ROCZNIK NAUKOWO - DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE

Zeszyt 41 Prace matematyczne VI Rok 1970

Adam Wachułka

O ZAGADNIENIU TRÓJHARMONICZNYM RIQUIER DLA PÓŁPŁASZCZYZNY

1. W pracy podamy rozwiązanie zagadnienia Riquier dla półpłaszczyzny i równania trójharmonicznego. Wyznaczymy rozwiązanie równania

$$\Delta^3 u(x,y) = 0 \tag{1}$$

w półpłaszczyźnie $y > 0$, spełniające warunki brzegowe

$$u(x,0) = f(x), \tag{2a}$$

$$\Delta u(x,0) = g(x), \tag{2b}$$

$$\Delta^2 u(x,0) = h(x), \tag{2c}$$

gdzie $f(x), g(x), h(x)$, są funkcjami określonymi dla $-\infty < x < +\infty$. Rozwiązanie skonstruujemy za pomocą funkcji Greena a następnie przeprowadzimy syntezę otrzymanego rozwiązania.

2. Udowodnimy lemat, z którego będziemy korzystać w syntezie.

<u>Lemat 1</u>. [1]. Jeżeli $f(x)$ jest funkcją ograniczoną i bezwzględnie całkowalną dla $-\infty < x < +\infty$, a ponadto ciągłą w punkcie x_0, to

$$\mathcal{J}(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(s)ds}{(s-x)^2+y^2} \longrightarrow f(x_0), \tag{3}$$

gdy $(x,y) \longrightarrow (x_0,0)$ przy $y > 0$.

<u>Dowód</u>. Przekształcamy całkę $\mathcal{J}(x,y)$ w następujący sposób

$$\mathcal{J}(x,y) - \frac{f(x_0)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y\,ds}{(s-x)^2+y^2} = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(s)-f(x_0)}{(s-x)^2+y^2}ds. \tag{4}$$

Wobec ciągłości funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 oraz $y > 0$ mamy

$$\left| \mathcal{J}(x,y) - \frac{f(x_0)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y\,ds}{(s-x)^2+y^2}\right| < \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y\,ds}{(s-x)^2+y^2} .$$

Przez zastosowanie do całek po obu stronach podstawienia $s - y = ty$, otrzymujemy

$$\left|\mathcal{J}(x,y) - f(x_0)\right| < \varepsilon ,$$

a stąd już wynika teza lematu.

3. Skonstruujemy teraz funkcję Greena. Niech w prostokątnym układzie współrzędnych (s,t) będzie dany dowolny punkt $X(x,y)$, $y > 0$, zaś $X_1(x,-y)$, niech oznacza punkt symetryczny do X względem osi Os. Niech $Y(s,t)$ oznacza dowolny punkt obszaru

(5) $$D = \{(s,t):\ t \geq 0\}.$$

Niech dalej będzie $X \neq Y$. Wówczas mamy

(6) $$\begin{aligned} r &= |XY| = \sqrt{(s-x)^2 + (t-y)^2} ,\\ r_1 &= |X_1Y| = \sqrt{(s-x)^2 + (t+y)^2} ,\\ \rho &= r\Big|_{t=0} = r_1\Big|_{t=0} = \sqrt{(s-x)^2 + y^2} .\end{aligned}$$

Udowodnimy następujące

<u>Twierdzenie 1</u>. Funkcją Greena dla półpłaszczyzny $t > 0$ jest funkcja

(7) $$G(X,Y) = r^4\ln r - r_1^4\ln r_1 .$$

<u>Dowód</u>.

Udowodnimy, że są spełnione następujące warunki:

(8a) $$G(X,Y) = 0 \quad \text{dla} \quad t = 0 ,$$

(8b) $$\Delta G(X,Y) = 0 \quad \text{dla} \quad t = 0 ,$$

(8c) $$\Delta^2 G(X,Y) = 0 \quad \text{dla} \quad t = 0 ,$$

(8d) $$\Delta^3 G(X,Y) = 0 \quad \text{dla} \quad X \neq Y,\ \ Y \in D .$$

Ponieważ dla $t = 0$, zachodzi $r = r_1 = \rho$, warunek (8a) jest spełniony. Dla sprawdzenia pozostałych warunków wykonamy obliczenia [2]. Do (8b)

$$\Delta G(X,Y) = \Delta r^4\ln r - \Delta r_1^4\ln r_1 = \left(r^4\ln r\right)_{rr} + \frac{1}{r}\left(r^4\ln r\right)_r - \left(r_1^4\ln r_1\right)_{r_1r_1}$$

$$- \frac{1}{r_1}\left(r_1^4\ln r_1\right)_{r_1} = 16\left(r^2\ln r - r_1^2\ln r_1\right) + 8\left(r^2 - r_1^2\right),$$

