ROCZNIK NAUKOWO - DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE

Zeszyt 41 Prace matematyczne VI Rok 1970

Erwin Turdza

PEWNE UWAGI O STABILNOŚCI RÓWNANIA FUNKCYJNEGO $\varphi(f(x)) = g(x)\varphi(x) + F(x)$

W pracy rozważać będziemy stabilność równania liniowego jednorodnego

(1) $$\varphi(f(x)) = g(x)\varphi(x)$$

oraz niejednorodnego

(2) $$\varphi(f(x)) = g(x)\varphi(x) + F(x),$$

gdzie $f(x)$, $g(x)$, $F(x)$ są funkcjami danymi a $\varphi(x)$ jest funkcją niewiadomą. Problem stabilności równań funkcyjnych po raz pierwszy był rozważany przez D.H. Hyersa [2] dla równania Couchy'ego

(3) $$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

D.H. Hyers nazywa równanie (3) stabilnym w zbiorze E /patrz [2]/ jeśli istnieje stała $K>0$ taka, że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ i każdego rozwiązania $\psi(x)$ nierówności

(4) $$|\psi(x+y) - \psi(x) - \psi(y)| \leqslant \varepsilon \qquad \text{dla} \quad x \in E$$

istnieje rozwiązanie $\varphi(x)$ równania (3) takie, że

(5) $$|\psi(x) - \varphi(x)| < K\varepsilon \qquad \text{dla} \quad x \in E.$$

Problem stabilności równań jednej zmiennej został postawiony w pracy [1] dla równania (2). Dalsze wyniki dotyczące stabilności równań jednej zmiennej były przedstawione w pracach [4] (dla równania (2)) i [5] (dla równania nieliniowego).

<u>Definicja 1</u>. Równanie (2) nazywamy stabilnym w przedziale I względem klasy $C(I)$ wszystkich funkcji ciągłych na I, jeśli istnieje stała $K > 0$ taka, że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ i dowolnego ciągłego rozwiązania $\psi(x)$ nierówności

(6) $$|\psi(f(x)) - g(x)\psi(x) - F(x)| < \varepsilon \qquad \text{dla} \quad x \in I$$

istnieje ciągłe rozwiązanie $\varphi(x)$ równania (2) określone na przedziale I takie, że

(7) $|\psi(x) - \varphi(x)| \leqslant K\varepsilon$ dla $x \in I$.

Równanie (1) /a więc i równanie (2)/, jak to pokazał D. Brydak w [1], nie zawsze jest stabilne w sensie powyższej definicji /patrz [1]/. W pracach [1] i [4] rozważana była stabilność równania liniowego według następującej innej definicji [1]:

Definicja 2. Równanie (2) nazywamy stabilnym w przedziale I względem klasy C(I) wszystkich funkcji ciągłych na I, jeśli istnieje stała $K > 0$ taka, że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ i dowolnego ciągłego rozwiązania $\psi(x)$ nierówności

(8) $\left|\psi(f^n(x)) - G_n(x)\psi(x) - G_n(x)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{F(f^i(x))}{G_{i+1}(x)}\right| \leqslant K\varepsilon$ dla $n = 1,2,\ldots$, $x \in I$,

gdzie

(9) $G_n(x) \overset{df}{=} \prod_{i=0}^{n-1} g(f^i(x))$ $n = 1,2,\ldots$,

istnieje ciągłe rozwiązanie $\varphi(x)$ równania (2) określone na przedziale I takie, że

(10) $|\psi(x) - \varphi(x)| \leqslant K\varepsilon$ dla $x \in I$.

Zarówno ilość rozwiązań jak i stabilność równań liniowych zależy od zachowania się ciągu $G_n(x)$ ([3] str.48 i 52).

W pracach [1] i [4] udowodniono stabilność równania liniowego w sensie definicji 2 w pewnych przypadkach. W tej pracy w § 1 uzupełnimy wyniki podane w [1] i [4], gdzie nie był rozpatrywany przypadek, gdy $\lim_{n\to\infty} G_n(x) = \infty$. Zasadnicze wyniki pracy podane są w § 2, gdzie udowodnimy pewne twierdzenia o stabilności równania (2) w sensie definicji 1.

§ 1. W dalszym ciągu będziemy stale przyjmować następujące założenia:

($\mathfrak{Z}_1$) Funkcja $g(x)$ jest ciągła w przedziale I oraz $g(x) \neq 0$ dla $x \in I$.

($\mathfrak{Z}_2$) Funkcja $f(x)$ jest silnie rosnąca i ciągła w przedziale I i ponadto istnieje punkt $\xi \in I$ taki, że

$$(f(x)-x)(\xi - x) > 0 \quad \text{dla } x \in I,\ x \neq \xi \quad \text{oraz}$$
$$(f(x)-\xi)(\xi - x) < 0 \quad \text{dla } x \in I,\ x \neq \xi.$$

($\mathfrak{Z}_3$) Funkcja $F(x)$ jest ciągła w przedziale I.

