ROCZNIK NAUKOWO - DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE

Zeszyt 41 Prace matematyczne VI Rok 1970

Adam Wachułka

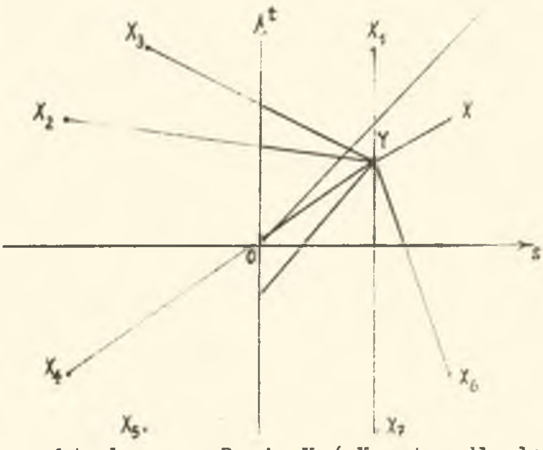
ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA DIRICHLETA DLA PEWNEGO OBSZARU KĄTOWEGO

1. W pracy podamy rozwiązanie zagadnienia Dirichleta dla obszaru $0 \leqslant t \leqslant s$. Do rozwiązania zagadnienia zastosujemy funkcję Greena skonstruowaną za pomocą odbić symetrycznych. Zagadnienie to jest rozwiązane za pomocą przekształceń konforemnych $\left([1]\ \text{str.}423\right)$. Synteza jednak rozwiązania nie jest przeprowadzona. W pracy podajemy inną metodę rozwiązania oraz jego syntezę dla pewnych klas funkcji brzegowych.

2. Niech na płaszczyźnie (s,t) dana będzie półprosta $t = s, s \geqslant 0$ Weźmiemy pod uwagę obszar

(1) $D = \left\{(s,t), 0 \leqslant t \leqslant s\right\}$.

Niech punkt $X(x,y) \in D$. Za pomocą symetrycznego odbicia punktu $X(x,y)$ względem półprostej $t = s$, $s \geqslant 0$ a następnie punktu X i jego odbicia względem obu osi układu współrzędnych (s,t), otrzymujemy punkty: $X_1(y,x)$, $X_2(-x,y)$, $X_3(-y,x)$, $X_4(-x,-y)$, $X_6(x,-y)$, $X_7(y,-x)$, $X_5(-y,-x)$.



Jeśli $Y(s,t)$ oznacza dowolny punkt obszaru D i $Y \neq X$, to odległości jego od punktów X, X_i $(i = 1,\dots,7)$ wyrażają się w taki sposób

$$r = \sqrt{(s-x)^2 + (t-y)^2}, \qquad r_1 = \sqrt{(s-y)^2 + (t-x)^2},$$

$$(2) \qquad r_2 = \sqrt{(s+x)^2 + (t-y)^2}, \qquad r_3 = \sqrt{(s+y)^2 + (t-x)^2},$$

$$r_4 = \sqrt{(s+x)^2 + (t+y)^2}, \qquad r_5 = \sqrt{(s+y)^2 + (t+x)^2},$$
$$r_6 = \sqrt{(s-x)^2 + (t+y)^2}, \qquad r_7 = \sqrt{(s-y)^2 + (t+x)^2}.$$

Tworzymy funkcję

(3) $G(s,t;x,y) = \ln r - \ln r_2 + \ln r_4 - \ln r_6 - \ln r_1$
$\qquad + \ln r_3 - \ln r_5 + \ln r_7.$

Udowodnimy

Twierdzenie 1. Funkcja $G(s,t;x,y)$ określona w (3) jest funkcją Greena dla obszaru D podanego w (1).

Dowód.

Funkcja $G(s,t;x,y)$ zeruje się na półprostej $t = 0, s \geqslant 0$ oraz na półprostej $t = s, s \geqslant 0$.

