ROCZNIK NAUKOWO - DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE

Zeszyt 41 Prace matematyczne VI Rok 1970

Eugeniusz Wachnicki

ROZWIĄZANIE PEWNYCH ZAGADNIEŃ BRZEGOWYCH DLA RÓWNANIA $\Delta u - c^2 u = 0$

Rozwiązanie $v(\varrho)$, gdzie $\varrho^2 = x^2 + y^2$ równania $\Delta u(x,y) - c^2 u(x,y) = 0$, c stała dodatnia, spełnia równanie zwyczajne $v''(\varrho) + \varrho^{-1} v'(\varrho) - c^2 v(\varrho) = 0$. Równanie to jest szczególnym przypadkiem równania różniczkowego $v''(z) + z^{-1} v'(z) - (1 + \mu^2 z^{-2}) v(z) = 0$, którego całką ogólną jest kombinacja liniowa funkcji $I_\mu(z)$ i $K_\mu(z)$ zwanych funkcjami Bessela zmiennej zespolonej ([1], str.115). Funkcje $K_\mu(z)$ znane są w literaturze pod nazwą funkcji MacDonalda ([1], str.116).

Niniejsza praca zawiera pewne wyniki dotyczące regularności całek niewłaściwych typu potencjału, o jądrach będących funkcjami MacDonalda $K_\mu(z)$ w półpłaszczyźnie $x > 0$. Podamy także zastosowanie tych całek do rozwiązania, przy pomocy funkcji Greena, zagadnienia Dirichleta i Neumanna w półpłaszczyźnie $x > 0$ dla równania

(1) $$\Delta u(x,y) - c^2 u(x,y) = 0,$$

gdzie c jest stałą dodatnią.

1. Niech E_2^+ i E_2^a oznaczają odpowiednio półpłaszczyzny otwarte $x > 0$, $x > a$, gdzie a jest dowolną stałą dodatnią. Weźmy pod uwagę całkę

$$I(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) K_0(cr)\, ds,$$

gdzie $r^2 = x^2 + (s-y)^2$, c stała dodatnia.

Lemat 1. Jeżeli funkcja $f(s)$ jest określona w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych oraz całka

(2) $$\int_{-\infty}^{\infty} |f(s)|\, ds$$

jest zbieżna, to całka $I(x,y)$ jest niemal jednostajnie zbieżna w półpłaszczyźnie E_2^+.

Dowód.

Funkcje MacDonalda $K_\mu(z)$ zmiennej rzeczywistej dodatniej o indeksie $\mu > 0$ są funkcjami rzeczywistymi dodatnimi, malejącymi ([1], str. 146), zatem $K_0(cr) < K_0(ca)$ dla dowolnego punktu $(x,y) \in E_2^a$ i dowolnego s, gdyż $r > a$ w półpłaszczyźnie E_2^a przy dowolnym s. Majorantą całki $I(x,y)$ jest zatem całka (2), wobec tego całka $I(x,y)$ jest jednostajnie zbieżna w półpłaszczyźnie E_2^a, a więc niemal jednostajnie zbieżna w półpłaszczyźnie E_2^+.

Dalsze rozważania związane z całką $I(x,y)$ poprzedzimy wprowadzeniem pewnych całek niewłaściwych.

Niech

$$I_1(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,(s-y)^{\alpha}\, x^{\gamma}\, r^{-\beta}\, K_\beta(cr)\, ds,$$

gdzie α i γ są liczbami całkowitymi natomiast β jest liczbą naturalną oraz

(3) $$\alpha + \gamma \leqslant \beta .$$

Lemat 2. Jeżeli funkcja $f(s)$ spełnia założenia lematu 1 oraz zachodzi warunek (3), to całki $I_1(x,y)$ są jednostajnie zbieżne w każdej półpłaszczyźnie E_2^a.

Dowód.

Wobec (3) wyrażenie

$$|s-y|^{\alpha}\, x^{\gamma}\, r^{-\beta} = |s-y|^{\alpha}\, x^{\gamma}\, \left(x^2 + (s-y)^2\right)^{-\frac{\beta}{2}}$$

jest ograniczone dla $(x,y) \in E_2^a$ i dowolnego s.

