ROCZNIK NAUKOWO - DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE

Zeszyt 41 Prace matematyczne VI Rok 1970

Stanisław Wołodźko

O CIĄGŁYCH ROZWIĄZANIACH RÓWNANIA FUNKCYJNEGO $f[x + yf(x)] = f(x)f(y)$ W ZESPOLONEJ PRZESTRZENI LINIOWEJ UNORMOWANEJ

Wstęp

Niech E oznacza przestrzeń liniową nad ciałem liczb zespolonych $\mathcal{C}$. Przyjmujemy, że funkcja $f : E \to \mathcal{C}$ jest rozwiązaniem równania funkcyjnego

(1) $$f[x + y\, f(x)] = f(x)f(y).$$

Jako pierwsi równanie to w przypadku $f : R \to R$ /R - zbiór liczb rzeczywistych/ rozważali S. Gołąb i A. Schinzel [3]. Między innymi wyznaczyli oni rozwiązania ciągłe tego równania. Pewne dalsze twierdzenia dotyczące rozwiązań omawianego równania podał C.Gh. Popa [5]. Z. Daroczy [1] wyznaczył rozwiązania ciągłe równania (1) w przypadku, gdy E jest rzeczywistą przestrzenią Hilberta. Ogólne rozwiązanie tytułowego równania podał autor [6], a pewne modyfikacje do konstrukcji autora znalazł P. Javor [4]. Okazuje się jednak, że mimo znajomości konstrukcji dostarczającej wszystkich rozwiązań równania (1) wyznaczenie rozwiązań ciągłych tego równania /gdy E jest przestrzenią liniową topologiczną/ nie jest sprawą trywialną. W cytowanej pracy [6] autor próbował w oparciu o ogólne rozwiązanie wyznaczyć ciągłe rozwiązania równania (1) w przypadku $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Jednak rozumowanie autora zawiera lukę i odpowiednie twierdzenie/[6], tw.7, str.19/ nie podaje wszystkich tego typu rozwiązań. Wszystkie ciągłe rozwiązania tytułowego równania w zbiorze funkcji zespolonych zmiennej zespolonej podał autor w [7]. Przytoczymy twierdzenie z tej pracy.

<u>Twierdzenie 1</u>. Jedynymi rozwiązaniami ciągłymi równania (1) w przypadku $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ są funkcje

$$(2)\qquad \begin{array}{ll} (\alpha) & f = 0, \\ (\beta) & f(x) = 1 + ax, \\ (\gamma) & f(x) = 1 + \mathrm{Re}\,/ax/, \\ (\delta) & f(x) = \begin{cases} 1 + \mathrm{Re}\,/ax/ & \text{gdy } 1 + \mathrm{Re}\,/ax/ > 0, \\ 0 & \text{gdy } 1 + \mathrm{Re}\,/ax/ \leqslant 0 \end{cases} \end{array}$$

/a oznacza dowolną stałą zespoloną/.

Praca niniejsza składa się z trzech części. W § 1 zestawimy potrzebne w dalszym ciągu własności funkcji f w przypadku, gdy E jest przestrzenią liniową. W § 2 udowodnimy kilka własności funkcji f w przypadku, gdy E jest przestrzenią liniową topologiczną. W § 3 wyznaczymy ciągłe rozwiązania równania (1) w zespolonej przestrzeni liniowej unormowanej.

§ 1. Przyjmujemy, że E jest zespoloną przestrzenią liniową, oraz że funkcja $f : E \to \mathcal{C}$ jest rozwiązaniem równania (1). Wiadomo wówczas /[1], [6]/, że $f(\theta) = 0$ lub $f(\theta) = 1$. Jeżeli ponadto $f(\theta) = 0$, to $f = 0$. W dalszym ciągu stale będziemy zakładać, że $f \neq 0$, tym samym

(3) $$f(\theta) = 1.$$

Oznaczmy przez P zbiór okresów funkcji f /uważając wektor θ również za okres tej funkcji/. Wtedy

(4) $$P = f^{-1}(\{1\}).$$

W dalszym ciągu skorzystamy z następujących twierdzeń /[6], str. 19 /.