Istotnie grupując wyrazy w (3) następująco

(3a) $G(s,t;x,y) = (\ln r - \ln r_1) - (\ln r_2 - \ln r_7) -$
$\qquad - (\ln r_6 - \ln r_3) + (\ln r_4 - \ln r_5),$

wobec tego, że dla Y leżącego na półprostej $t = 0, s \geqslant 0$, zachodzą równości

$$r = r_1, \; r_2 = r_7, \; r_4 = r_5, \; r_3 = r_6,$$

otrzymujemy równość

(4) $$G(s,t;x,y) = 0$$

dla tej półprostej.

Grupując wyrazy w (3) w taki sposób

(3b) $G(s,t;x,y) = (\ln r - \ln r_6) - (\ln r_1 - \ln r_7) +$
$\qquad + (\ln r_3 - \ln r_5) - (\ln r_2 - \ln r_4),$

wobec tego, że dla Y leżącego na półprostej $t = s, s \geqslant 0$, mamy równości

$$r = r_6, \; r_1 = r_7, \; r_3 = r_5, \; r_2 = r_4,$$

otrzymujemy równość (4) na tej półprostej.

Gdy przy ustalonym X, odległość $OY \longrightarrow \infty$, wówczas

(3c) $$G(s,t;x,y) = \ln \frac{r}{r_2} + \ln \frac{r_4}{r_6} + \ln \frac{r_3}{r_1} + \ln \frac{r_7}{r_5} \longrightarrow 0.$$

Istotnie w tej sytuacji każdy z ilorazów

$$\frac{r}{r_2}, \; \frac{r_4}{r_6}, \; \frac{r_3}{r_1}, \; \frac{r_7}{r_5}$$

jest zbieżny do 1 a więc każdy składnik sumy w (3c) jest zbieżny do zera.
Ponadto funkcja $G(s,t;x,y)$ jako suma funkcji harmonicznych jest funkcją harmoniczną, co kończy dowód.

3. Niech będą podane funkcje

$$g_1(s) = \begin{cases} g(s) & \text{dla} \quad s \geqslant 0, \\ 0 & \text{dla} \quad s < 0, \end{cases} \tag{5}$$

$$h_1(s) = \begin{cases} h(s) & \text{dla} \quad s \geqslant 0, \\ 0 & \text{dla} \quad s < 0, \end{cases} \tag{6}$$

i niech funkcja $g(s)$ będzie określona na półprostej $s \geqslant 0$, zaś funkcja $h(s)$ na półprostej $s \geqslant 0$.
Weźmiemy pod uwagę funkcję

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\substack{t=0\\ s\geqslant 0}} g(s)\frac{dG(s,t;x,y)}{dn}ds + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\substack{t=0\\ s\geqslant 0}} h(s)\frac{dG(s,t;x,y)}{dn}ds. \tag{7}$$

Wobec wzorów (5) i (6) można funkcję w (7) napisać w ten sposób

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\substack{t=0\\ -\infty\leqslant s\leqslant\infty}} g_1(s)\frac{dG(s,t;x,y)}{dn}ds + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\substack{t=6\\ -\infty\leqslant s<\infty}} h_1(s)\frac{dG(s,t;x,y)}{dn}ds. \tag{8}$$

Uwzględniając wzory (2) otrzymamy następującą postać funkcji (7)

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{y}{(s+x)^2+y^2} - \frac{y}{(s-x)^2+y^2} + \frac{x}{(s-y)^2+x^2} - \frac{x}{(s+y)^2+x^2}\Big)g_1(s)ds +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{y-x}{(s-x)^2+(s-y)^2} - \frac{y-x}{(s+x)^2+(x+y)^2} + \frac{x+y}{(s-x)^2+(s+y)^2} - \frac{x+y}{(s+x)^2+(s-y)^2}\Big)h_1(s)ds \tag{9}$$

4. Udowodnimy teraz lematy, z których będziemy korzystać.

Lemat 1. Jeśli funkcje $g_1(s)$ i $h_1(s)$ są ograniczone i bezwzględnie całkowalne dla $-\infty < s < +\infty$, to całki we wzorze (9) są jednostajnie zbieżne w każdym trójkącie

$$D_1 = \{(x,y):\ 0 < a < y < x < A\}, \tag{10}$$

gdzie a i A są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi.