$$\Delta G(X,Y) = 0 \quad \text{dla} \quad t = 0.$$

Do (8c)

$$\Delta^2 G(X,Y) = \Delta\Delta G(X,Y) = 16(\Delta r^2 \ln r - \Delta r_1{}^2 \ln r_1) +$$

$$+ 8(\Delta r^2 - \Delta r_1{}^2) = 64(\ln r - \ln r_1),$$

a więc

$$\Delta^2 G(X,Y) = 0 \quad \text{dla} \quad t = 0.$$

Do (8d). Ze względu na to, że $\ln r$ i $\ln r_1$ są funkcjami harmonicznymi zachodzi

$$\Delta^3 G(X,Y) = 0 \quad \text{dla} \quad X \neq Y,\ Y \in D.$$

4. Weźmiemy obecnie pod uwagę funkcję [3]

$$(9)\quad u(x,y) = A_1 \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \frac{d}{dn} \Delta G(X,Y)\, ds + A_2 \int_{-\infty}^{\infty} g(s) \frac{d}{dn} \Delta G(X,Y)\, ds + A_3 \int_{-\infty}^{\infty} h(s) \frac{d}{dn} G(X,Y)\, ds\,.$$

gdzie A_1, A_2, A_3 oznaczają stałe, które później określimy, $\frac{d}{dn}$ jest pochodną w kierunku normalnym do brzegu.

Obliczemy pochodne występujące pod znakiem całki.

Otóż

$$(10)\quad \frac{d}{dn} G(X,Y) = \frac{\partial}{\partial t} G(X,Y) = \frac{\partial}{\partial t} r^4 \ln r - \frac{\partial}{\partial t} r_1{}^2 \ln r_1 =$$

$$= 4r^2(t-y)\ln r - 4r_1{}^2(t+y)\ln r_1 + (t-y)r^2 - (t+y)r_1{}^2\,.$$

Dla $t = 0$, mamy

$$(11)\quad \frac{d}{dn} G(X,Y) = -8\, y \varrho^2 \ln\varrho - 2\, y\varrho^2 = -2\, y\varrho^2(4\ln\varrho + 1) = -2\frac{\partial}{\partial y}(\varrho^4 \ln\varrho).$$

$$(12)\quad \frac{d}{dn}\Delta G(X,Y) = \frac{\partial}{\partial t}\Delta G(X,Y) = 16\left(\frac{\partial}{\partial t} r^2 \ln r - \frac{\partial}{\partial t} r_1{}^2 \ln r_1\right) +$$

$$+ 8\left(\frac{\partial}{\partial t} r^2 - \frac{\partial}{\partial t} r_1{}^2\right) = 16\left[2(t-y)\ln r - 2(t+y)\ln r_1 - 2y\right] +$$

$$+ 8\left[2(t-y) - 2(t+y)\right] = 32\left[(t-y)\ln r - (t+y)\ln r_1 - y\right] +$$

$$+ 8(-4y) = 32\left[(t-y)\ln r - (t+y)\ln r_1\right] - 64y.$$

Dla $t = 0$ mamy więc

$$(13)\quad \frac{d}{dn}\Delta G(X,Y) = -64\, y\ln\varrho - 69y = -64y\left(\ln\varrho + \frac{3}{2}\right) = -2\frac{\partial}{\partial y}\left[\Delta(\varrho^4 \ln\varrho)\right].$$

$$(14)\quad \frac{d}{dn}\Delta^2 G(X,Y) = \frac{\partial}{\partial t}\Delta^2 G(X,Y) = 64\left(\frac{t-y}{r^2} - \frac{t+y}{r_1{}^2}\right).$$

Dla $t = 0$ otrzymujemy

(15) $$\frac{d}{dn}\Delta^2 G(X,Y) = -128\,\frac{Y}{\varrho^2} = -2\,\frac{\partial}{\partial y}\left[\Delta^2(\varrho^4 \ln\varrho)\right].$$

Wobec tego otrzymujemy dla $u(x,y)$ wyrażenie

(16) $$u(x,y) = A_1\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\left(-128\frac{y}{\varrho^2}\right)ds + A_2\int_{-\infty}^{\infty} g(s)\left[-64y\left(\ln\varrho+\frac{3}{2}\right)\right]ds + A_3\int_{-\infty}^{\infty} h(s)\left[-2y\varrho^2(4\ln\varrho+1)\right]ds.$$

Przyjmując teraz

(17) $$A_1 = A_2 = A_3 = -\frac{1}{128\pi},$$

otrzymujemy

(18) $$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(s)ds}{(s-x)^2+y^2} + \frac{y}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(s)\left(\ln\varrho+\frac{3}{2}\right)ds + \frac{y}{64\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(s)\left[4\varrho^2(\ln\varrho+1)\right]ds$$

lub w postaci

(18a) $$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(s)ds}{(s-x)^2+y^2} + \frac{1}{128\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(s)\left[2\frac{\partial}{\partial y}\Delta(\varrho^4\ln\varrho)\right]ds + \frac{1}{128\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(s)\left[2\frac{\partial}{\partial y}(\varrho^4\ln\varrho)\right]ds.$$