Ponieważ $K_\beta(cr) < K_\beta(ca)$ dla dowolnego punktu $(x,y) \in E_2^a$ i dowolnego s, zatem

$$\left|f(s)\,(s-y)^{\alpha}\, x^{\gamma}\, r^{-\beta}\, K_\beta(cr)\right| \leqslant M K_\beta(ca)\,|f(s)| ,$$

gdzie

$$M = \sup_{\substack{(x,y)\in E_2^a\\ -\infty<s<\infty}} |s-y|^{\alpha}\, x^{\gamma}\, r^{-\beta} .$$

Majorantą całki $I_1(x,y)$ jest całka (2) wobec tego jest ona jednostajnie zbieżna w półpłaszczyźnie E_2^a.

Lemat 3. Jeżeli funkcja $f(s)$ spełnia założenia lematu 1, to funkcja $I(x,y)$ jest klasy C^∞ w otoczeniu każdego punktu zbioru E_2^+ i spełnia równanie (1) oraz zachodzi wzór

(4) $$\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} I(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} K_0(cr)\, ds .$$

Dowód.

Na podstawie [1], str.117 mamy

(5) $$\frac{d}{dz}\left[z^{-\mu}K_\mu(z)\right] = -z^{-\mu}K_{\mu+1}(z),$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej μ. Wobec (5) całki występujące po prawej stronie wzoru (4) są sumami skończonymi całek typu $I_1(x,y)$ a więc są one jednostajnie zbieżne w E_2^a. Wynika stąd wzór (4), zatem możliwość różniczkowania funkcji $I(x,y)$ pod znakiem całki dowolną ilość razy. Wobec tego

$$\Delta I(x,y) - c^2 I(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\left[\Delta K_0(cr) - c^2K_0(cr)\right] ds = 0,$$

gdyż dla $x \neq 0$ funkcja $K_0(cr)$ jako rozwiązanie podstawowe równania (1)([1], str.115) spełnia to równanie.

Z kolei podamy lematy, które wykorzystamy do badania zachowania się funkcji $I'_x(x,y)$ przy zmierzaniu punktu (x,y) do punktu $(0,y_0)$.

Lemat 4.

$$I_2(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} cxr^{-1}K_1(cr)ds = e^{-cx}.$$

Dowód.

Dokonując w całce $I_2(x,y)$ zamiany zmiennej

(6) $$s = y + xt,$$

otrzymujemy

$$I_2(x,y) = \frac{cx}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}K_1\left(cx(t^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)dt =$$

$$= \frac{2cx}{\pi}\int_0^{\infty}(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}K_1\left(cx(t^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)dt.$$

Ponieważ ([3], str.719)

$$\int_0^{\infty} K_\nu\left(\alpha(x^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\right)x^{2\mu+1}(x^2+z^2)^{-\frac{1}{2}\nu}dx = \frac{2^\mu\Gamma(\mu+1)}{\alpha^{\mu+1}z^{\nu-\mu-1}}K_{\nu-\mu-1}(z),$$

gdzie $\alpha > 0$ i $\mu > -1$, zatem

$$I_2(x,y) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{2cx}}K_{\frac{1}{2}}(cx).$$

Zatem wobec

$$K_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}, \quad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

otrzymujemy, że $I_2(x,y) = e^{-cx}$.

Lemat 5. Jeżeli $z > 0$, to $K_1(z) < z^{-1}$.

Dowód.

Ze wzoru ([1], str.149)

$$K_1(z) = \frac{2\Gamma(\frac{3}{2})}{\sqrt{\pi}} z^{-1} \int_0^{\infty} \cos(zt)\,(t^2+1)^{-\frac{3}{2}}\,dt$$

dla $z > 0$, otrzymujemy

$$|K_1(z)| \leqslant \frac{2\Gamma(\frac{3}{2})}{\sqrt{\pi}} z^{-1} \int_0^{\infty} (t^2+1)^{-\frac{3}{2}}\,dt.$$

Wobec tego, że $\int_0^{\infty} (t^2+1)^{-\frac{3}{2}}\,dt = 1$, $2\Gamma(\frac{3}{2}) = \sqrt{\pi}$,

więc

$$K_1(z) = |K_1(z)| \leqslant z^{-1} \quad \text{dla} \quad z > 0.$$

Niech

$$S_\delta(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{|s-y| \geqslant \delta} cxr^{-1} K_1(cr)\,ds$$

oraz

$$R_\delta(x) = \sup_{|s-y| \geqslant \delta} \left[\frac{1}{\pi} cxr^{-1} K_1(cr)\right]$$

dla $\delta > 0$.