Dowód.

Jak wiadomo ([2] str.268/9) dwie pierwsze całki w (9) są jednostajnie zbieżne w kwadracie

$$D_2 = \{(x,y): |x - a| < A\ ;\ a < y < A\}, \tag{11}$$

gdzie a i A są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, a więc są też zbieżne w trójkącie (10).

Analogicznie stwierdza się jednostajną zbieżność całek trzeciej i czwartej w (9).

Dla zbadania jednostajnej zbieżności pozostałych czterech całek w (9) stosujemy pewne podstawienia. W pierwszych dwóch całkach podstawiamy odpowiednio

$$(12)\qquad \begin{array}{ll} s - x = (y - x)\, u, & s + x = (y - x)\, v, \\ s - y = s - x + x - y = & s + y = s + x - x + y = \\ = (y - x)(u - 1), & = (y - x)(v - 1), \\ ds = (y - x)\, du, & ds = (y - x)\, dv, \end{array}$$

otrzymujemy w obu przypadkach całkę typu

$$(13)\qquad \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h_1[\omega(u)]\, du}{u^2 + 1} \right| < \frac{M_1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u^2 + 1} = M_1,$$

gdzie $M_1 = \sup\limits_{-\infty < s < +\infty} |h_1(s)|$, co dowodzi tezy.

W dwóch następnych całkach stosujemy podstawienie

$$(14)\qquad \begin{array}{ll} s - x = (y + x)u, & s - y = (x + y)\, v, \\ s + y = s - x + x + y = & s + x = s - y + y + x = \\ = (x + y)(u + 1), & = (x + y)(v + 1), \\ ds = (x + y)\, du, & ds = (x + y)\, dv. \end{array}$$

Otrzymujemy całkę

$$(15)\qquad \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h_1[\omega(u)]\, du}{u^2 + (u+1)^2} \right| < \frac{M_1}{\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u^2 + (u+1)^2} \right|$$

a całka po prawej stronie jest zbieżna.

Lemat 2. Jeśli funkcja $f(s)$ jest ograniczoną i bezwzględnie całkowalną dla $-\infty < s < +\infty$, m, n są liczbami naturalnymi przy czym $m<n$, to całka

$$(16)\qquad \mathcal{J}(x,y) = \frac{y^m}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)\, ds}{[(s-x)^2 + y^2]^n}$$

jest jednostajnie zbieżna w każdym trójkącie w (10).

Dowód.

Stosując podstawienie

$$(17)\qquad s - x = ty, \quad ds = y\, dt, \quad s = ty + x, \quad M = \sup_{-\infty < s < \infty} |f(s)|$$

otrzymujemy

$$(18)\qquad |\mathcal{J}(x,y)| = \left| \frac{y^m}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(ty+x)\, y\, dt}{y^{2n}[t^2+1]^n} \right| < \frac{M}{\pi y^{2n-m-1}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{[t^2+1]^n} \right|.$$

Całka po prawej stronie jest jednostajnie zbieżna a stąd wynika teza lematu.

Lemat 3. Jeśli funkcja $f(s)$ jest ograniczoną i bezwzględnie całkowalną dla $-\infty < s < +\infty$, $m = 1,2$, $n \geqslant 2$, to całka

$$(19) \qquad \mathcal{J}(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(s)(s-x)^m\,ds}{[(s-x)^2+y^2]^n}$$

jest jednostajnie zbieżna w każdym trójkącie określonym w (10).

Dowód.