Uwaga 1. Z ($\mathfrak{Z}_2$) wynika /[3] str.21/, że ξ jest punktem stałym funkcji $f(x)$ w I oraz, że $f(I) \subset I$.

Uwaga 2. Jeśli ξ jest punktem wewnętrznym przedziału I wówczas zakładamy, że I jest przedziałem otwartym. Jeśli ξ jest końcem przedziału I wówczas zakładamy, że I jest jednostronnie otwarty.

Uwaga 3. Przedział I może być nieskończony. Wyniki przedstawione w tej pracy pozostaną słuszne także wtedy, gdy $\xi = \pm\infty$. Wtedy żądanie ciągłości rozwiązania w punkcie ξ zastępujemy żądaniem istnienia skończonej granicy $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$. W przypadku gdy $\xi = -\infty\ (+\infty)$ zamiast przedziału $(\xi, \xi+\delta)$ $((\xi-\delta, \xi))$ /patrz [3] str.47/ rozpatrujemy przedział $(-\infty, A)$ $((A, +\infty))$ jako otoczenie punktu ξ.

W dalszym ciągu będziemy zakładać, że $I = [\xi, b)$. W tym przypadku z $(\mathfrak{X}_2)$ wynika, że

(11) $f(x) < x$ dla $x \in I$, $x \neq \xi$.

W przypadku gdy ξ jest prawym końcem przedziału I zamiast nierówności (11) otrzymujemy nierówność $f(x) > x$ dla $x \in I$, $x \neq \xi$ i wyniki uzyskane w pracy pozostaną także prawdziwe. W przypadku gdy ξ jest punktem wewnętrznym przedziału $I = (a,b)$ wyniki pracy będą się odnosiły do przedziałów $(a, \xi]$ i $[\xi, b)$. Łącząc otrzymane dla tych dwu przedziałów wyniki możemy uzyskać pewne twierdzenia dla całego przedziału (a,b).

Podamy teraz twierdzenie, które dotyczy stabilności według definicji 2 równania liniowego w przypadku, który nie był rozważany w [1] i [4].

Twierdzenie 1. Jeśli spełnione są założenia $(\mathfrak{X}_1)$, $(\mathfrak{X}_2)$, $(\mathfrak{X}_3)$ oraz

(12) $|g(\xi)| > 1$

wówczas równanie (2) jest stabilne w sensie definicji 2.

Dowód.

Niech funkcja ciągła $\Psi(x)$ będzie rozwiązaniem nierówności (8) przy pewnym $\varepsilon > 0$. Otrzymujemy stąd

(13) $$\left|\frac{\Psi(f^n(x))}{G_n(x)} - \Psi(x) - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{F(f^i(x))}{G_{i+1}(x)}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{|G_n(x)|}$$ dla $n = 1,2,\ldots, x \in I$.

Z (12) wynika /[3] str.53/, że $\lim\limits_{n\to\infty}|G_n(x)| = \infty$ dla $x \in I$. Z ciągłości funkcji $\Psi(x)$ w I oraz z faktu, że $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = \xi$ wynika, że granica ciągu $\Psi(f^n(x))$ jest skończona. A stąd z kolei otrzymujemy

(14) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\Psi(f^n(x))}{G_n(x)} = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\varepsilon}{G_n(x)} = 0$$ oraz

(15) $$\lim_{n\to\infty}\left|\Psi(x) + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{F(f^i(x))}{G_{i+1}(x)}\right| = 0$$ dla $x \in I$.

Z założeń twierdzenia 1 wynika /[3] str.53/, że szereg $-\sum\frac{F(f^i(x))}{G_{i+1}(x)}$ jest zbieżny do funkcji ciągłej $\varphi(x)$ będącej rozwiązaniem równania (2), co z (15) daje nam

(16) $$\Psi(x) = -\sum_{i=0}^{\infty}\frac{F(f^i(x))}{G_{i+1}(x)}$$ dla $x \in I$.

Tak więc jedynym ciągłym rozwiązaniem nierówności (8) w I jest ciągłe rozwiązanie równania (2) w I, co dowodzi stabilności równania (2) w sensie definicji 2.

<u>Wniosek 1</u>. Jeśli spełnione są założenia $(\mathcal{X}_1)$, $(\mathcal{X}_2)$ i $F(x) \equiv 0$ dla $x \in I$, wówczas zamiast założenia (12) wystarczy przyjąć $\lim_{n\to\infty}|G_n(x)| = \infty$ aby równanie (1) było stabilne w I w sensie definicji 2 /wynika to z dowodu twierdzenia 1 i z faktu, że równanie (1) ma wtedy w klasie funkcji C(I) tylko rozwiązanie $\varphi(x) = 0$ dla $x \in I$ ([3] str.48)/.