Lemat 6. Jeżeli $\delta > 0$, to

a/ $S_\delta(x,y) \longrightarrow 0$, przy $x \longrightarrow 0$ jednostajnie względem y.

b/ $R_\delta(x) \longrightarrow 0$, przy $x \longrightarrow 0$.

Dowód.

Z lematu 5 wynika nierówność

$$|S_\delta(x,y)| \leqslant \frac{1}{\pi} cx \int_{|s-y| \geqslant \delta} r^{-2}\,ds.$$

Stosując do całki po lewej stronie powyższej nierówności zamianę zmiennej (6) otrzymujemy

$$|S_\delta(x,y)| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{|t| \geqslant \frac{\delta}{x}} (t^2+1)^{-1}\,dt = 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\delta}{x}.$$

Dla dostarczenia małych $\eta > 0$ z nierówności $0 < x < \eta$ wynika nierówność

$$1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\delta}{x} < \varepsilon,$$

a zatem niezależnie od y otrzymujemy $|S_\delta(x,y)| < \varepsilon$, co dowodzi części a) tezy lematu 6. Dowód części b) tezy jest analogiczny.

Twierdzenie 1. Jeżeli funkcja $f(s)$ spełnia założenia lematu 1 oraz jest ciągła dla $s = y_0$, to $-I'_x(x,y) \longrightarrow f(y_0)$, gdy $(x,y) \longrightarrow (0,y_0)$.

Dowód.

Ze wzoru (5) i lematu 3 wynika, że

$$-I'_x(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, cxr^{-1}K_1(cr)\,ds.$$

Niech

$$-I'_x(x,y) = A + Q,$$

gdzie

$$A = \frac{1}{\pi}\, cxf(y_0)\int_{-\infty}^{\infty} r^{-1}K_1(cr)\,ds,$$

$$Q = \frac{1}{\pi}\, cx\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(s) - f(y_0)\right] r^{-1}K_1(cr)\,ds.$$

Z lematu 4 mamy

$$A = f(y_0)\cdot e^{-cx},$$

zatem gdy $(x,y)\longrightarrow(0,y_0)$, to $A\longrightarrow f(y_0)$.

Wykażemy, że całka Q dąży do zera, gdy $(x,y)\longrightarrow(0,y_0)$. Z ciągłości funkcji $f(s)$ w punkcie $s = y_0$ wynika, że dla dowolnej dodatniej liczby ε istnieje dodatnia liczba δ taka, że dla $|s-y_0| < \delta$ zachodzi nierówność

$$|f(s) - f(y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Niech

$$Q_1 = \frac{1}{\pi}\, cx\int_{|s-y_0|<\delta}\left[f(s) - f(y_0)\right] r^{-1}K_1(cr)\,ds,$$

$$Q_2 = \frac{1}{\pi}\, cx\int_{|s-y_0|\geqslant\delta}\left[f(s) - f(y_0)\right] r^{-1}K_1(cr)\,ds.$$

Wówczas

$$|Q_1| = \frac{1}{\pi}\, cx\left|\int_{|s-y_0|<\delta}\left[f(s) - f(y_0)\right] r^{-1}K_1(cr)\,ds\right| \leqslant \frac{cx\,\varepsilon}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r^{-1}K_1(cr)\,ds.$$

Zatem zgodnie z lematem 4 otrzymujemy $|Q_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\, e^{-cx}$. Ponieważ $x > 0$ i $c > 0$, więc $|Q_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ dla dowolnych $(x,y)\in E_2^+$.

Jeżeli $|y-y_0| < \frac{\delta}{2}$, to z nierówności $|s-y_0| \geqslant \delta$ wynika nierówność $|s-y| \geqslant \frac{\delta}{2}$, więc

$$|Q_2| = \frac{1}{\pi} cx \Big| \int\limits_{|s-y_0|\geq\delta} [f(s)-f(y_0)] r^{-1} K_1(cr)\,ds \Big| \leq \frac{1}{\pi} cx \int\limits_{|s-y|>\frac{\delta}{2}} |f(s)-f(y_0)| r^{-1} K_1(cr)\,ds \leq$$
$$\leq \frac{1}{\pi} cx \int\limits_{|s-y|>\frac{\delta}{2}} |f(s)| r^{-1} K_1(cr)\,ds + \frac{1}{\pi} cx |f(y_0)| \int\limits_{|s-y|\geq\frac{\delta}{2}} r^{-1} K_1(cr)\,ds \leq R_{\delta'}(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(s)|\,ds + S_{\delta'}(x,y)|f(y_0)|,$$

gdzie $\delta' = \frac{\delta}{2}$.