Stosując w przypadku $m = 2$, podstawienie jak w (17), otrzymujemy

$$(20) \qquad |\mathcal{J}(x,y)| = \left|\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(ty+x)y^m t^m y\,dt}{y^{2n}[t^2+1]^n}\right| < \frac{M}{\pi y^{2n-m-2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^2 dt}{[t^2+1]^n}.$$

Całka po prawej stronie jest zbieżna. Analogiczne rozważanie przeprowadza się w przypadku $m = 1$.

Lemat 4. Jeśli funkcja $f(s)$ jest ograniczona i bezwzględnie całkowalna dla $-\infty < s < +\infty$, $m = 1,2$, $n \geqslant 2$, to całki

$$(21) \qquad \mathcal{J}_1(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(y-x)(s-x)^m f(s)}{[(s-x)^2+(s-y)^2]^n}\,ds\ ; \quad \mathcal{J}_2(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+y)(s-x)^m f(s)}{[(s-x)^2+(s+y)^2]^n}\,ds$$

są jednostajnie zbieżne w każdym trójkącie określonym w (10).

Dowód.

Stosując w przypadku $m = 2$, dla obu całek odpowiednie podstawienie jak w (12) otrzymujemy

$$(22) \qquad \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(y-x)^4 u^2 f[(y-x)u+x]\,du}{(y-x)^{2n}[u^2+(u-1)^2]^n}\right| < \frac{M}{\pi(y-x)^{2n-4}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u^2 du}{[u^2+(u-1)^2]^n}$$

a całka po prawej stronie jest zbieżna. Analogicznie rozumuje się w przypadku $m = 1$.

Lemat 5. Jeśli funkcja $g(s)$ jest ciągła w punkcie x_0, punkty $X(x,y)$, $Y(s,t)$ należą do obszaru określonego w (1), to całka

$$(23) \qquad \frac{y}{\pi}\int\frac{g(s)\,ds}{(s-x)^2+y^2} \longrightarrow g(x_0),$$

gdy $(x,y) \longrightarrow (x_0,0)$, $y > 0$.

Dowód tego lematu z małymi zmianami pokrywa się z rozumowaniem przytoczonym w [2] str.270/1, dlatego nie przytaczamy go tutaj.

Lemat 6. Jeśli $g(s)$ jest funkcją ograniczoną i całkowalną bezwzględnie na półosi $t = 0, s \geqslant 0$, to zachodzi

$$(24)\qquad \lim_{y\to 0}\frac{y}{\pi}\int\limits_{\substack{t=0\\ s\geq 0}}\frac{g(s)\,ds}{(s+x)^2+y^2}=0\,.$$

Dowód.

Dla dowolnego $\rho > 0$ przy $x > x_0$ i $x-x_0 < \rho$ otrzymujemy

$$(25)\qquad (s+x)^2+y^2 > (s+x)^2 > (s+x-x_0)^2 = (s+\rho)^2$$

a wobec tego zachodzi

$$(26)\quad \frac{y}{\pi}\int\limits_{\substack{t=s\\ s\geq 0}}\frac{g(s)ds}{(s+x)^2+y^2} < \frac{My}{\pi}\int\limits_{\substack{t=s,\,s\geq 0\\ |x-x_0|<\rho}}\frac{ds}{(s+\rho)^2} = \frac{My}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{ds}{(s+\rho)^2} = \frac{M}{\pi}\,\frac{y}{\rho}\xrightarrow[y\to 0]{}0\,.$$

Lemat 7. Jeśli funkcja $g(s)$ jest funkcją ograniczoną i bezwzględnie całkowalną na półprostej $t = 0, s \geq 0$, to zachodzi

$$(27)\quad \frac{1}{\pi}\int\limits_{\substack{t=0\\ s\geq 0}}\frac{2x\,g(s)\,ds}{(s-y)^2+x^2}-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\substack{t=0\\ s\geq 0}}\frac{2x\,g(s)ds}{(s+y)^2+x^2}\xrightarrow[y\to 0]{}0\,.$$

Dowód.

