G jest grupą topologiczną istnieją takie otoczenia W_1, W_2 elementów odpowiednio x_0, x_1, że zachodzi:

$$W_1 \cdot W_2 \subset W.$$

Niech V będzie dowolnym otoczeniem elementu ν_0. Mamy wtedy:

$$(U \times V \times W)(V \times V_1 \times W_2) = U \times V_1 \times (W_1 \cdot W_2) \subset U \times V_1 \times W.$$

Zachodzi też:

$$(\mu_0, \nu_0, x_0) \in U \times V \times W_1 \ , \ (\nu_0, \nu_1, x_1) \in V \times V_1 \times W_2.$$

Udowodniliśmy więc, że spełniony jest aksjomat W-3.

Dla sprawdzenia warunku W-4 rozważmy dowolny element (μ_0, ν_0, x_0), element do niego odwrotny $(\mu_0, \nu_0, x_0)^{-1} = (\nu_0, \mu_0, x_0^{-1})$ oraz dowolne otoczenie elementu (ν_0, μ_0, x_0^{-1}). Otoczenie to jest postaci $V \times U \times W$, gdzie V, U, W są otoczeniami odpowiednio elementów ν_0, μ_0, x_0^{-1}.

Na podstawie przyjętego założenia istnieje takie otoczenie W_1 elementu x_0, że $W_1^{-1} \subset W$.

Mamy wtedy: $(U \times V \times W_1)^{-1} = V \times U \times W_1^{-1} \subset V \times U \times W$.

W połączeniu z faktem, że $(\mu_0, v_0, x_0) \in U \times V \times W_1$ oznacza to, że spełniony jest warunek W-4.

Zakończyliśmy w ten sposób dowód twierdzenia 24.

V. O pewnych własnościach ciągłych rozwiązań równania translacji na topologicznym grupoidzie Brandta spełniających warunek tożsamości

Ze względu na twierdzenie 11 /rozdz.III/ i twierdzenie 18/rozdz.IV/ możemy /nie ograniczając ogólności/ zawęzić nasze rozważania do grupoidów topologicznych postaci $A \times A \times \mathcal{G}$.

Udowodnimy najpierw następujące

Twierdzenie 25. Jeśli funkcja $F(\alpha, \mu, v, x)$ jest ciągłym na zbiorze $\Gamma \times (A \times A \times \mathcal{G})$ rozwiązaniem równania translacji na grupoidzie topologicznym $A \times A \times \mathcal{G}$ o wartościach z dowolnej przestrzeni topologicznej Γ, spełniającym warunek tożsamości, to istnieje takie przedstawienie funkcji F w postaci (III.22), w którym funkcje: $h(\alpha, v)$, $h^{-1}(\alpha, v)$, $H(\alpha, x)$ są ciągłe odpowiednio na zbiorach $\Gamma \times A$, $\Gamma \times A$, $\Gamma \times \mathcal{G}$ przy topologii w zbiorze A i grupie $\mathcal{G}$ indukowanej z topologii w grupoidzie topologicznym $A \times A \times \mathcal{G}$ przez ustalenie odpowiednich składowych /twierdzenie 21 i twierdzenie 19/.

Dowód.

Z twierdzenia 13 wynika, że funkcję F spełniającą równanie translacji i warunek tożsamości na grupoidzie $A \times A \times \mathcal{G}$ można przedstawić w postaci:

(V.1) $\quad F(\alpha, \mu, v, x) = h^{-1}(H[h(\alpha, v), x], \mu)$,

gdzie /zgodnie z umowami (III.13) i (III.17) w drugiej części dowodu twierdzenia 12/:

(V.2) $\quad h(\alpha, v) \overset{df}{=} F(\alpha, \mu_0, v, e)$,

(V.3) $\quad H(\alpha, x) \overset{df}{=} F(\alpha, \mu_0, \mu_0, x)$,

przy czym μ_0 jest dowolnie ustalonym elementem zbioru A.

Z faktu, że F spełnia równanie translacji i warunek tożsamości wynika związek:

$$F[F(\alpha, \mu_0, v, e), v, \mu_0, e] = F(\alpha, v, v, e) = \alpha .$$

Oznacza to, wobec (V.2), że:

(V.4) $\quad h^{-1}(\alpha, v) = F(\alpha, v, \mu_0, e)$.

Z ciągłości funkcji $F(\alpha, \mu, v, x)$ wynika ciągłość funkcji $F(\alpha, \mu_0, v, e)$ na zbiorze $\Gamma \times (\{\mu_0\} \times A \times \{e\})$, jeśli $\{\mu_0\} \times A \times \{e\}$ traktować jako podprzestrzeń przestrzeni $A \times A \times \mathcal{G}$ /[4] str.58/.