Niech
$$m = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(s)|\,ds.$$

Załóżmy, że $m \neq 0$ (w przypadku $m = 0$ dowód jest banalny). Jeżeli $f(y_0) = 0$, to $|Q_2| \leq R_{\delta'}(x)\, m$, zatem z części b) tezy lematu 6 wynika, że przy dostatecznie małej liczbie $\eta > 0$ nierówność $0 < x < \eta$ pociąga za sobą nierówność
$$R_{\delta'}(x) < \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Wobec tego dla $|y-y_0| < \frac{\delta}{2}$ i $0 < x < \eta$ otrzymujemy $|Q| \leq |Q_1| + |Q_2| < \varepsilon$ co dowodzi, że w tym przypadku całka Q dąży do zera, przy $x, y_0 \to (0, y_0)$.

Jeżeli natomiast $f(y_0) \neq 0$, to z lematu 6 wynika, że przy dostatecznie małej liczbie $\eta > 0$ z nierówności $0 < x < \eta$ wynikają nierówności
$$R_{\delta'}(x) < \frac{\varepsilon}{4m} \quad \text{i} \quad S_{\delta'}(x,y) < \frac{\varepsilon}{4\,|f(y_0)|},$$

przy czym ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnego y. Wobec tego dla $|y-y_0| < \frac{\delta}{2}$ i $0 < x < \eta$ otrzymujemy $|Q| \leq |Q_1| + |Q_2| < \varepsilon$ co dowodzi, że w tym przypadku całka Q również dąży do zera, przy zmierzaniu punktu (x,y) do punktu $(0,y_0)$.

Następujące twierdzenie dotyczy zachowania się całek $I(x,y)$ i $I'_x(x,y)$ w nieskończoności.

<u>Twierdzenie 2. Jeżeli $a > 0$, to</u>

a/ $\lim\limits_{\rho\to\infty} I(x,y) = 0$, gdy $(x,y) \in E_2^a$

oraz

b/ $\lim\limits_{\rho\to\infty} I'_x(x,y) = 0$, gdy $(x,y) \in E_2^a$.

<u>Dowód</u>.

Z jednostajnej zbieżności całki $I(x,y)$ w półpłaszczyźnie E_2^a, przy dowolnym $a > 0$ wynika, że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $R_0 > 0$ niezależna od $(x,y) \in E_2^a$, że dla $s_0 > R_0$ zachodzi nierówność

(7)
$$\Big| \int\limits_{|s|<s_0} f(s) K_0(cr)\,ds - I(x,y) \Big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wykażemy, że
$$\Big| \int\limits_{|s|<s_0} f(s) K_0(cr)\,ds \Big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dla ustalonej liczby s_0 oraz dla dostatecznie dużych ϱ.

Z nierówności trójkąta $|\varrho - |s|| \leqslant r \leqslant \varrho + |s|$ wynika nierówność

$$1 - \frac{|s_0|}{\varrho} \leqslant \frac{r}{\varrho} \leqslant 1 + \frac{|s_0|}{\varrho}.$$

Zatem dla $\varrho \to \infty$, $\frac{r}{\varrho} \to 1$, gdy $|s| < s_0$. Istnieje więc stała dodatnia $k < 1$ taka, że $r \geqslant k\varrho$ dla $\varrho > \varrho_0$, gdzie ϱ_0 jest dostatecznie dużą liczbą dodatnią. Z monotoniczności funkcji K_0 wynika, że dla $\varrho > \varrho_0$ zachodzi nierówność $K_0(cr) \leqslant K_0(ck\varrho)$, skąd

$$\Big| \int_{|s|<s_0} f(s) K_0(cr)\, ds \Big| \leqslant K_0(ck\varrho) \int_{-\infty}^{\infty} |f(s)|\, ds.$$

Ponieważ $\lim_{z \to +\infty} K_0(z) = 0$ ([1], str.118), więc dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\varrho' > 0$, że dla $\varrho > \varrho'$ zachodzi nierównosc

$$|K_0(ck\varrho)| < \frac{\varepsilon}{2m},$$

gdzie $m = \int_{-\infty}^{\infty} |f(s)|\, ds$ (przypadek $m = 0$ jest banalny).

