ROCZNIK NAUKOWO-DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE

Zeszyt 48 Prace fizyczne I Rok 1973

Zbigniew Borelowski

O MODELU CZĄSTKI SWOBODNEJ OPISANEJ LAGRANGIANEM ZALEŻNYM OD WYŻSZYCH POCHODNYCH CZTEROPRĘDKOŚCI PO CZASIE WŁASNYM

U podstaw standartowej kwantowej teorii pola /teorii mogącej opisać akty kreacji i anihilacji cząstek elementarnych/ leży, jak dobrze wiadomo, równanie Kleina-Gordona:

$$\left(\Box + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right)\Psi(x) = 0 \qquad (1)$$

$\Box$ - operator D'Alemberta, $\hbar$ - stała Plancka, m_0 - masa spoczynkowa cząstki, c - prędkość światła w próżni, $\Psi(x)$ - skalarna funkcja pola odpowiadającego naszej cząstce /o tej właśnie masie m_0/, którą opisuje.

Równanie to otrzymuje się z połączenia szczególnej teorii względności /teorii na wskroś makroskopowej/ z mechaniką kwantową /a więc z teorią par exellence mikroskopową/. Żeby bowiem to równanie otrzymać przyjmujemy, że czteropęd p^α swobodnej cząstki jest związany z jej czteroprędkością u^α $\left(u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau};\ \alpha = 1,2,3,4;\ x^4 = ct.\ \ \tau\right.$ - czas własny cząstki /następująco

$$p^\alpha = m_0 u^\alpha \qquad /2/$$

skąd wynika, że

$$p_\lambda p^\lambda = m_0^2\, u_\lambda u^\lambda \qquad /2'/$$

Z podstaw szczególnej teorii względności wynika, że:

$$u_\lambda u^\lambda \equiv c^2 = \text{inv} \qquad /3/$$

Wykorzystując teraz postulaty mechaniki kwantowej nadajemy równaniu /2'/ sens operatorowy kładąc:

$$p^\alpha = - i\, \hbar \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \qquad /4/$$

a następnie traktując wyrażenie[x/] $m_o^2(\mu\mu)$ jako liczbę /równą $m_o^2 c^2$/ i "obkładając" równanie /2'/ funkcją pola $\Psi(x)$. Otrzymujemy w ten sposób równanie /1/.

Zauważmy teraz iż związek /2/ nie jest definicją pędu lecz równaniem określającym go jedynie dla Langrangianu cząstki postaci:

$$L_o = m_o c\sqrt{(\mu\mu)} \qquad /5/$$

Ogólnie bowiem czteropędem cząstki nazywamy taki czterowektor p^{α}, którego stałość w miarę upływania czasu własnego τ tej cząstki jest konsekwencją niezmienniczości jej działania $A\left(A = \int L d\tau\right.$, L - Langrangian cząstki$\left.\right)$ względem translacji przestrzennoczasowych. Jeśli Langrangian $L = L_0$ jest skalarną funkcją samej tylko czteroprędkości μ^{α} cząstki swobodnej /co w makrofizyce przy zaniedbaniu wewnętrznej struktury cząstki rzeczywiście ma miejsce/ to mamy:

$$p^{\alpha} \overset{df}{=} p_0^{\alpha} \overset{df}{=} \frac{\partial L_0(\mu^{\alpha})}{\partial \mu^{\alpha}} = m_0 \mu^{\alpha} \qquad /6/$$

Jeśli jednak przyjąć /na razie zupełnie formalnie/ iż jest on skalarną funkcją nie tylko samej czteroprędkości ale i czteroprzyspieszenia ω^{α} $\left(\omega^{\alpha} = \frac{d\mu^{\alpha}}{d\tau}\right)$ to wówczas czteropęd cząstki opisanej tym Langrangianem /oznaczmy go przez L_1 / ma postać:

$$p^{\alpha} \overset{df}{=} p_{(1)}^{\alpha} \overset{df}{=} \frac{\partial L_1(\mu^{\alpha}, \omega^{\alpha})}{\partial \mu^{\alpha}} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L_1(\mu^{\alpha}, \omega^{\alpha})}{\partial \omega^{\alpha}} \qquad /7/$$

lub krócej: $$p_{(1)}^{\alpha} \overset{df}{=} \frac{\partial L_1(\mu^{\alpha}, \omega^{\alpha})}{\partial \mu^{\alpha}} - \frac{d}{d\tau} k_{(1)}^{\alpha} \qquad /7'/$$

gdzie $$k_{(1)}^{\alpha} \overset{df}{=} \frac{\partial L_1(\mu^{\alpha}, \omega^{\alpha})}{\partial \omega^{\alpha}}$$

Czterowektor $k_{(1)}^{\alpha}$ nazywa się /wewnętrznym /pierwszym/czteropędem cząstki opisanej Langrangianem L_1.