Ze względu na sposób zadania topologii w zbiorze A, oraz niezależność tej topologii od wyboru ustalanych elementów /tw.21/ wynika stąd w dalszym ciągu wobec (V.2) ciągłość funkcji $h(\alpha,\nu)$. Zupełnie podobnie w oparciu o związki (V.4) i (V.3) dowodzi się ciągłości funkcji $h^{-1}(\alpha,\nu)$ i funkcji $H(\alpha,x)$.

Udowodnione twierdzenie 25 nie oznacza wcale, że ciągłość funkcji $h(\alpha,\nu)$, $h^{-1}(\alpha,\nu)$, $H(\alpha,x)$ /przy takim ich znaczeniu jak w tw.13/ jest dla ciągłości funkcji F danej związkiem (III.22) warunkiem koniecznym. Ilustruje to następujący

Przykład 4. Niech A będzie przestrzenią liczb rzeczywistych ze zwykłą topologią, a $\mathcal{G}$ grupą topologiczną jednoelementową $\{1\}$. Wobec twierdzenia 24 grupoid $A\times A\times \mathcal{G}$ z topologią indukowaną z topologii w A i w $\mathcal{G}$ na iloczyn kartezjański $A\times A\times \mathcal{G}$ jest grupoidem topologicznym. Jest przy tym bezpośrednio widoczne, że topologie w zbiorze A i grupie G indukowane z topologii w tak otrzymanym grupoidzie topologicznym AxAxG przez ustalenie odpowiednich składowych, pokrywają się z wyjściowymi topologiami w tych zbiorach.

Niech Γ będzie zbiorem liczb rzeczywistych. Za bazę przestrzeni Γ przyjmijmy rodzinę złożoną z wszystkich niepustych przedziałów otwartych i z wszystkich zbiorów jednoelementowych utworzonych z liczb całkowitych. Jest widoczne, że rodzina ta spełnia rzeczywiście aksjomaty bazy.

Połóżmy:

$$h(\alpha,\nu) \overset{df}{=} \tfrac{1}{2}\alpha ,$$

$$H(\alpha,1) \overset{df}{=} \alpha .$$

Mamy stąd: $h^{-1}(\alpha,\nu) = 2\alpha$.

Łatwo zauważyć, że funkcja $h^{-1}(\alpha,\nu)$ nie jest ciągła, nie jest ona bowiem ciągła np. w żadnym punkcie postaci $(\frac{1}{2},\nu)$.

Rozważmy teraz funkcję F postaci:

$$F(\alpha,\mu,\nu,1) \overset{df}{=} h^{-1}(H[h(\alpha,\nu),1],\mu),$$

gdzie funkcje $h(\alpha,\nu)$, $h^{-1}(\alpha,\nu)$, $H(\alpha,x)$ mają poprzednio zdefiniowane znaczenie.

Mamy zatem:

$$F(\alpha,\mu,\nu,1) = 2\cdot(\tfrac{1}{2}\alpha) = \alpha .$$

Jest stąd widoczne, że tak określona funkcja F jest ciągła na przestrzeni $\Gamma\times(A\times A\times\mathcal{G})$.

Pokażemy teraz, że ciągłość funkcji $h(\alpha,\nu)$, $h^{-1}(\alpha,\nu)$, $H(\alpha,x)$ /przy takim ich znaczeniu jak w tw.13/ odpowiednio na zbiorach $\Gamma\times A$, $\Gamma\times A$, $\Gamma\times\mathcal{G}$ z dowolną topologią w zbiorze Γ, a topologią w A i w $\mathcal{G}$ indukowaną z topologii w grupoidzie topologicznym $A\times A\times\mathcal{G}$ przez ustalenie odpowiednich składowych nie jest dla ciągłości funkcji F zadanej związkiem (III.22) /na zbiorze $\Gamma\times(A\times A\times\mathcal{G})$/ warunkiem wystarczającym. Rozważmy w tym celu następujący

Przykład 5. Niech A będzie zbiorem liczb rzeczywistych różnych od zera, a $\mathcal{G}$ grupą jednoelementową $\{0\}$. W grupoidzie $A\times A\times\mathcal{G}$ wprowadzimy topologię przyjmując za otoczenia zawężenia zbiorów postaci (IV.11) /przykład 3/ do tego grupoidu. Analogicznym rozumowaniem jak w przykładzie 3 można wykazać, że grupoid $A\times A\times\mathcal{G}$ z tak zadaną topologią jest grupoidem topologicznym. Jest bezpośrednio widoczne, że topologia indukowana w zbiorze A i w grupie $\mathcal{G}$ z topologii w grupoidzie topologicznym $A\times A\times\mathcal{G}$ przez ustalenie odpowiednich składowych jest dyskretna.