5. Udowodnimy obecnie

<u>Twierdzenie 2.</u> Jeżeli

1°. całki

(19) $$\int_{-\infty}^{\infty} g(s)\left(\ln\varrho+\frac{3}{2}\right)ds,\quad \int_{-\infty}^{\infty} h(s)\left(\ln\varrho+\frac{3}{2}\right)ds,\quad \int_{-\infty}^{\infty} h(s)\left[4\varrho^2(\ln\varrho+1)\right]ds$$

względnie w symbolice wzoru (18a) całki

(19a) $$\int_{-\infty}^{\infty} g(s)\left[\frac{\partial}{\partial y}\Delta(\varrho^4\ln\varrho)\right]ds,\quad \int_{-\infty}^{\infty} h(s)\left[\frac{\partial}{\partial y}\Delta\varrho^4\ln\varrho\right]ds,\quad \int_{-\infty}^{\infty} h(s)\frac{\partial}{\partial y}\varrho^4\ln\varrho\, ds$$

są jednostajnie zbieżne w każdym prostokącie

(20) $$W(a,A,B) = \left\{(x,y)\ :\ 0<a<y<A,\ |x| \leqslant B\right\},$$

gdzie a, A, B są dowolnymi liczbami dodatnimi,

2°. zachodzi zbieżność do zera całek

(21) $$y\int_{-\infty}^{\infty} g(s)\left(\ln\varrho+\frac{3}{2}\right)ds,\quad y\int_{-\infty}^{\infty} h(s)\left(\ln\varrho+\frac{3}{2}\right)ds,\quad y\int_{-\infty}^{\infty} h(s)\left[4\varrho^2(\ln\varrho+1)\right]ds$$

względnie w symbolice wzoru (18a) całek

(21a) $$2\int_{-\infty}^{\infty} g(s)\frac{\partial}{\partial y}(\Delta\varrho^4\ln\varrho)ds,\quad 2\int_{-\infty}^{\infty} h(s)\frac{\partial}{\partial y}(\Delta\varrho^4\ln\varrho)ds,\quad 2\int_{-\infty}^{\infty} h\frac{\partial}{\partial y}(\varrho^4\ln\varrho)ds$$

gdy $(x,y) \longrightarrow (x_0,0)$ przy $y > 0$,

3^o. funkcje $f(x), g(x), h(x)$ są ograniczone i bezwzględnie całkowalne dla $-\infty < x < +\infty$, to funkcja $u(x,y)$ określona wzorem (18) [(18a)] spełnia zagadnienie trójharmoniczne dla półpłaszczyzny z warunkami brzegowymi w punktach ciągłości funkcji $f(x), g(x), h(x)$.

Dowód.

Udowodnimy, że funkcja $u(x,y)$ spełnia warunki (2a), (2b), (2c). Ponieważ druga i trzecia całka w (18), [(18a)] zeruje się wobec założenia 1^o i 2^o, pierwsza zaś całka spełnia założenia lematu 1, więc na brzegu obszaru jest spełniony warunek (2a). Dla udowodnienia, że zachodzi warunek (2b) obliczamy

$$(22)\quad \Delta u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\frac{\partial}{\partial y}(\Delta \ln\varrho)ds + \frac{1}{128\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(s)\left[2\frac{\partial}{\partial y}(\Delta^2\varrho^4\ln\varrho)\right]ds + \frac{1}{128\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(s)\left[2\frac{\partial}{\partial y}(\Delta\varrho^4\ln\varrho)\right]ds.$$

Pierwsza całka zeruje się, gdyż

$$(23)\quad \Delta \ln\varrho = 0.$$

Druga całka przyjmuje wobec (15) postać

$$(24)\quad \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(s)ds}{\varrho^2}.$$

Ta całka spełnia założenia lematu 1, a więc jest zbieżna do $g(x_0)$, gdy $(x,y) \longrightarrow (x_0,0)$ i funkcja $g(x)$ jest ciągła w punkcie x_0.

Trzecia całka przyjmuje wobec (13) postać

$$(25)\quad \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(s)\left[\ln\varrho + \frac{3}{2}\right]ds,$$

a ta zgodnie z (19) i (21) jest zbieżna do zera, gdy $(x,y) \longrightarrow (x_0,0)$.