<u>Uwaga 4</u>. Równanie (1) /a więc i równanie (2)/ nie jest stabilne w sensie definicji 1 w przypadku gdy zachodzi (12) o czym przekonuje nas następujący przykład. Przyjmijmy $I = [0,1)$, $f(x) = \frac{x}{2}$, $g(x) = 2(1-x)$. Wówczas rozwiązaniem nierówności $|\psi(\frac{x}{2}) - 2(1-x)\psi(x)| \leqslant \varepsilon$ jest funkcja $\psi(x) = \frac{\varepsilon}{1-x}$ ciągła dla $x \in [0,1)$, bo $\left|\frac{\varepsilon}{1-\frac{x}{2}} - 2(1-x)\frac{\varepsilon}{1-x}\right| = \left|\frac{2\varepsilon}{2-x} - 2\varepsilon\right| = 2\varepsilon\left|\frac{-1+x}{2-x}\right| \leqslant \varepsilon$ dla $x \in [0,1)$. Mamy dalej $\lim_{x\to 1^-} \frac{\varepsilon}{1-x} = \infty$, natomiast jedynym ciągłym rozwiązaniem równania $\varphi(\frac{x}{2}) = 2(1-x)\varphi(x)$ w $[0,1)$ jest funkcja $\varphi(x) = 0$ dla $x \in [0,1)$ ([3] str.51). Nierówność (10) nie jest spełniona w $[0,1)$ dla żadnego $K > 0$.

§ 2. W [1] i [4] udowodniono przy pewnych założeniach stabilność równania (1) w sensie definicji 2. Celem niniejszego paragrafu jest ustalenie kiedy równanie (1) jest stabilne w I sensie definicji 1.

<u>Lemat 1</u>. Niech spełnione będą założenia $(\mathcal{X}_1)$, $(\mathcal{X}_2)$ oraz niech funkcja ciągła $\psi(x)$ spełnia nierówność (6) przy $F(x) \equiv 0$ dla ustalonego $\varepsilon > 0$. Wówczas jeśli

$$|g(\xi)| < 1, \tag{17}$$

to dla każdego wewnętrznego punktu x_0 przedziału I istnieje stała $C_1(x_0) > 0$ taka, że nierówność

$$|\psi(f^n(x)) - C_1(x)\psi(x)| \leqslant C_1(x_0)\,\varepsilon \qquad n = 1,2,\ldots \tag{18}$$

spełniona jest dla wszystkich $x \in I$, $x \leqslant x_0$.

<u>Dowód</u>.

Niech ε będzie liczbą dodatnią a $\psi(x)$ ciągłym rozwiązaniem nierówności (6). Wtedy na mocy (6) mamy dla każdego $n = 1,2,\ldots$ i każdego $x \in I$

$$|\psi(f^n(x)) - G_n(x)\psi(x)| = |\psi(f^n(x)) - g(f^{n-1}(x))\psi(f^{n-1}(x)) + g(f^{n-1}(x))\psi(f^{n-1}(x)) +$$

$$- g(f^{n-2}(x))g(f^{n-1}(x))\psi(f^{n-2}(x)) + g(f^{n-2}(x))g(f^{n-1}(x))\psi(f^{n-2}(x)) + \ldots - G_n(x)\psi(x)| \leqslant$$

$$\leqslant |\psi(f^n(x)) - g(f^{n-1}(x))\psi(f^{n-1}(x))| + |g(f^{n-1}(x))|\,|\psi(f^{n-1}(x)) - g(f^{n-2}(x))\psi(f^{n-2}(x))| +$$

$$+ |g(f^{n-1}(x))g(f^{n-2}(x))| \cdot |\psi(f^{n-2}(x)) - g(f^{n-3}(x))\psi(f^{n-3}(x))| + \ldots + |g(f(x))g(f^2(x)) \ldots g(f^{n-1}(x))| \cdot |\psi(f(x)) - g(x)$$

$$\leqslant \varepsilon + \varepsilon|g(f^{n-1}(x))| + \varepsilon|g(f^{n-1}(x))g(f^{n-2}(x))| + \ldots + \varepsilon|g(f(x))\,g(f^2(x)) \cdot \ldots \cdot g(f^{n-1}(x))| =$$

$$= \varepsilon\,(1 + |g(f^{n-1}(x))| + |g(f^{n-2}(x))\,g(f^{n-1}(x)) + \ldots + |g(f(x)g(f^2(x)) \cdot \ldots \cdot g(f^{n-1}(x))|).$$

Niech x_0 będzie dowolnym punktem wewnętrznym przedziału I. Nierówność (17) oraz ciągłość funkcji $g(x)$ gwarantuje istnienie liczb $\delta>0$ i $0<\beta<1$ takich, że