Niech Γ będzie przestrzenią liczb rzeczywistych różnych od zera z dyskretną topologią.

Połóżmy:

(V.5) $H(\alpha,0)\overset{df}{=}\alpha,$

(V.6) $h(\alpha,\nu)\overset{df}{=}\nu\cdot\alpha.$

Z (V.6) mamy / $h(\alpha,\nu)$ jest funkcją zmiennej α z parametrem ν /:

(V.7) $h^{-1}(\alpha,\nu)=\frac{1}{\nu}\alpha.$

Ze względu na to, że A, $\mathcal{G}$ i Γ są przestrzeniami dyskretnymi, jest bezpośrednio widoczne, że funkcje $H(\alpha,0)$, $h(\alpha,\nu)$, $h^{-1}(\alpha,\nu)$ są ciągłe.

Rozważmy funkcję F zadaną związkiem:

$$F(\alpha,\mu,\nu,0)\overset{df}{=}h^{-1}(H[h(\alpha,\nu),0],\mu).$$

Wobec (V.5), (V.6) i (V.7) mamy stąd:

(V.8) $F(\alpha,\mu,\nu,0)=\frac{\nu}{\mu}\alpha.$

Pokażemy, że tak określona funkcja F nie jest ciągła na zbiorze $\Gamma\times(A\times A\times\mathcal{G})$. Wystarczy oczywiście wykazać w tym celu, że funkcja ta nie jest ciągła względem drugiej zmiennej przebiegającej grupoid topologiczny $A\times A\times\mathcal{G}$. Ustalmy w tym celu dowolnie α_0 oraz μ_0, ν_0 tak aby $\mu_0\neq\nu_0$.

Oznaczmy: $\beta_0=F(\alpha_0,(\mu_0,\nu_0,0))$.

Mamy wtedy:

(V.9) $\beta_0=\frac{\nu_0}{\mu_0}\alpha_0\neq\alpha_0.$

Wyznaczymy przeciwobraz zbioru $\{\beta_0\}$ poprzez funkcję F /przy ustalonym α_0/. Wobec (V.8) przeciwobraz ten jest zbiorem postaci:

$$Z=\{(\mu,\nu,0):\frac{\nu}{\mu}\alpha_0=\beta_0\}=\{(\mu,\nu,0):\nu=\frac{\beta_0}{\alpha_0}\mu\}.$$

Z (V.9) mamy: $\frac{\beta_0}{\alpha_0}\neq1.$

Wynika stąd wobec przyjętej topologii w grupoidzie topologicznym $A\times A\times\mathcal{G}$, że zbiór Z nie jest sumą otoczeń, a więc nie jest zbiorem otwartym. Zbiór $\{\beta_0\}$ jest natomiast otwarty, gdyż w Γ topologia jest dyskretna. Prowadzi to do wniosku, że funkcja F nie jest ciągła.

Dla dalszych rozważań przyjmijmy następującą

Definicję 14. Rozważmy dowolny grupoid topologiczny $A \times A \times G$. Niech rodzina Σ będzie bazą tego grupoidu topologicznego. Oznaczmy przez Σ^* bazę przestrzeni $A \times A \times G$ otrzymaną przez indukowanie topologii z grupoidu topologicznego $A \times A \times G$ na zbiór A i grupę G przez ustalenie odpowiednich składowych, a następnie indukowanie tak otrzymanych topologii na iloczyn kartezjański $A \times A \times G$. Topologię tego typu nazywać będziemy podwójnie indukowaną. Grupoid topologiczny $A \times A \times G$ nazywać będziemy półkartezjańskim, jeśli do każdego otoczenia $U \in \Sigma$ elementu (μ, ν, x) istnieje takie otoczenie $U^* \in \Sigma^*$ tego elementu, że zachodzi:

$$U \subset U^*.$$

Jeśli ponadto zachodzi warunek odwrotny /czyli w konsekwencji bazy Σ, Σ^* są równoważne/ to grupoid topologiczny $A \times A \times G$ nazwiemy kartezjańskim.

Będziemy też mówić w tych przypadkach, że grupoid topologiczny AxAxG ma topologię półkartezjańską /kartezjańską/.

Prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 26. Jeśli grupoid topologiczny $A \times A \times G$ jest półkartezjański i funkcje: $h(\alpha, \nu)$, $h^{-1}(\alpha, \nu)$, $H(\alpha, x)$ /określone w tw.13/ są ciągłe przy topologii w zbiorze A i grupie G indukowanej z topologii w grupoidzie topologicznym $A \times A \times G$ przez ustalenie odpowiednich składowych /Γ jest dowolną przestrzenią topologiczną/, to funkcja F zadana związkiem (III.22) na zbiorze $\Gamma \times (A \times A \times G)$ jest ciągła przy wyjściowej topologii w grupoidzie $A \times A \times G$.