Lemat 1. Jeżeli $f(x) = f(y) \neq 0$, to $p = x-y$ jest okresem funkcji f.

Lemat 2. Jeżeli $\lambda \in f(E)$ oraz $p \in P$, to $\lambda p \in P$.

Lemat 3. Jeżeli $f(x) \neq 1$, to $f\left[\frac{x}{1-f(x)}\right] = 0$.

Z lematu tego wynika, że gdy funkcja $f \neq 1$ jest rozwiązaniem równania (1), to funkcja ta posiada miejsca zerowe.

§ 2. Zakładamy teraz, że E jest zespoloną przestrzenią liniową topologiczną oraz, że funkcja $f : E \to \mathcal{C}$ jest ciągłym rozwiązaniem równania (1). Udowodnimy dwa lematy.

Lemat 4. $f(E) = \mathcal{C}$ lub $f(E) \subset R$. W drugim przypadku $f(E)$ jest jednym z następujących zbiorów: $\{1\}$, $[0,\infty)$, R.

Dowód. Obierzmy dowolny wektor $e \in E$ różny od θ i połóżmy $\varphi_e(\lambda) = f(\lambda e)$ dla $\lambda \in \mathcal{C}$. Wtedy mamy

$$\varphi_e[\lambda + \mu\varphi_e(\lambda)] = f[\lambda e + \mu e f(\lambda e)] = f(\lambda e) f(\mu e) = \varphi_e(\lambda)\,\varphi_e(\mu)$$

dla $\lambda, \mu \in \mathcal{C}$. Zatem funkcja $\varphi_e : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ jest ciągłym rozwiązaniem równania (1). Jeżeli znajdziemy wektor $e \in E$ taki, że funkcja φ_e jest postaci (2)(β) z tym, że $\alpha \neq 0$, to $f(E)=\mathbb{C}$. Jeżeli natomiast dla każdego $e \neq \theta$ funkcja φ_e jest postaci (2)(γ) lub (2)(δ), to $f(E)\subset R$. Równie prosto stwierdzamy, że wówczas $f(E)=\{1\}$ lub $f(E) = [0,\infty)$ lub $f(E) = R$.

Lemat 5. Jeżeli $f(E) = \mathbb{C}$, to zbiór P jest podprzestrzenią liniową przestrzeni zespolonej E, jeżeli natomiast $f(E)\subset R$, to zbiór P jest podprzestrzenią liniową zwężenia rzeczywistego przestrzeni zespolonej E /tzn. przestrzeni E nad ciałem R/.

Dowód. Wystarczy rozważyć przypadek $f \neq 1$, gdyż w przeciwnym razie $P = E$.

a/ $f(E)=\mathbb{C}$. Teza wynika z lematu 2 i z faktu, że zbiór okresów P funkcji f jest podgrupą addytywną grupy addytywnej E.

b/ $f(E)\subset R$. Jeżeli $P = \{\theta\}$, to teza jest oczywista. Niech więc $P \neq \{\theta\}$. Obierzmy dowolny okres $p \neq 0$. Kładąc $\varphi_p(\lambda) = f(\lambda p)$ dla $\lambda\in\mathbb{C}$ otrzymujemy, że funkcja $\varphi_p:\mathbb{C}\to R$ jest rozwiązaniem ciągłym równania (1). Stąd i z twierdzenia 1 mamy

$$(5)\qquad \varphi_p(\lambda) = 1 + \mathrm{Re}/a\lambda/ \quad \text{lub} \quad \varphi_p(\lambda) = \begin{cases} 1 + \mathrm{Re}/a\lambda/ & \text{gdy } 1 + \mathrm{Re}/a\lambda/ > 0, \\ 0 & \text{gdy } 1 + \mathrm{Re}/a\lambda/ \leqslant 0, \end{cases}$$

gdzie a jest stałą zespoloną różną od zera /ponieważ $f \neq 1$/. Z drugiej strony, ponieważ $\varphi_p(1)= f(p)= 1$, z (5) dostajemy, że $\mathrm{Re}\,a = 0$, a więc

$$\varphi_p(\lambda) = 1 - \mathrm{Im}\,a\,\mathrm{Im}\lambda \quad \text{lub} \quad \varphi_p(\lambda) = \begin{cases} 1 - \mathrm{Im}\,a\,\mathrm{Im}\lambda & \text{gdy } 1-\mathrm{Im}\,a\,\mathrm{Im}\lambda > 0, \\ 0 & \text{gdy } 1-\mathrm{Im}\,a\,\mathrm{Im}\lambda \leqslant 0. \end{cases}$$