(19) $$|g(x)| < 1-\beta \qquad \text{dla } x \in [\xi, \xi+\delta).$$

Z $(\mathfrak{X}_2)$ wynika ([3] str.21), że $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \xi$ dla wszystkich $x \in I$. Stąd wynika, że istnieje liczba naturalna $\mathcal{N}_0$ taka, że $f^k(x_0) \in [\xi, \xi+\delta)$ dla $k > \mathcal{N}_0$. Stąd, z kolei i z tego, że funkcja $f(x)$ jest rosnąca wynika, że $f^k(x) \in [\xi, \xi+\delta)$ dla $k > \mathcal{N}_0$, $x \in I, x \leqslant x_0$.

Z warunku (19) otrzymujemy więc $|g(f^k(x))| \leqslant 1-\beta$ dla $k > \mathcal{N}_0, x \in I, x \leqslant x_0$.

Z ostatniej nierówności otrzymujemy

$$\varepsilon(1+|g(f^{n-1}(x))|+|g(f^{n-2}(x))g(f^{n-1}(x))|+\ldots+|g(f(x))g(f^2(x))\ldots g(f^{n-1}(x))|) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon(1+(1-\beta)+(1-\beta)^2+\ldots+(1-\beta)^{n-\mathcal{N}_0-1}+(1-\beta)^{n-\mathcal{N}_0-1}|g(f^{\mathcal{N}_0}(x))|+$$

$$+(1-\beta)^{n-\mathcal{N}_0-1}|g(f^{\mathcal{N}_0}(x))g(f^{\mathcal{N}_0-1}(x))|+\ldots+$$

$$+(1-\beta)^{n-\mathcal{N}_0-1}|g(f^{\mathcal{N}_0}(x))g(f^{\mathcal{N}_0-1}(x))\ldots g(f(x))|).$$

Przyjmijmy $\gamma = \sup_{x\in[\xi,x_0]} |g(x)|$. Ciągłość funkcji $g(x)$ w $[\xi, x_0]$ gwarantuje nam, że $\gamma < \infty$. Mamy także $0 < 1-\beta < 1$, skąd

$$(1-\beta)^{n-\mathcal{N}_0-1}|g(f^{\mathcal{N}_0}(x))|+(1-\beta)^{n-\mathcal{N}_0-1}|g(f^{\mathcal{N}_0}(x))g(f^{\mathcal{N}_0-1}(x))|+\ldots$$

$$\ldots+(1-\beta)^{n-\mathcal{N}_0-1}|g(f^{\mathcal{N}_0}(x))g(f^{\mathcal{N}_0-1}(x))\ldots g(f(x))| \leqslant \gamma+\gamma^2+\ldots+\gamma^{\mathcal{N}_0} \text{ dla } x\in I, x\leqslant x_0.$$

Ponieważ

$$1+(1-\beta)+(1-\beta)^2+\ldots+(1-\beta)^{n-\mathcal{N}_0-1} \leqslant \frac{1}{\beta} \qquad \text{dla } n = 1,2,\ldots$$

więc kładąc

$$C_1(x_0) = \frac{1}{\beta}+\gamma+\gamma^2+\ldots+\gamma^{\mathcal{N}_0}$$

otrzymujemy stąd (18) dla $n = 1,2,\ldots$, $x \in I, x \leqslant x_0$, co należało okazać.

Ponieważ z (17) wynika, że istnieje punkt x_1 taki, że przedział $[f(x_1), x_1] \subset I$ oraz $G_n(x) \underset{[f(x_1),x_1]}{\Longrightarrow} 0$ /patrz [3] str. 51 / więc jako bezpośredni wniosek z [1] (twierdzenie 2) i lematu 1 otrzymujemy

Twierdzenie 2. Jeśli spełnione są założenia $(\mathfrak{X}_1)$ i $(\mathfrak{X}_2)$ oraz nierówność (17) wówczas równanie (1) jest stabilne w sensie definicji 1 w każdym przedziale $[\xi, x_0]$, gdzie x_0 jest dowolnym wewnętrznym punktem przedziału I.

Lemat 2. Niech spełnione będą założenia $(\mathfrak{X}_1)$, $(\mathfrak{X}_2)$, nierówność (6) przy $F(x) \equiv 0$ i niech $\lim_{n\to\infty} f^{-n}(x) = b$ dla $x \in I, x \neq \xi$. Jeśli istnieją liczby dodatnie α i δ takie, że

(20) $$|g(x)| > 1+\alpha \qquad \text{dla } x \in (b-\delta, b),$$

to dla każdego wewnętrznego punktu x_0 przedziału I istnieje stała $C_2(x_0)$ taka, że nierówność

$$(21)\qquad \left|\frac{\psi(x)}{G_n(x)} - \psi(f^{-n}(x))\right| \leqslant C_2(x_0)\cdot\varepsilon ,$$

gdzie

$$(22)\qquad G_n(x) \overset{df}{=\!=} \begin{cases} 1 & \text{dla } n=0 \\ \prod_{i=1}^{n} g(f^{-i}(x)) & \text{dla } n=1,2,\ldots \end{cases}$$

spełniona jest dla $n = 1,2,\ldots$ oraz wszystkich $x\in I, x \geqslant x_0$.