Dowód.

Ze względu na rodzaj przyjętej topologii w zbiorze A i grupie G jest bezpośrednio widoczne, że z ciągłości funkcji $h(\alpha, \nu)$, $h^{-1}(\alpha, \nu)$, $H(\alpha, x)$ wynika ciągłość funkcji F, jeśli w grupoidzie $A \times A \times G$ przyjąć topologię podwójnie indukowaną. Wynika stąd, że do każdego otoczenia V elementu $\beta_0 = F(\alpha_0, (\mu_0, \nu_0, x_0))$ istnieje takie otoczenie $V_1 \times U^*$, gdzie V_1 jest pewnym otoczeniem elementu α_0, a U^* jest otoczeniem /przy topologii podwójnie indukowanej/ elementu (μ_0, ν_0, x_0), że zachodzi:

$$F(V_1 \times U^*) \subset V.$$

Ponieważ grupoid $A \times A \times G$ jest półkartezjański, więc do otoczenia U^* można dobrać takie otoczenie U elementu (μ_0, ν_0, x_0) /przy wyjściowej topologii/, że $U \subset U^*$.

Stąd i z poprzedniego zawierania otrzymujemy:

$$F(V_1 \times U) \subset F(V_1 \times U^*) \subset V.$$

Otrzymany związek prowadzi do wniosku, że funkcja F jest ciągła przy wyjściowej topologii w grupoidzie $A \times A \times G$.

Wszystkie poczynione w twierdzeniu 26 założenia topologiczne są istotne, a więc w konsekwencji i wzajemnie niezależne.

Istotności założenia, że grupoid topologiczny $A\times A\times \mathcal{G}$ jest półkartezjański dowodzi przykład 5.

Dla wykazania, że ciągłość funkcji $h(\alpha,\nu)$ jest w twierdzeniu 26 założeniem istotnym, rozważmy następujący

Przykład 6. Niech A będzie przestrzenią liczb naturalnych z dyskretną topologią, $\mathcal{G}$ grupą topologiczną jednoelementową $\{1\}$, a Γ przestrzenią liczb rzeczywistych z taką topologią jak w przykładzie 4.

Rozważmy grupoid topologiczny $A\times A\times \mathcal{G}$ z topologią indukowaną z topologii w A i w $\mathcal{G}$ na iloczyn kartezjański $A\times A\times \mathcal{G}$. Jest widoczne, że grupoid ten jest półkartezjański /nawet kartezjański/. Topologia indukowana z tego grupoidu topologicznego na zbiór A i grupę $\mathcal{G}$ przez ustalenie odpowiednich składowych pokrywa się oczywiście z wyjściową topologią w tych zbiorach.

Połóżmy: $h(\alpha,\nu) \overset{df}{=} \nu\cdot\alpha$, $H(\alpha,1) \overset{df}{=} \alpha$.

Mamy stąd: $h^{-1}(\alpha,\nu) = \frac{1}{\nu}\alpha$.

Łatwo sprawdzić, że funkcje $H(\alpha,1)$, $h^{-1}(\alpha,\nu)$ są ciągłe. Nie jest natomiast ciągła funkcja $h(\alpha,\nu)$ /np. w punkcie $(\frac{1}{2},2)$/. Nie jest też ciągła funkcja:

$$F(\alpha,(\mu,\nu,1)) \overset{df}{=} h^{-1}(H[h(\alpha,\nu),1],\mu) = \frac{\nu}{\mu}\alpha.$$

Dla pokazania, że ciągłość funkcji $h^{-1}(\alpha,\nu)$ jest w rozważanym twierdzeniu istotna wystarczy tylko nieco zmodyfikować przykład 6 kładąc:

$$h(\alpha,\nu) \overset{df}{=} \frac{1}{\nu}\alpha.$$

Pokażemy jeszcze, że ciągłość funkcji $H(\alpha,x)$ jest w twierdzeniu 26 założeniem istotnym. Weźmy w tym celu pod uwagę dowolne nieciągłe rozwiązanie $H(\alpha,x)$ równania translacji na zbiorze $\Gamma\times A$ /Γ -pewna przestrzeń topologiczna, $\mathcal{G}$- grupa topologiczna/ spełniające warunek tożsamości. Przykłady takich rozwiązań zawarte są w nocie [10]. Rozważmy ponadto jednoelementową przestrzeń topologiczną $\{a\}$ i grupoid topologiczny $\{a\}\times\{a\}\times \mathcal{G}$ /z topologią indukowaną z $\{a\}$ i z $\mathcal{G}$/.