Stąd bez trudu wnioskujemy, że $\varphi_p(\lambda) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Im}\lambda = 0$. Ostatni wniosek zestawiony z określeniem funkcji φ_p i z (4) implikuje fakt, że $\lambda p \in P$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda \in R$, co kończy dowód, gdyż zbiór P jest grupą addytywną.

§ 3. Niech teraz E będzie zespoloną przestrzenią unormowaną. Jak dotychczas poszukujemy rozwiązań równania (1) w rodzinie funkcji odwzorowywujących zbiór E w zbiór liczb zespolonych. Udowodnimy następujące

Twierdzenie 2. Jedynymi rozwiązaniami ciągłymi równania (1) są funkcje

$$(\alpha)\qquad f = 0,$$

$$(\beta)\qquad f(x) = 1 + \varphi(x),$$

$$(6)\qquad (\gamma)\qquad f(x) = 1 + \mathrm{Re}\,\varphi(x),$$

$$(\delta)\qquad f(x) = \begin{cases} 1 + \mathrm{Re}\,\varphi(x) & \text{gdy } 1 + \mathrm{Re}\,\varphi(x) > 0, \\ 0 & \text{gdy } 1 + \mathrm{Re}\,\varphi(x) \leqslant 0 \end{cases}$$

/ φ oznacza dowolny funkcjonał liniowy ciągły w przestrzeni E/.

<u>Dowód</u>. Fakt, że funkcja (6) spełniają równanie (1) sprawdzamy bezpośrednio. Załóżmy teraz, że funkcja $f : E \to \mathbb{C}$ jest ciągłym rozwiązaniem równania (1). Wykażemy, że f jest postaci (6). Przyjmujemy dla uproszczenia rozważań, że $0 \neq f \neq 1$. Wówczas funkcja f posiada miejsca zerowe /lemat 3/. Oznaczmy przez x_0 miejsce zerowe funkcji f takie, że na odcinku $\{\alpha x_0 : 0 \leq \alpha < 1\}$ funkcja f jest różna od zera. Wybór taki jest możliwy z uwagi na to, że funkcja f jest ciągła oraz $f(\theta) = 1$. W ten sposób uzyskaliśmy fakt, że punkt x_0 jest punktem skupienia zbioru $A \stackrel{df}{=} \{x \in E : f(x) \neq 0\}$.

W dalszych rozważaniach przestrzeń E będziemy traktować jako przestrzeń zespoloną lub rzeczywistą /zawężając w razie potrzeby ciało skalarów do zbioru liczb rzeczywistych/ w zależności od tego, czy zbiór $f(E)$ jest zbiorem wszystkich liczb zespolonych, czy podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych. Ciało skalarów będziemy oznaczać przez K. Z lematu 5 wynika, że zbiór okresów P funkcji f jest podprzestrzenią liniową przestrzeni E nad ciałem K. Oznaczmy przez P' dowolnie obraną podprzestrzeń przestrzeni E komplementarną do przestrzeni P. Wtedy dla każdego $x \in E$ istnieją jednoznacznie określone elementy $p \in P$ i $x' \in P'$ takie, że $x = p + x'$. Wektor x' jest rzutem /równoległym do przestrzeni P/ wektora x na przestrzeń P'. Z określenia zbioru P' mamy dla $x \in E$

$$f(x) = f(p + x') = f(x'). \tag{7}$$

Ustalmy dowolnie $x \in A$. Biorąc $y \in A$ z uwagi na to, że $f[x+yf(x)] = f[y + xf(y)]$ z lematu 1 dostajemy, iż wektor $c(x,y) \stackrel{df}{=} x+yf(x) - y - xf(y)$ jest okresem funkcji f. Stąd, z faktu, że zbiór okresów funkcji ciągłej jest zbiorem domkniętym oraz z wyboru punktu x_0 wynika, że