Dowód.

Niech x_0 będzie dowolnym punktem wewnętrznym przedziału I, ε liczbą dodatnią, a $\psi(x)$ ciągłym rozwiązaniem nierówności (6). Wtedy z (6) mamy

$$\left|\frac{\psi(x)}{G(x)} - \psi(f^{-n}(x))\right| = \left|\frac{\psi(x)}{G(x)} - \frac{g(f^{-1}(x))\psi(f^{-1}(x))}{G_n(x)} + \frac{g(f^{-1}(x))\psi(f^{-1}(x))}{G_n(x)} + \right.$$
$$- \frac{g(f^{-2}(x))\psi(f^{-2}(x))}{g(f^{-2}(x))\ldots g(f^{-n}(x))} + \frac{g(f^{-2}(x))\psi(f^{-2}(x))}{g(f^{-2}(x))\ldots g(f^{-n}(x))} + \ldots + - \frac{g(f^{-n+1}(x))\psi(f^{-n+1}(x))}{g(f^{-n+1}(x))g(f^{-n}(x))} +$$
$$\left. + \frac{g(f^{-n+1}(x))\psi(f^{-n+1}(x))}{g(f^{-n+1}(x))g(f^{-n}(x))} - \psi(f^{-n}(x))\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{1}{g(f^{-1}(x))\cdot\ldots g(f^{-n}(x))}\right|\cdot\left|\psi(x) - g(f^{-1}(x))\psi(f^{-1}(x))\right| + \left|\frac{1}{g(f^{-2}(x))\ldots g(f^{-n}(x))}\right|\cdot\left|\psi(f^{-1}(x)) - g(f^{-2}(x))\psi(f^{-2}(x))\right| +$$
$$\ldots + \left|\frac{1}{g(f^{-n}(x))}\right|\cdot\left|\psi(f^{-n+1}(x)) - g(f^{-n}(x))\psi(f^{-n}(x))\right| \leqslant \varepsilon\left(\left|\frac{1}{g(f^{-1}(x))\cdot\ldots g(f^{-n}(x))}\right| +\right.$$
$$\left. + \left|\frac{1}{g(f^{-2}(x))\cdot\ldots\cdot g(f^{-n}(x))}\right| + \ldots + \left|\frac{1}{g(f^{-n}(x))}\right|\right).$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} f^{-n}(x_0) = b$ i ciąg $f^{-n}(x_0)$ jest rosnący dla $x\in I$ więc istnieje liczba naturalna $\mathcal{N}_1$ taka, że $f^{-k}(x_0) \in (b-\delta, b)$ dla $k > \mathcal{N}_1$. Stąd i z tego, że funkcja $f^{-1}(x)$ jest rosnąca w I wynika, że $f^{-k}(x) \in (b-\delta, b)$ dla $k > \mathcal{N}_1$, $x\in I, x > x_0$. Ostatni warunek i nierówność (20) dają nam $|g(f^{-k}(x))| > 1+\alpha$ dla $k > \mathcal{N}_1$, $x\in I, x > x_0$, skąd otrzymujemy

$$\varepsilon\left(\left|\frac{1}{g(f^{-1}(x))\ldots g(f^{-n}(x))}\right| + \left|\frac{1}{g(f^{-2}(x))\cdot\ldots\cdot g(f^{-n}(x))}\right| + \ldots + \left|\frac{1}{g(f^{-n}(x))}\right|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\left(\left|\frac{1}{g(f^{-1}(x))\cdot\ldots\cdot g(f^{-\mathcal{N}_1}(x))(1+\alpha)^{n-\mathcal{N}_1}}\right| + \ldots + \left|\frac{1}{g(f^{-\mathcal{N}_1}(x))\cdot(1+\alpha)^{n-\mathcal{N}_1}}\right| +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{(1+\alpha)^{n-\mathcal{N}_1}} + \ldots + \frac{1}{1+\alpha}\right) \leqslant \varepsilon\left(\frac{1}{\sigma^{\mathcal{N}_1}(1+\alpha)^{n-\mathcal{N}_1}} + \ldots + \frac{1}{\sigma(1+\alpha)^{n-\mathcal{N}_1}} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{(1+\alpha)^{n-\mathcal{N}_1}} + \ldots + \frac{1}{1+\alpha}\right), \text{ gdzie } \sigma = \inf_{x\in[\xi, b)} |g(x)|.$$