Połóżmy: $h(\alpha,a) \overset{df}{=} \alpha$.

Stąd otrzymujemy:

$$h^{-1}(\alpha,a) = \alpha.$$

Jest widoczne, że funkcje $h(\alpha,a)$, $h^{-1}(\alpha,a)$ są ciągłe. Nie jest natomiast ciągła funkcja:

$$F(\alpha,(a,a,x)) \overset{df}{=} h^{-1}(H[h(\alpha,a),x],a) = H(\alpha,x).$$

W oparciu o twierdzenie 26 udowodnimy następujące

Twierdzenie 27. Jeśli $A\times A\times \mathcal{G}$ jest grupoidem topologicznym półkartezjańskim. Γ jest dowolną przestrzenią topologiczną,a $F(\alpha,(\mu,\nu,x))$ jest takim rozwiązaniem równania translacji na zbiorze $\Gamma\times(A\times A\times \mathcal{G})$, że

spełniony jest warunek tożsamości i przy pewnym μ_0 z A funkcje:
$F(\alpha,(\mu_0,\nu,e))$, $F(\alpha,(\nu,\mu_0,e))$, $F(\alpha,(\mu_0,\mu_0,x))$
są ciągłe odpowiednio na podprzestrzeniach: $\Gamma\times(\{\mu_0\}\times A\times\{e\})$, $\Gamma\times(A\times\{\mu_0\}\times\{e\})$, $\Gamma\times(\{\mu_0\}\times\{\mu_0\}\times\mathcal{G})$ przestrzeni $\Gamma\times(A\times A\times\mathcal{G})$, to funkcja $F(\alpha,(\mu,\nu,x))$ jest ciągła na $\Gamma\times(A\times A\times\mathcal{G})$.

Dowód.

Wobec przyjętych założeń jest widoczne, że funkcje $h(\alpha,\nu)$, $h^{-1}(\alpha,\nu)$, $H(\alpha,x)$ określone związkami (V.2)-(V.4), przy topologii w zbiorze A i grupie $\mathcal{G}$ indukowanej z topologii w grupoidzie topologicznym A x A x G /przez ustalenie odpowiednich składowych/ są ciągłe. Spełnione są więc założenia twierdzenia 26, a to kończy dowód.

Podobnie jak w twierdzeniu 26 wszystkie przyjęte w twierdzeniu 27 założenia topologiczne są istotne, a więc i wzajemnie niezależne. Dowodzą tego przykłady uzasadniające istotność założeń topologicznych w twierdzeniu 26.

Rozważania dotyczące ciągłych rozwiązań równania translacji na grupoidzie topologicznym $A\times A\times\mathcal{G}$ można poszerzyć o znane już pewne wyniki dotyczące ciągłych rozwiązań równania translacji na grupie topologicznej.

Wiadomo jest /np. z [9]/, że jeśli Γ oznacza dowolny zbiór, a G dowolną grupę, to każde rozwiązanie F równania translacji na zbiorze $\Gamma\times\mathcal{G}$ spełniające warunek tranzytywności:

(V.10) $$\bigwedge_{\alpha,\beta\in\Gamma}\ \bigvee_{x\in\mathcal{G}} (F(\alpha,x)=\beta)$$

można przedstawić w postaci:

(V.11) $$F(\alpha,x)=\Psi^{-1}(x\,\Psi(\alpha)),$$ gdzie

(V.12) $$\Psi(\alpha)\overset{df}{=}\{x\in\mathcal{G}: F(\alpha_0,x)=\alpha\}.$$

/α_0 jest dowolnie ustalonym elementem z Γ/.

Funkcja $\Psi(\alpha)$ określona związkiem (V.12) przekształca wzajemnie jednoznacznie zbiór Γ na zbiór warstw lewostronnych grupy $\mathcal{G}$ względem pewnej jej podgrupy $\mathcal{G}^*$.

Z [9] wiadomo również, że każda funkcja F postaci:

(V.13) $$F(\alpha,x)\overset{df}{=}g^{-1}(x\,g(\alpha)) \text{ dla } \alpha\in\Gamma,\ x\in\mathcal{G},$$

gdzie g jest dowolną funkcją przekształcającą wzajemnie jednoznacznie zbiór Γ na zbiór warstw lewostronnych grupy $\mathcal{G}$ względem pewnej jej podgrupy $\mathcal{G}^*$, spełnia równanie translacji i warunek tranzytywności (V.10).