Dla udowodnienia warunku (2c) obliczamy

$$(26)\quad \Delta^2 u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(s)\frac{\partial}{\partial y}(\Delta\ln\varrho)ds + \frac{1}{128\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(s)\left[2\frac{\partial}{\partial y}(\Delta^2\varrho^4\ln\varrho)\right]ds.$$

Pierwsza całka zeruje się, gdyż $\ln\varrho$ jest funkcją harmoniczną. Druga całka wobec (15) da się sprowadzić do postaci

$$(27)\quad \Delta^2 u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(s)\,ds}{(s-x)^2+y^2}.$$

Całka w (27) spełnia założenia lematu 1, a więc w każdym punkcie ciągłości funkcji $h(x)$ jest spełniony warunek (2c). Wynika więc stąd, że funkcja $u(x,y)$ jest, wobec założeń 1^o i 2^o, oraz lematu 1 funkcją trójharmoniczną, c.b.d.o.

Prace cytowane

[1] F. Barański: Rozwiązanie problemu Riquier w półpłaszczyźnie i w półprzestrzeni dla równania biharmonicznego $\Delta^2 u = 0$, Prace Matematyczne, VIII 1964, str.239-251.

[2] M. Krzyżański: Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego, Cz.1, PWN, Warszawa 1957.

[3] I.N. Vekua, New methods for solving elliptic equations, Amsterdam - New York 1967.

Summary

On the treeharmonic Riquier problem for the halfplan

In the paper the solution of the equation $\Delta^3 u(x,y) = 0, y > 0$, satysfying the boundary data $u(x,0) = f(x)$, $\Delta u(x,0) = g(x)$, $\Delta^2 u(x,0) = h(x)$ is given.

The solution is given by formula

$$(1) \quad u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(s)\,ds}{(s-x)^2+y^2} + \frac{y}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(s)\left(\ln\varrho + \frac{3}{2}\right)ds + \frac{y}{64\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(s)\left[4\varrho^2(\ln\varrho + 1)\right]ds.$$

The following theorem is prooved

If 1^0. the integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(s)\left(\ln\varrho + \frac{3}{2}\right)ds, \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(s)\left(\ln\varrho + \frac{3}{2}\right)ds, \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(s)\left[4\varrho^2(\ln\varrho + 1)\right]ds$$

are uniformely convergent in the rectangle

$$W(a,A,B) = \left\{(x,y) : 0 < a < y < A, \ |x| \leqslant B\right\},$$

a, A, B being arbitrary positive numbers,

2^0. integrals

$$y\int g(s)\left(\ln\varrho + \frac{3}{2}\right)ds \to 0, \quad y\int_{-\infty}^{\infty} h(s)\left(\ln\varrho + \frac{3}{2}\right)ds \to 0, \quad y\int_{-\infty}^{\infty} h(s)\left[4\varrho^2(\ln\varrho + 1)\right]ds \to 0$$

by $(x,y) \to (x_0, 0), y > 0$.

3^0. the functions $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, are bounded and absolutely integrable, then the function (1) is the solution of the Riquier problem, satisfying boundary data in the continouity points of f(x), g(x), h(x), By the solution of this problem the convenient Green function is used.

Резюме

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ РИКИЕР ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $\Delta^3 u(x,y)=0$ У ПОЛУПЛОСКОСТИ

В работе решается уравнение

$$\Delta^3 u(x,y) = 0 \qquad y>0$$

при условиях

$$u(x,0) = f(x), \quad \Delta u(x,0) = g(x), \quad \Delta^2 u(x,0) = h(x).$$

Решение этой задачи дается формулой /1/

$$(1)\quad u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(s)\,ds}{(s-x)^2+y^2} + \frac{y}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(s)(\ln\rho + \tfrac{3}{2})\,ds + \frac{y}{64\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(s)\left[4\rho^2(\ln\rho+1)\right]ds.$$

Доказывается следующая теорема.

Если 1° интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(s)(\ln\rho+\tfrac{3}{2})\,ds, \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(s)(\ln\rho+\tfrac{3}{2})\,ds, \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(s)\left[4\rho^2(\ln\rho+1)\right]ds$$

равномерно сходятся в прямоугольнике

$$W(a,A,B) = \{(x,y):\ 0<a<y<A,\ |x|\leqslant B\},$$

2° интегралы

$$y\int_{-\infty}^{\infty} g(s)(\ln\rho+\tfrac{3}{2})\,ds, \quad y\int_{-\infty}^{\infty} h(s)(\ln\rho+\tfrac{3}{2})\,ds, \quad y\int_{-\infty}^{\infty} h(s)\left[4\rho^2(\ln\rho+1)\right]ds$$

стремятся к нулю, если $(x,y)\to(x_0,0)$, $y>0$,

3° функции $f(x), g(x), h(x)$ - конечные и абсолютно интегрируемые, тогда функция (1) решает поставленную в начале задачу из граничными условиями в точках непрерывности функции

$$f(x),\ g(x),\ h(x).$$

Для решения этой задачи конструируется функция Грина.