Z założeń lematu 2 wynika, że $\frac{1}{\sigma} < \infty$. Mamy także $0 < \frac{1}{1+\alpha} < 1$, więc

$$\frac{1}{\sigma^{\varkappa_1}(1+\alpha)^{n-\varkappa_1}} + \ldots + \frac{1}{\sigma(1+\alpha)^{n-\varkappa_1}} + \frac{1}{(1+\alpha)^{n-\varkappa_1}} \leqslant \frac{1}{\sigma^{\varkappa_1}} + \ldots + \frac{1}{\sigma}$$

oraz

$$\frac{1}{(1+\alpha)^{n-\varkappa_1}} + \ldots + \frac{1}{1+\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha},$$

skąd, przyjmując $C_2(x_0) = \frac{1}{\sigma^{\varkappa_1}} + \ldots + \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\alpha}$, otrzymujemy (21) dla n=1,2,... $x \in I, x \geqslant x_0$.

W analogiczny sposób można udowodnić

<u>Lemat 3</u>. Niech spełnione będą założenia $(\mathfrak{X}_1)$, $(\mathfrak{X}_2)$ oraz niech istnieje $x_0 \in (\xi, b)$ i taka liczba naturalna r, że $f^{-r}(x_0) < b < f^{-r-1}(x_0)$. Jeśli istnieją liczby dodatnie α i δ takie, że $|g(x)| > 1+\alpha$ dla $x \in (b-\delta, b)$, wówczas istnieje stała $C_3(x_0)$ taka, że nierówność (6) przy $F(x) \equiv 0$ pociąga nierówność (21) dla $n = 1,2,\ldots,r+1$, $x \geqslant x_0, x \in I$.

Ponieważ z (17) wynika, że istnieje punkt x_1 taki, że przedział $[f(x_1), x_1] \subset I$ oraz $G_n(x) \underset{[f(x_1),x_1]}{\rightrightarrows} 0$ /patrz [3] str.51/, więc jako bezpośredni wniosek z [4] (lemat 2, twierdzenie 1) i lematu 1 otrzymujemy

<u>Twierdzenie 3</u>. Jeśli spełnione są założenia $(\mathfrak{X}_1)$ i $(\mathfrak{X}_2)$ oraz nierówność (20), to równanie (1) jest stabilne w sensie definicji 1 w $[x_0, b)$ dla $\xi < x_0 < b$.

Twierdzenie 2 i twierdzenie 3 mówią o stabilności równania (1) w pewnych podprzedziałach przedziału I przy założeniach dotyczących zachowania się funkcji $g(x)$ w odpowiednich końcach przedziału I. Połączeniem wyników twierdzenia 2 i 3 jest

<u>Twierdzenie 4</u>. Jeśli spełnione są założenia $(\mathfrak{X}_1)$, $(\mathfrak{X}_2)$ oraz nierówności (17) i (20), wówczas równanie (1) jest stabilne w sensie definicji 1 w przedziale I.

<u>Dowód</u>. Niech x_0 będzie dowolnym punktem wewnętrznym przedziału I a $\Psi(x)$ ciągłym rozwiązaniem nierówności (6) przy pewnym $\varepsilon > 0$. Z lematów 1,2 i 3 wynika, że istnieją stałe dodatnie $C_1(x_0)$, $C_2(x_0)$, $C_3(x_0)$ takie, dla których spełnione są nierówności odpowiednio (18) i (21) w przedziałach $[\xi, x_0]$ i $[x_0, b]$. Przyjmując $C(x_0) = \max\{C_1(x_0), C_2(x_0), C_3(x_0)\}$ stwierdzamy, że nierówności (18) i (21) spełnione są dla stałej dodatniej $C(x_0)$ w przedziałach odpowiednio $[\xi, x_0]$ i $[x_0, b)$. Fakt ten, po uwzględnieniu [1] (twierdzenie 2) i [4] (twierdzenie 1 i 2) dowodzi stabilności równania (1) w przedziale I.

<u>Twierdzenie 5</u>. Niech spełnione będą założenia $(\mathfrak{X}_1)$ i $(\mathfrak{X}_2)$ oraz nierówność (17). Niech ponadto istnieją liczby dodatnie α i δ takie, że $|g(x)| < 1-\alpha$ dla $x \in (b-\delta, b)$. Wtedy istnieje stała $C > 0$ taka, że dla każdego ciągłego rozwiązania $\Psi(x)$ nierówności (6), gdzie $F(x) \equiv 0$,

nierówność

(23) $\quad |\Psi(f^n(x)) - G_n(x)\Psi(x)| \leqslant C\cdot\varepsilon \quad$ dla $\quad x\in I,\ n=1,2,\ldots$

jest spełniona.