S. Pontriagin pokazał / [13] str.239/, że przy naturalnej topologii w zbiorze warstw, z ciągłości funkcji $F(\alpha,x)$ spełniającej równanie translacji i warunek tranzytywności wynika ciągłość funkcji $\Psi^{-1}(\alpha)$. Z ciągłości funkcji F /spełniającej równanie translacji i warunek tranzytywności/

nie wynika natomiast /nawet przy pewnych dodatkowych założeniach topologicznych - [10]/ ciągłość funkcji $\Psi(\alpha)$ określonej związkiem (V.12)/zob. np. [3] str.29, 48/. Ciągłości funkcji γ dotyczy udowodnione w [11] następujące

<u>Twierdzenie 28</u>. Jeśli Γ jest przestrzenią Hausdorffa lokalnie dwuzwartą przynajmniej w jednym punkcie, $\mathcal{G}$ grupą topologiczną półdwuzwartą /sumą przeliczalnej ilości zbiorów dwuzwartych/ a funkcja F określona na $\Gamma \times \mathcal{G}$ spełnia równanie translacji i warunek tranzytywności oraz dwa następujące warunki:

a/ istnieje takie α_0 z Γ, że funkcja $F(\alpha_0, x)$ jest ciągła względem x w każdym punkcie przestrzeni $\mathcal{G}$,

b/ dla każdego x z $\mathcal{G}$ funkcja $F(\alpha, x)$ jest ciągła względem α na Γ,

to funkcja $\Psi(\alpha)$ określona związkiem (V.12) jest ciągła /oczywiście przy naturalnej topologii w zbiorze odpowiednich warstw/.

Jest bezpośrednio widoczne, że jeśli w zbiorze warstw lewostronnych grupy $\mathcal{G}$ względem podgrupy $\mathcal{G}^*$ przyjąć topologię naturalną, to z ciągłości funkcji $g(\alpha)$ i $g^{-1}(\alpha)$ wynika ciągłość funkcji F określonej związkiem (V.13).

Z przytoczonych tu wyników dotyczących ciągłych rozwiązań równania translacji na grupie i z podanych przez nas twierdzeń dotyczących ciągłych rozwiązań równania translacji na grupoidzie postaci A x A x G /twierdzenie 25, 26 i przykład 5/ widać, że w tych dwóch przypadkach sytuacje przedstawiają się w pewnym sensie odwrotnie. W przypadku grupy z ciągłości funkcji F spełniającej równanie translacji i warunek tranzytywności nie wynika ciągłość funkcji $\Psi(\alpha)$ określonej związkiem (V.12), a z ciągłości funkcji $g(\alpha)$ i $g^{-1}(\alpha)$ wynika ciągłość funkcji F określonej związkiem (V.13). Natomiast w przypadku grupoidu $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{G}$ z ciągłości funkcji F spełniającej równanie translacji i warunek tożsamości wynika ciągłość stosownie określonych funkcji $h(\alpha, \nu)$, $h^{-1}(\alpha, \nu)$, $H(\alpha, x)$ występujących w ogólnym rozwiązaniu, nie zachodzi zaś wynikanie odwrotne.

Zaznaczmy na zakończenie, że podane przez nas pewne wyniki dotyczące ciągłych rozwiązań równania translacji na grupoidzie topologicznym postaci $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{G}$ można było tak prosto uzyskać głównie dzięki temu, że rozważaliśmy tylko rozwiązania spełniające warunek tożsamości. Istotny zwłaszcza dla prowadzonych poprzednio rozważań był fakt, że przy założeniu spełniania przez rozwiązanie równania translacji warunku tożsamości, występujące w rozwiązaniu zbiory Γ_ν pokrywają się ze zbiorem Γ. W przypadku gdy od rozwiązania nie żądamy spełniania warunku tożsamości,występujące w rozwiązaniu funkcje $h(\alpha, \nu)$, $h^{-1}(\alpha, \nu)$ mają odpowiednio - pierwsza za dziedzinę, a druga za przeciwdziedzinę,zmieniający się zbiór Γ_ν.

Dlatego też wydaje się, że uzyskanie w tym przypadku analogicznych do podanych przez nas wyników, a zwłaszcza uzyskanie twierdzenia odpowiadającego twierdzeniu 26 napotka na znaczne trudności.

W szczególności - prawdopodobnie konieczne będzie nałożenie pewnych warunków topologicznych na zbiory Γ_v.

Prace cytowane

[1] J. Aczel und S. Gołąb: Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte, Warszawa 1960.

[2] N. Bourbaki: Éléments de mathématique, Livre II, Algèbre, Chapitre I, Structures algebriques, Paris 1951.

[3] Н. Бурбаки: Общая топология, топологические группы, Москва 1969.

[4] R. Engelking: Zarys topologii ogólnej, Warszawa 1965.

[5] S. Łojasiewicz: Sur le problème d'itération, Coll. Math. Vol.III, 2 1955, str.176-177.