Zatem dla $\varrho > \max(\varrho_0, \varrho')$ mamy

$$\Big| \int_{|s|<s_0} f(s)\, K_0(cr)\, ds \Big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Z nierówności (7) i (8) wynika, że dla $\varrho > \max(\varrho_0, \varrho')$ i $(x,y) \in E_2^{\Delta}$ zachodzi nierówność $|I(x,y)| < \varepsilon$. Przeprowadzając podobne rozumowanie możemy udowodnić b).

2. Niech $Q = (x,y)$ będzie dowolnym punktem wewnętrznym półpłaszczyzny E_2^+, natomiast $P = (\xi, \eta)$ niech oznacza punkt taki, że $\xi \geqslant 0$.

Niech $\varrho_1^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$, $\varrho_2^2 = (x + \xi)^2 + (y - \eta)^2$. Wiadomo [2], że funkcja Greena dla równania (1) w półpłaszczyźnie E_2^+ z warunkiem brzegowym typu Neumanna ma postać

(9) $$G_N(P,Q) = \frac{1}{2\pi} \left[K_0(c\varrho_1) + K_0(c\varrho_2) \right].$$

<u>Twierdzenie 3. Jeżeli funkcja $f(s)$ określona na wszystkich s rzeczywistych jest funkcją ciągłą oraz całka (2) jest zbieżna, to funkcja</u>

(10) $$u(x,y) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\, G_N(P,Q)\Big|_{\xi=0} d\eta$$

<u>jest rozwiązaniem równania (1) w półpłaszczyźnie E_2^+ i spełnia warunki brzegowe</u>

(11) $$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \longrightarrow f(y_0), \quad \text{przy} \quad (x,y) \longrightarrow (0, y_0),$$

(12) $$u(x,y) \longrightarrow 0, \quad \text{gdy} \quad \varrho \to \infty \quad \text{i} \quad (x,y) \in E_2^+,\ a > 0.$$

Dowód.

Z (9) i (10) otrzymujemy

$$u(x,y) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\, K_0\Big(c\big(x^2+(\eta-y)^2\big)^{\frac{1}{2}}\Big)\, d\eta = -\, I(x,y).$$

Z lematu 3 i twierdzenia 1 wynika, że funkcja $u(x,y)$ określona wzorem (10) spełnia równanie (1) oraz warunek brzegowy (11). Na podstawie twierdzenia 2 zachodzi warunek (12).

Twierdzenie 4. Funkcja Greena dla równania (1) w półpłaszczyźnie E_2^- z warunkami brzegowymi typu Dirichleta:

(13) $$G_D(P,Q)\Big|_{\xi=0} = 0$$

ma postać

(14) $$G_D(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\Big[K_0(c\rho_1) - K_0(c\rho_2)\Big].$$

Dowód.

Ponieważ funkcje $K_0(c\rho_1)$ i $K_0(c\rho_2)$ są rozwiązaniami podstawowymi równania (1), z biegunami odpowiednio w punktach $Q(x,y)$ i $Q(-x,y)$, zatem dla $P \neq Q$ funkcja $G_D(P,Q)$ określona wzorem (14) spełnia równanie (1) w E_2^+. Funkcja $G_D(P,Q)$ dla $P = Q$ zachowuje się tak jak rozwiązanie podstawowe równania (1) z biegunem w punkcie Q, tzn. jak funkcja $K_0(c\rho_1)$. Ponieważ dla $\xi = 0$ zachodzi równość $\rho_1 = \rho_2$, więc warunek (13) jest spełniony.

Twierdzenie 5. Jeżeli funkcja $f(s)$ spełnia założenia twierdzenia 3, to funkcja

(15) $$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\, \frac{\partial}{\partial\xi} G_D(P,Q)\Big|_{\xi=0}\, d\eta$$

jest rozwiązaniem równania (1) w półpłaszczyźnie E_2^+ oraz spełnia warunki brzegowe

(16) $$u(x,y) \longrightarrow f(y_0), \quad \text{przy } (x,y) \longrightarrow (0,y_0),$$

(17) $$u(x,y) \longrightarrow 0, \quad \text{przy } \rho \to \infty,\ (x,y) \in E_2^a,\ a > 0.$$

Dowód.

Wobec (14) i (15) otrzymujemy

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\, K_1\big(c(x^2+(\eta-y)^2)^{\frac{1}{2}}\big)\, cx\big(x^2+(\eta-y)^2\big)^{-\frac{1}{2}}\, d\eta = -\, I_x'(x,y).$$

Zatem z lematu 3 i twierdzenia 1 wynika, że funkcja $u(x,y)$ określona wzorem (15) spełnia równanie (1) w E_2^+ oraz warunek brzegowy (16). Wobec części b tezy twierdzenia 2 funkcja $u(x,y)$ okreslona wzorem (15) spełnia warunek (17).