Z uwagi na to, że $y \longrightarrow 0$, otrzymujemy

$$(28)\quad \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{\substack{t=0\\ s\geq 0}}\frac{2x\,g(s)ds}{(s-y)^2+x^2}-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\substack{t=0\\ s\geq 0}}\frac{2x\,g(s)\,ds}{(s+y)^2+x^2}\right| \leq \frac{2x}{\pi}\int\limits_{\substack{t=0\\ s\geq 0}}g(s)\left|\frac{1}{(s-y)^2+x^2}-\frac{1}{(s+y)^2+x^2}\right|ds \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[y\to 0]{}\frac{2x}{\pi}\int\limits_{\substack{t=s\\ s\geq 0}}g(s)\left|\frac{1}{s^2+x^2}-\frac{1}{s^2+x^2}\right|ds = 0\,.$$

Lemat 8. Jeśli funkcja $h(s)$ jest funkcją ciągłą w punkcie x_0, to zachodzi

$$(29)\quad \frac{1}{\pi}\int\limits_{\substack{t=0\\ s\geq 0}}\frac{(y-x)\,h(s)}{(s-x)^2+(s-y)^2}ds \xrightarrow[y\to x_0]{} h(x_0).$$

Wobec założenia o ciągłości w punkcie x_0 można dla dowolnego $\varepsilon > 0$ napisać

$$(30)\quad \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{\substack{t=s\\ s\geq 0}}\frac{(y-x)\,h(s)}{(s-x)^2+(s-y)^2}ds-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(y-x)\,h(x_0)}{(s-x)^2+(s-y)^2}ds\right| \leq \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{\substack{t=s\\ s\geq 0}}\frac{(y-x)(h(s)-h(x_0))}{(s-x)^2+(s-y)^2}ds\right| < \varepsilon\,,$$

co dowodzi prawdziwości tezy lematu.

Lemat 9. Jeśli funkcja $h(s)$ jest ograniczoną i całkowalną bezwzględnie dla $t = 0. s \geq 0$, to zachodzi

$$(31)\quad \frac{1}{\pi}\int\limits_{t=s,\,s\geq 0}\frac{(y-x)h(s)}{(s+x)^2+(s+y)^2}\xrightarrow[y\to x]{}0\,.$$

Dowód.

Na podstawie określenia trójkąta w (10) otrzymujemy

$$(s + x)^2 + (s + y)^2 \geqslant (s + y)^2 > (s + a)^2 \geqslant K. \tag{32}$$

Wobec tego mamy

$$\left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{t=s,s\geqslant 0} \frac{(y-x)h(s)ds}{(s+x)^2+(s+y)^2} \right| < \frac{1}{\pi} \frac{|y-x|}{K} \int\limits_{t=s,s\geqslant 0} |h(s)|\, ds \xrightarrow[y\to x]{} 0, \tag{33}$$

co kończy dowód lematu.

Lemat 10. Jeśli $h(s)$ jest funkcją ograniczoną i bezwzględnie całkowalną dla $t = s, s \geqslant 0$, to zachodzi

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{\substack{t=s\\ s\geqslant 0}} h(s) \left[\frac{x+y}{(s-x)^2+(s+y)^2} - \frac{x+y}{(s+x)^2+(s-y)^2} \right] ds \xrightarrow[y\to x]{} 0. \tag{34}$$

Dowód.

Wobec tego, że $y \longrightarrow x$ mamy

$$(s - x)^2 + (s + y)^2 \longrightarrow (s - x)^2 + (s + x)^2, \tag{35}$$

$$(s + x)^2 + (s - y)^2 \longrightarrow (s + x)^2 + (s - x)^2.$$

Oba wyrażenia po prawej stronie są ograniczone od dołu,gdyż każde z nich jest nie większe niż $(s + a)^2 > a^2 > 0$. Stąd wynika teza lematu.