[6] A. Krupińska et Z. Moszner: Sur la notion d'objet géométrique attaché, II, Ann.Pol.Math. XXII 1969, str. 101-106.

[7] M. Kucharzewski: Elementy teorii obiektów geometrycznych /skrypt/, Katowice 1969.

[8] S. Midura et Z. Moszner: Quelques remarques au sujet de la notion de l'objet et de l'objet géométrique, Ann.Pol.Math. XVIII 1966, s.323-338.

[9] Z. Moszner: Solution générale de l'equation de translation et ses applications - Aeq Math. t.1,3, 1968, str.291-293.

[10] Z. Moszner: Sur un théorème de la théorie des groupes continus des transformations, Compt. Rend. de l'Acad. des Sciences de Paris, 268, 1969, str.769-771.

[11] Z. Moszner: O pewnym twierdzeniu z teorii pewnych grup przekształceń, Rocznik Naukowo-Dydaktyczny WSP w Krakowie - w druku.

[12] A. Nijenhuis: Theory of the geometric object /rozprawa doktorska/, Amsterdam 1952.

[13] L.S. Pontriagin: Grupy topologiczne, Warszawa 1961.

[14] W. Waliszewski: Categories, grupoides, pseudogroups and analitical structures, Rozprawy Matematyczne, XLV 1965.

[15] A. Zajtz: Algebraic objects, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Jagiellońskiego /prace matematyczne/, zeszyt 12 /1968/, str.67-79.

S u m m a r y

Structure of the general solution of translation equation on Ehresmann's groupoid and invariant decompositions of this groupoid

We prove in this paper that every invariant decomposition of Brandt's groupoid of the form $A \times A \times \mathcal{G}$ may be constructed as follows:

1. Let $A = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{L}} A_\alpha$

be an arbitrary decomposition of A / A_α being disjoint and non-empty sets/.

2. For every α from L a subgroup $\mathcal{G}_\alpha$ of $\mathcal{G}$ and a function

$$b_\alpha(v): A_\alpha \to \mathcal{G}$$

are admited arbitrarily.

3. Let

$$C_{\mu,\alpha.a} \overset{df}{=} \{(\mu, v, x): v \in A_\alpha \wedge x \in a\mathcal{G}_\alpha b_\alpha(v)\},$$

where $\mu \in A, \alpha \in \mathcal{L}$, $a \in \mathcal{G}$.

The family built of all different $C_{\mu,\alpha,a}$ is a decomposition of $A \times A \times \mathcal{G}$.

4. Let $\{H_s\}_{s \in S}$ be an over - decomposition of one constructed in 3, which holds the condition:

if $C_{\mu_1,\alpha_1,a_1}, C_{\mu_1,\alpha_2,a_2} \subset H_s$, than $C_{\mu_1,\alpha_1,a_1} = C_{\mu_1,\alpha_2,a_2}$.

The family of sets $\{H_s\}_{s \in S}$ is the desired invariant decomposition.

The author continues proving that general solution of the equation:

(1) $F[F(\alpha, x), y] = F(\alpha, yx)$, $\alpha \in \Gamma$; $x, y \in H$,

where H is a groupoid of the form $A \times A \times \mathcal{G}$ has the following form:

$$F(\alpha, (\mu, v, x)) = h^{-1}(H(h(\varphi(\alpha, v), v), x), \mu)$$

for $\alpha \in \Gamma$, $\mu, v \in A$, $x \in \mathcal{G}$,

where

1. φ is an arbitrary function transforming $\Gamma \times A$ into Γ, which satisfies two condition:

a/ $\varphi[\varphi(\alpha, v), v] = \varphi(\alpha, v)$, for $\alpha \in \Gamma$, $v \in A$,

b/ sets of the form $\Gamma_v \overset{df}{=} \varphi(\Gamma \times \{v\})$ have the same power,

2. $h(\alpha, v)$ is an arbitrary one-to-one function transforming Γ_v into Γ_{μ_0}, where μ_0 is a constant element of A,

3. $H(\alpha, x)$ is an arbitrary function defined on $\Gamma_{\mu_0} \times \mathcal{G}$ which holds equation (1) and so that

$$H(\alpha, 1) = \alpha.$$

With regard to the fact that every Brandt's grupoid is isomorphic with some groupoid of the form $A \times A \times \mathcal{G}$, those results are easily trans-

fered for any Brandt's groupoid H. For example, to obtain general solution of (1) on a Brandt's groupoid H, it is enough choose arbitrarily an isomorphism f of H onto a groupoid of the form $A\times A\times G$ and to put

$$F(\alpha,x) \stackrel{df}{=} \overset{*}{F}(\alpha, f(x)), \qquad \text{for } \alpha\in\Gamma,\ x\in H,$$

where $\overset{*}{F}$ is the general solution of (1) on the groupoid $A\times A\times G$.