$$c(x,x_0) = \lim_{y \to x_0} c(x,y) = x + x_0[f(x) - 1]$$

jest okresem funkcji f. Z kolei stąd, z lematu 2 i z określenia przestrzeni P' dostajemy, że wektor $x' + x'_0[f(x') - 1]$, gdzie x', x'_0 oznaczają odpowiednio rzuty punktów x i x_0 na przestrzeń P', jest elementem zbioru P /gdyż wektor $x' + x'_0[f(x') - 1] - c(x,x_0)$ jest okresem funkcji f /i równocześnie elementem zbioru P' /gdyż P jest przestrzenią liniową oraz $x', x'_0 \in P'$/. Ale $P \cap P' = \{\theta\}$, więc $x' + x'_0[f(x') - 1] = \theta$, czyli

$$x' = x'_0\left[1 - f(x')\right]. \tag{8}$$

Jeżeli teraz przez A^r oznaczymy rzut zbioru A na przestrzeń P, to z (8) wnioskujemy, że

$$A^r = \left\{(1 - \lambda)\ x'_0 : \lambda \in f(E) \setminus \{0\}\right\}. \tag{9}$$

Natomiast punkty zbioru $P' \setminus A^r$ są rzutami zer funkcji f, a więc z uwagi na (7) są również miejscami zerowymi tej funkcji. Stąd wynika, że wymiar /względem ciała K/ przestrzeni P' wynosi 1, a zatem

(10) $$P' = \{\alpha x_0' : \alpha \in K\}.$$

W przeciwnym bowiem wypadku istnieje wektor $y' \in P$ taki, że prosta $\{\alpha y' : 0 \neq \alpha \in K\}$ nie posiada punktów wspólnych ze zbiorem A^r, a więc jest zbiorem zer funkcji f, a to jest niemożliwe wobec (3) i ciągłości funkcji f.

Zauważmy teraz, że przestrzeń E, jako przestrzeń liniowa unormowana, jest przestrzenią lokalnie wypukłą, zbiór P jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni E oraz $x_0' \notin P$. Stąd wynika /[2], str.172/, że istnieje ciągły funkcjonał liniowy $\varphi : E \to K$ taki, że $\varphi(x_0') = -1$ oraz $\varphi(P) = \{0\}$. Ale zbiór P jest hiperpłaszczyzną w przestrzeni E /wymiar P' wynosi 1/, a zatem

(11) $$\varphi^{-1}(\{0\}) = P.$$

Działając na obie strony równości (8) funkcjonałem φ otrzymujemy $f(x') = 1 + \varphi(x')$ dla $x' \in A^r$, a stąd, z (7) i (11) mamy

(12) $$f(x) = \begin{cases} 1 + \varphi(x) & \text{gdy } x \in A, \\ 0 & \text{gdy } x \notin A. \end{cases}$$

Rozważymy teraz dwa przypadki /por.lemat 4/.

1. $f(E) = \mathbb{C}$. Wtedy również $K = \mathbb{C}$. Stąd, z (9) i (10) wnioskujemy, że $A^r = P' \setminus \{x_0'\}$. To oznacza, że $A = E \setminus \{x_0 + P\}$, zatem z (12) mamy (6)($\beta$).

2. $f(E) \subset R$. Zatem $K = R$.

a/ $f(E) = R$. Wtedy $A^r = P' \setminus \{x_0'\}$ i podobnie jak w przypadku 1 otrzymujemy, że $f(x) = 1 + \varphi(x)$, gdzie $\varphi : E \to R$ jest funkcjonałem liniowym i ciągłym. Stąd wynika (6)(δ).

b/ $f(E) = [0, \infty)$. W tym przypadku z (9) i (10) mamy $A^r = P' \setminus \{\alpha x_0' : \alpha \geqslant 1\}$, a więc

$$f(\alpha x_0') = \begin{cases} 1 + \varphi(\alpha x_0) & \text{gdy } \alpha < 1, \\ 0 & \text{gdy } \alpha \geqslant 1, \end{cases}$$

gdzie φ jest rzeczywistym funkcjonałem liniowym ciągłym. Ale $\varphi(\alpha x_0') = -\alpha$, więc dla $x' \in P'$

$$f(x') = \begin{cases} 1 + \varphi(x') & \text{gdy } 1 + \varphi(x') > 0, \\ 0 & \text{gdy } 1 + \varphi(x') \leqslant 0. \end{cases}$$