5. Udowodnimy teraz

Twierdzenie 2. Jeżeli

1/ funkcja $g(s)$ jest ograniczoną na półprostej $s \geqslant 0$,

2/ funkcja $h(s)$ jest ograniczona na półprostej $s \geqslant 0$,

3/ obie te funkcje są bezwzględnie całkowalne, to funkcja określona w (7) jest harmoniczną w obszarze określonym w (1), jest ciągłą w domknięciu tego obszaru oraz przyjmuje na brzegu wartości odpowiednio na półprostej $t = 0$, $s \geqslant 0$ funkcji $g(s)$, na półprostej $t = s, s \geqslant 0$ funkcji $h(s)$.

Dowód.

Jak wynika z lematów 1,2,3,4 całki występujące we wzorze (7) oraz całki powstające przez jedno- i dwukrotne różniczkowanie jądra względem zmiennych x i y są w omawianym obszarze jednostajnie zbieżne. Ponieważ funkcja $G(s,t;x,y)$ jest funkcją Greena, jest więc funkcją harmoniczną a ponieważ

$$\Delta \frac{dG}{du} = \frac{d}{du} \Delta G = 0, \tag{36}$$

więc funkcja $u(x,y)$ jest harmoniczną w obszarze określonym w (1). Wobec lematów 5,6,7,8,9,10 funkcja $u(x,y)$ jest zbieżna odpowiednio w punktach ciągłości funkcji $g(x)$ do funkcji $g(x)$ w punktach ciągłości funkcji $h(x)$ do funkcji $h(x)$, cbdo.

Prace cytowane

[1] M. Picone: Appunti di analisi superiore, Napoli 1947.

[2] M. Krzyżański: Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego, Część 1, PWN, Warszawa 1957.

[3] F. Barański: Rozwiązanie problemu Riquier w półpłaszczyźnie i półprzestrzeni dla równania biharmonicznego, Prace Matematyczne, seria I, nr VIII,2, Warszawa 1964.

Summary

The solution of Dirichlet problem for an angle domain

In the paper the solution of Dirichlet problem for the domain $0 \leq x \leq y$ is given. The harmonic function satisfying the boundary data $g(x)$ for $y = 0, x \geqslant 0$ and $h(x)$ for $y = x \geqslant 0$ is of the form

$$(1) \quad u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{y}{(s+x)^2+y^2} - \frac{y}{(s-x)^2+y^2} + \frac{x}{(s-y)^2+x^2} - \frac{x}{(s+y)^2+x^2}\right) g(s)\,ds +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{y-x}{(s-x)^2+(s-y)^2} - \frac{y-x}{(s+x)^2+(s+y)^2} + \frac{x+y}{(s-x)^2+(s+y)^2} - \frac{x+y}{(s+x)^2+(s-y)^2}\right) h(s)\,ds.$$

In the construction of the solution the Green function is used. If the functions $g(s)$ and $h(s)$ are bounded and absolutely integrable, then the function (1) is the solution of the Dirichlet problem. This assertion is prooved.

Резюме

О решении задачи Дирихлет для некоторой условной области

В работе дается решение задачи Дирихле для области $0 \leqslant x \leqslant y$. Гармоническая функция, которая удовлетворяет краевые условия $u(x,0)=g(x)$; $u(x,x)=h(x)$, выражается формулой

$$(1)\quad u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{y}{(s+x)^2+y^2}-\frac{y}{(s-x)^2+y^2}+\frac{x}{(s-y)^2+x^2}-\frac{x}{(s+y)^2+x^2}\right)g(s)\,ds+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{y-x}{(s-x)^2+(s-y)^2}-\frac{y-x}{(s+x)^2+(s+y)^2}+\frac{x+y}{(s-x)^2+(s+y)^2}-\frac{x+y}{(s+x)^2+(s-y)^2}\right)h(s)\,ds.$$

Решение задачи конструируется при помощи функции Грина.

Если функции $g(s)$; $h(s)$ — . конечние и абсолютно интегрирувальные, тогда функция (1) ест решение задачи Дирихле . Это утверждение доказывается.