Considering the fact that every Ehresmann's groupoid is composed of disjoint Brandt's groupoids, the form of invariant decompositions of this groupoid and the general solution of (1) on this groupoid can be found easily.

In the next part of the paper topological Ehresmann's groupoid is defined and some connections among topological groupoid $A\times A\times G$ and topological group G are established. The result of this part and the general solution of (1) are used for proving some necessary conditions and some sufficient conditions, that the solution of (1) on Brandt's topological groupoid, satisfying the idendity condition, be continuous.

Р е з ю м е

ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ СДВИГА НА ГРУППОИДЕ ЭРЕСМАНА И ИНВАРИАНТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭТОГО ГРУППОИДА

В этой работе доказываем, что всякое инвариантное распределение группоида Брандта вида $A\times A\times G$ получаем следующим образом:

1. Принимаем произвольное разложение множества A на непересекающиеся непустые множества

$$A=\bigcup_{\alpha\in\mathcal{L}} A_\alpha .$$

2. Для любого $\alpha\in\mathcal{L}$ подбираем произвольную подгруппу G_α группы G, затем определяем произвольным образом функцию:

$$b_\alpha(v):\ A_\alpha\to G.$$

3. Строим семейство множеств вида:

$$C_{\mu,\alpha,a} \stackrel{df}{=} \{(\mu,v,x):\ v\in A_\alpha \wedge x\in a\,G_\alpha\, b_\alpha(v)\},$$

где $\mu\in A$, $\alpha\in\mathcal{L}$, $a\in G$.

Семейство после отождествления идентичных множеств является распределением множества $A\times A\times G$.

4. Принимаем надраспределение $\{H_s\}_{s\in S}$ распределения $\{C_{\mu,\alpha,a}\}$ также, что из $C_{\mu_1,\alpha_1,a_1}, C_{\mu_1,\alpha_2,a_2} \subset H_s$ следует $C_{\mu_1,\alpha_1,a_1} = C_{\mu_1,\alpha_2,a_2}$.
Семейство $\{H_s\}_{s\in S}$ является требуемым инвариантным распределением.

Далее доказываем, что общее решение уравнения (1) $F[F(\alpha,x),y] = F(\alpha,yx)$, $\alpha\in\Gamma$, $x,y\in H$ если H есть группоидом вида $A\times A\times G$, принимает вид

$$F(\alpha,(\mu,\nu,x)) = h^{-1}(H(h(\varphi(\alpha,\nu),\nu),x),\mu),\ \alpha\in\Gamma,\ \mu,\nu\in A,\ x\in G,$$

где

1. φ является произвольной функцией, отображающей множество $\Gamma\times A$ в множество Γ, выполняющей следующие условия:

а/ $\varphi[\varphi(\alpha,\nu),\nu] = \varphi(\alpha,\nu)$, $\alpha\in\Gamma$, $\nu\in A$,

б/ множества вида $\Gamma_\nu \overset{df}{=} \varphi(\Gamma\times\{\nu\})$ являются равномощными,

2. $h(\alpha,\nu)$ является произвольной функцией / ν считаем параметром/, инъективно отображающей множество Γ_ν на множество Γ_{μ_0}, где μ_0 - произвольно фиксированный элемент множества A,

3. $H(\alpha,x)$ является произвольной функцией, определенной на множестве $\Gamma_{\mu_0}\times G$, удовлетворяющей уравнению (1) и выполняющей условие

$$H(\alpha,1) = \alpha.$$

Из-за того, что любой группоид Брандта - изоморфичным некоторому группоиду вида $A\times A\times G$, полученные результаты переносятся на случай произвольного группоида Брандта. Итак, например, для определения общего решения уравнения (1) на произвольном группоиде Брандта H достаточно построить любой изоморфизм f группоида H на группоид вида $A\times A\times G$ и положить:

$$F(\alpha,x) \overset{df}{=} \overset{*}{F}(\alpha,f(x)),\quad \alpha\in\Gamma,\ x\in H,$$

где $\overset{*}{F}$ - общее решение уравнения (1) на группоиде $A\times A\times G$.

Учитывая факт, что всякий группоид Ересмана является суммой непересекающихся группоидов Брандта, определяется вид инвариантных распределений этого группоида а также общее решение уравнения (1) на этом группоиде.

Следующая часть работы посвящена определению топологического группоида Эресмана и указанию некоторых связей между топологическим группоидом и топологической группой G. Используя результаты этой части работы и общее решение уравнения (1), доказываются некоторые необходимые условия и некоторые достаточные условия для того, чтобы решение уравнения (1), исполняющее условие идентичности на топологическом группоиде Брандта, являлось непрерывным.