Stąd i z (17) i (11) mamy

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \varphi(x) & \text{gdy } 1 + \varphi(x) > 0, \\ 0 & \text{gdy } 1 + \varphi(x) \leqslant 0. \end{cases}$$

Zatem funkcja f jest postaci (6)(δ) .

Z uwagi na to, że $0 \neq f \neq 1$ wobec lematu 4 przypadki a/ i b/ wyczerpują wszystkie możliwości. Tym samym dowód twierdzenia 2 jest zakończony.

P r a c e c y t o w a n e

[1] Z. D a r o c z y, Az $f[x + yf(x)] = f(x)f(y)$ függvenyegyenlet folytones megoldasairol Hilbert - terekben, Matematikai Lapok, XVII, 3-4 /1966/, 339-343.

[2] Р. Эдвардс, Функциональный анализ, Мир, Москва 1969.

[3] S. G o ł ą b, A. S c h i n z e l, Sur l'équation fonctionnelle $f[x + yf(x)] = f(x)f(y)$, Publ.Math.Debrecen 6 /1959/, 113 - 125.

[4] P. J a v o r, On the general solution of the functional equation $f[x + yf(x)] = f(x)f(y)$, Aeq.Math.

[5] C.Gh. P o p a, Sur l'équation fonctionnelle $f[x + y f(x)] = f(x)f(y)$, Ann.Polon.Math.17 /1965/, 193-198.

[6] S. W o ł o d ź k o, Solution générale de l'équation fonctionnelle $f[x + yf(x)] = f(x)f(y)$, Aeq.Math.2 /1968/, 12-29.

[7] S. W o ł o d ź k o, Sur les solutions continues de l'équation fonctionnelle $f[x + yf(x)] = f(x)f(y)$ dans l'ensemble des fonctions complexes de la variable complexe, Praca przesłana do redakcji Aequationes Mathematicae.

S u m m a r y

On continuous solutions of the functional equation $f[x + yf(x)] = f(x)f(y)$ in complex normed space.

Let E be a complex normed space and let $f : E \to C$ /C denote the set of complex numbers /be the solution of the functional equation

(1) $$f[x + y\,f(x)] = f(x)f(y).$$

In the present paper there is proved the following

<u>Theorem</u>. The unique continuous solutions of the equation (1) there are

$$f = 0,$$
$$f(x) = 1 + \varphi(x),$$
$$f(x) = 1 + \operatorname{Re}\varphi(x),$$
$$f\,x = \begin{cases} 1 + \operatorname{Re}\varphi(x) & \text{when } 1 + \operatorname{Re}\varphi(x) > 0, \\ 0 & \text{when } 1 + \operatorname{Re}\varphi(x) \leqslant 0 \end{cases}$$

/φ denote a continuous linear map of space E into space C /.

Р е з ю м е

О НЕПРЕРЫВНЫХ РЕШЕНИЯХ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $f[x + yf(x)] = f(x)f(y)$

В КОМПЛЕКТНОМ НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть E обозначает комплексное нормированное пространство и пусть функция

$$f : E \to C$$

/C – множество комплексных чисел/ является решением функционального уравнения

/I/ $$f[x + yf(x)] = f(x)f(y).$$

В работе доказывается следующая

<u>Теорема</u>. Единственными непрерывными решениями функционального уравнения /I/ являются функции

$$f = 0,$$
$$f(x) = 1 + \varphi(x),$$
$$f(x) = 1 + \operatorname{Re}\varphi(x),$$
$$f(x) = \begin{cases} 1 + \varphi\,x & \text{если } 1 + \operatorname{Re}\varphi(x) > 0, \\ 0 & \text{если } 1 + \operatorname{Re}\varphi(x) \leqslant 0, \end{cases}$$

/φ обозначает непрерывный линейный функционал в пространстве E/.