Prace cytowane

[1] N.N. Lebiediew: Funkcje specjalne i ich zastosowania, PWN, Warszawa 1957.

[2] B.M. Budak, A.A. Samarski, A.N. Tichonow: Zadania i problemy fizyki matematycznej, PWN, Warszawa 1965.

[3] I.M. Ryżyk, I.S. Gradsztejn: Tablicy integrałow, sum, riadow i proizwodienniej, Moskwa 1963.

Résumé

La solution des certains problèmes aux limites pour l'équation $\Delta u - c^2 u = 0$

Dans la première partie de cette note l'auteur s'occupe de l' étude de la régularité de l'intégrale

$$I(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) K_0(cr)\, ds,$$

dans le demi-plan $x > 0$, où $K_0(cr)$ est la fonction de MacDonald, $r^2 = x^2 + (s-y)^2$, c un nombre positif.

En profitant résultats obtenus, dans la seconde partie de cette note l'auteur résout, à l'aide de la fonction de Green, le problème de Dirichlet et Neumann dans le demi-plan $x > 0$ pour l'équation $\Delta u(x,y) - c^2 u(x,y) = 0$, c un nombre positif.

Les résultats de cette note peuvent être présentés en forme du théorème:

Si la fonction $f(s)$ est definie pour chaque nombre réel s et si elle est continue ainsi qu'absolument intégrable dans l'ensemble des nombres réels, alors

1. la fonction $u(x,y) = - I(x,y)$ est la solution de l'équation $\Delta u(x,y) - c^2 u(x,y) = 0$ dans le demi-plan $x > 0$ et elle satisfait aux conditions

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \longrightarrow f(y_0), \quad \text{pour} \quad (x,y) \longrightarrow (0,y_0),$$

$$u(x,y) \longrightarrow 0, \quad \text{pour} \quad \varrho = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \to \infty, \ (x,y) \in E_2^a,$$

où E_2^a est un demi-plan $x > a$, a un nombre positif arbitraire.

2. la fonction $u(x,y) = - I'_x(x,y)$ est la solution de l'équation

$\Delta u(x,y) - c^2 u(x,y) = 0$ dans le demi-plan $x > 0$ et elle satisfait aux conditions

$$u(x,y) \longrightarrow f(y_0), \quad \text{pour} \quad (x,y) \longrightarrow (0,y_0),$$

$$u(x,y) \longrightarrow 0, \qquad \text{pour} \quad \rho \to \infty \;, \quad (x,y) \in E_2^a.$$

Р е з ю м е

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $\Delta u - c^2 u = 0$

В первой части работы автор занимается исследованием регулярности интеграла

$$I(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) K_0(cr)\, ds$$

на полуплоскости $x>0$, где $K_0(cr)$ является функцией Макдональда, $r^2 = x^2 + (s-y)^2$

c положительная константа.

Полученные результаты автор использовал во второй части работы для решения, при помощи функции Грина, задачи Дирихле и Неймана на полуплоскости $x > 0$ для уравнения

$$\Delta u(x,y) - c^2 u(x,y) = 0$$

c положительная константа.

Результаты этой работы заключаются в следующей теореме:

Если функция $f(s)$, определенная для всех s действительных является непрерывной функцией и абсолютно интегрированной на множестве действительных чисел, то

1. функция $u(x,y) = I(x,y)$ является решением уравнения

$$\Delta u(x,y) - c^2 u(x,y) = 0$$

на полуплоскости $x > 0$, а также удовлетворяет краевым условиям

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \longrightarrow f(y_0), \text{ при } (x,y) \to (0,y_0),$$

$$u(x,y) \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad \rho = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \infty, \ (x,y) \in E_2^a,$$

где E_2^a обозначает полуплоскость $x > a$, a произвольная положительная константа.

2. функция $u(x,y) = -I_x'(x,y)$ является решением уравнения

$$\Delta u(x,y) - c^2 u(x,y) = 0$$

на полуплоскости $x > 0$, а также удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y) \longrightarrow f(y_0), \text{ при } (x,y) \to (0,y_0),$$

$$u(x,y) \longrightarrow 0, \text{ при } \rho \longrightarrow \infty, \ (x,y) \in E_2^a.$$