Dowód. Z (6) analogicznie jak w dowodzie lematu 1 otrzymujemy

$$|\Psi(f^n(x)) - G_n(x)\Psi(x)| \leqslant \varepsilon\,(1 + |g(f^{n-1}(x))| + |g(f^{n-2}(x))\,g(f^{n-1}(x))| + \ldots +$$
$$+ |g(f(x))\,g(f^2(x))\cdot\ldots\cdot g(f^{n-1}(x))|\,).$$

Z (17) wynika, że istnieją liczby dodatnie α_1 i δ_1 takie, że $|g(x)|<1-\alpha_1$ dla $x\in[\xi,\xi+\delta_1)$. Przyjmijmy $\mathcal{M} = \sup_{x\in[\xi+\delta_1,\,b-\delta]}|g(x)|$.

Z ciągłości funkcji $g(x)$ w I wnioskujemy, że $\mathcal{M}<\infty$. Z faktu, że $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \xi$ dla $x\in I$ wnosimy, że istnieje liczba naturalna $\mathcal{N}_0$ taka, że

(24) $\quad f^n(b-\delta)\in[\xi,\ \xi+\delta_1] \quad$ dla $n\geqslant\mathcal{N}_0$ i $f^{\mathcal{N}_0-1}(b-\delta) > \xi+\delta_1$.

Z (11) wynika, że dla każdego $x\in(b-\delta,\, b)$ istnieje liczba naturalna $\mathcal{N}(x)$ taka, że

(25) $\quad f^{\mathcal{N}(x)}(x) \leqslant b-\delta < f^{\mathcal{N}(x)-1}(x)$.

Z faktu, że $f(x)$ jest funkcją rosnącą oraz (24) i (25) wynika, że $f^n(x)\in[\xi,\xi+\delta_1]$ dla $n\geqslant\mathcal{N}(x)+\mathcal{N}_0$. A stąd

$$\varepsilon\,(1+|g(f^{n-1}(x))|+|g(f^{n-2}(x))\,g(f^{n-1}(x))|+\ldots+|g(f(x))\,g(f^2(x))\cdot\ldots\cdot g(f^{n-1}(x))|)=$$
$$=\varepsilon(1+|g(f^{n-1}(x))| + \ldots + |g(f^{\mathcal{N}_0+\mathcal{N}(x)}(x))\cdot\ldots\cdot g(f^{n-1}(x))| + |g(f^{\mathcal{N}_0+\mathcal{N}(x)-1}(x))\cdot\ldots\cdot g(f^{n-1}(x))|+\ldots$$
$$\ldots+|g(f^{\mathcal{N}(x)}(x))\,g(f^{\mathcal{N}(x)+1}(x))\cdot\ldots\cdot g(f^{\mathcal{N}_0+\mathcal{N}(x)}(x))\cdot\ldots\cdot g(f^{n-1}(x))| +$$
$$+ |g(f(x))\,g(f^2(x))\cdot\ldots\cdot g(f^{n-1}(x))|\,) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\,(1+(1-\alpha_1)+\ldots+(1-\alpha_1)^{n-\mathcal{N}_0-\mathcal{N}(x)} + \mathcal{M}(1-\alpha_1)^{n-\mathcal{N}_0-\mathcal{N}(x)} +$$
$$+\mathcal{M}^2(1-\alpha_1)^{n-\mathcal{N}_0-\mathcal{N}(x)}+\ldots+\mathcal{M}^{\mathcal{N}_0}(1-\alpha_1)^{n-\mathcal{N}_0-\mathcal{N}(x)} + (1-\alpha)\mathcal{M}^{\mathcal{N}_0}(1-\alpha_1)^{n-\mathcal{N}_0-\mathcal{N}(x)} +$$
$$+(1-\alpha)^2\mathcal{M}^{\mathcal{N}_0}(1-\alpha_1)^{n-\mathcal{N}_0-\mathcal{N}(x)}+\ldots+(1-\alpha)^{\mathcal{N}(x)}\mathcal{M}^{\mathcal{N}_0}(1-\alpha_1)^{n-\mathcal{N}_0-\mathcal{N}(x)}) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\Big(\frac{1}{\alpha_1}+\mathcal{M}+\mathcal{M}^2+\ldots+\mathcal{M}^{\mathcal{N}_0}+\mathcal{M}^{\mathcal{N}_0}\frac{1}{\alpha}\Big).$$

Przyjmując

$$C = \frac{1}{\alpha_1}+\mathcal{M}+\mathcal{M}^2+\ldots+\mathcal{M}^{\mathcal{N}_0}+\mathcal{M}^{\mathcal{N}_0}\cdot\frac{1}{\alpha}$$

otrzymujemy stąd (23). Przy założeniach twierdzenia 5 stabilności równania (1) według definicji 1 i 2 są więc równoważne, nie wiadomo jednak czy to równanie jest przy tych założeniach stabilne.

Prace cytowane

[1] D. Brydak: On the stability of the functional equation $\varphi(f(x)) = g(x)\varphi(x) + F(x)$, Proc. of the Am.Math.Soc. /w druku/.

[2] D.H. Hyers: On the stability of the linear functional equation, Proc.Math.Soc. U.S., 27 /1941/, str.222-224.

[3] M. Kuczma: Functional equations in a single variable, Warszawa 1968.

[4] E. Turdza, On the stability of the functional equation Proc. of the Am.Math.Soc. /wysłana do druku/.

[5] E. Turdza: On the stability of the functional equation of the first order, Annales Polonici Mathematici /w druku/.

Summary

Some remarks on the stability of the linear functional equation
$$\varphi(f(x)) = g(x)\varphi(x) + F(x)$$

The main purpose of the paper is to compare two definitions of the stability.

<u>Definition 1</u>. The equation (2) is called stable in the interval I with regard of the class $C(I)$ of the all continuous functions on the interval I, if there exists a constant $K > 0$ such, that for each number $\varepsilon > 0$ and each continuous solution $\psi(x)$ of the inequality (6) there exists continuous solution $\varphi(x)$ of the equation (2) definite on the interval I satysfying (7).

<u>Definition 2</u>. The equation (2) is called stable in the interval I with regard of the class $C(I)$ of the all continuous functions on the interval I, if there exists constant $K > 0$ such, that for each number $\varepsilon > 0$ and each continuous solution $\psi(x)$ of the inequality (8), there exists continuous solution $\varphi(x)$ of the equation (2) definite on the interval I satysfying (10). In the first part of the paper we have proved.

<u>Theorem 1</u>. If hypotheses $(\mathcal{X}_1)$, $(\mathcal{X}_2)$, $(\mathcal{X}_3)$ are fulfilled and the inequality (12) holds, then the equation (2) is stable according to the definition 2.

We give also an example which demonstrate that in this case equation (2) is not stable according to the definition 1. In the second part of the paper we have proved theorems concerning the problem, when the equation (1) is stable according to the definition 1.

Theorem 4. If hypotheses $(\mathcal{Z}_1)$, $(\mathcal{Z}_2)$ are fulfilled and inequalites (17) and (20) hold, then the equation (1) is stable according to the definition 1 in the interval I.

Theorem 5. Let hypotheses $(\mathcal{Z}_1)$, $(\mathcal{Z}_2)$ and the inequality (17) be fulfilled. Let, further, there exist positive numbers α and δ such that $|g(x)| < 1-\alpha$ for $x \in (b-\delta, b)$. Then there exists such a positive constant C, that for each continuous solution $\Psi(x)$ of the inequality (6), where $F(x) \equiv 0$, the inequality (23) holds.

Резюме

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕЧАНИЯ ПО УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ $\varphi(f(x)) = g(x)\varphi(x) + F(x)$

Главной задачей этой работы является сравнение двух определений устойчивости.

Определение 1.

Уравнение (2) является устойчивым в интервале I по отношению к классу $C(I)$ всех непрерывных на I функций, если существует константа $K>0$, что для произвольного числа $\varepsilon>0$ и произвольного непрерывного решения $\Psi(x)$ неравенства (6) существует непрерывное решение $\varphi(x)$ уравнения (2) определенное в интервале I так что (7).

Определение 2.

Уравнение (2) является устойчивым в интервале I по отношению к классу $C(I)$ всех непрерывных на I функций, если существует константа $K>0$, что для произвольного числа $\varepsilon>0$ и произвольного непрерывного решения $\Psi(x)$ неравенства (8) существует непрерывное решение $\varphi(x)$ уравнения (2) определенное в интервале I так что (10).

В первой части работы доказаны

Теорема 1

Если удовлетворены условия $(\mathcal{Z}_1)$, $(\mathcal{Z}_2)$, $(\mathcal{Z}_3)$ и исполнено неравенство (12) тогда уравнение (2) является устойчивым в смысле определения 2.

Подан также пример на то, что в этом случае уравнение (2) является неустойчивым в смысле определения 1. Во второй части работы поданы условия, при которых уравнение (1) является устойчивым в смысле определения 1.

Теорема 4

Если удовлетворены условия $(\mathcal{Z}_1)$, $(\mathcal{Z}_2)$ и неравенства (17), (20) то уравнение 1 является устойчивым в смысле определения 1 в интервале I.

Теорема 5

Допустим, что исполнены условия $(\mathcal{Z}_1)$, $(\mathcal{Z}_2)$ неравенство (17) и существуют положительные числа α, δ такие что

$$|g(x)| < 1-\alpha \qquad \text{для} \quad x \in (b-\delta, b).$$

Тогда существует постоянная $C>0$, такая, что для всех непрерывных реше -