Jeśli przyjąć, że Langrangian $L = L_2$ zależy jeszcze i od pochodnej czteroprzyspieszenia $\dot{\omega}^{\alpha}$ $\left(\dot{\omega}^{\alpha} \overset{df}{=} \frac{d\omega^{\alpha}}{d\tau}\right)$ to otrzymamy odpowiednio:

$$L = L_2 = L_2(\mu^{\alpha}, \omega^{\alpha}, \dot{\omega}^{\alpha})$$

x/ Iloczyn skalarny czterowektorów a^{α} i b^{α} będziemy oznaczać (ab); Posługujemy się metryką $(-,-,-,+)$ przestrzeni Minkowskiego.

$$p^{\alpha} \overset{df}{=} p^{\alpha}_{(2)} \overset{df}{=} \frac{\partial L_2}{\partial \mu^{\alpha}} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L_2}{\partial \omega^{\alpha}} + \frac{d^2}{d\tau^2}\frac{\partial L_2}{\partial \dot{\omega}^{\alpha}} \qquad /8/$$

lub krócej

$$p^{\alpha}_{(2)} \overset{df}{=} \frac{\partial L_2}{\partial \mu^{\alpha}} - \frac{d}{d\tau} k^{\alpha}_{(2)}$$

przy czym

$$k^{\alpha}_{(2)} \overset{df}{=} \frac{\partial L_2}{\partial \omega^{\alpha}} - \frac{d}{d\tau} q^{\alpha}_{(1)} \qquad /8'/$$

gdzie

$$q^{\alpha}_{(1)} \overset{df}{=} \frac{\partial L_2}{\partial \dot{\omega}^{\alpha}}$$

$q^{\alpha}_{(1)}$ nazywa się pierwszym wewnętrznym czteropędem

$k^{\alpha}_{(2)}$ nazywa się drugim wewnętrznym czteropędem.

Podobnie konstruuje się czteropędy p^{α} dla cząstek opisanych Langragianami zależnymi od jeszcze wyższych pochodnych μ^{α} względem τ. Za każdym jednak razem równania ruchu cząstki mają taką samą postać:

$$\frac{d}{d\tau} p^{\alpha} = 0 \qquad /9/$$

i całkowita energia w tej cząstce wyraża się wzorem

$$W = c\sqrt{(pp)} \qquad /10/$$

czteropęd cząstki p^{α} jest bowiem wektorem czasopodobnym. Natomiast dla cząstki opisanej Lagrangianem $L \neq L_0$ nie jest on na ogół równoległy do czteroprędkości

$$\text{jeśli} \quad p^{\alpha} \neq p_0^{\alpha} \quad \text{to} \quad p^{\alpha} \nparallel \mu^{\alpha} \qquad /11/$$

Wskutek tego kręt $K^{\alpha\beta}$ cząstki nie zachowuje się w czasie

$$K^{\alpha\beta} \overset{df}{=} x^{\alpha}p^{\beta} - x^{\beta}p^{\alpha} \qquad /12/$$

$$\frac{d}{d\tau}K^{\alpha\beta} = \mu^{\alpha}p^{\beta} - \mu^{\beta}p^{\alpha} \neq 0 \quad \text{gdy} \quad p^{\alpha} \nparallel \mu^{\alpha} \qquad /13/$$

Aby więc utrzymać w mocy prawo zachowania krętu swobodnej cząstki należy uzupełnić jej kręt $K^{\alpha\beta}$ /zwany krętem "zewnętrznym"/ krętem "wewnętrznym" opisanym biwektorem $s^{\alpha\beta}$ tak dobranym by

$$\frac{d}{d\tau}\left(K^{\alpha\beta} + s^{\alpha\beta}\right) = 0 \qquad /14/$$

Tak więc wydaje się naturalnym interpretować powyższy wynik jako fakt iż cząstka opisana Langrangianami L_1, L_2, ... jest cząstką spinową. Konkretną postać biwektora spinu $s^{\alpha\beta}$ otrzymujemy z równania /14/,/12/

oraz z postaci Langrangianu. I tak np. dla cząstki opisanej Langrangianem L_1 otrzymujemy:

$$\Lambda^{\alpha\beta} \stackrel{df}{=} \Lambda^{\alpha\beta}_{(1)} = \mu^{\alpha} k^{\beta}_{(1)} - \mu^{\beta} k^{\alpha}_{(1)} \qquad /15/$$

Dla cząstki opisanej przez Langrangian L_2 dostajemy odpowiednio

$$\Lambda^{\alpha\beta} \stackrel{df}{=} \Lambda^{\alpha\beta}_{(2)} = \mu^{\alpha} k^{\beta}_{(2)} - \mu^{\beta} k^{\alpha}_{(2)} + \omega^{\alpha} q^{\beta}_{(1)} - \omega^{\beta} q^{\alpha}_{(1)} \qquad /16/$$

Sposób konstrukcji Langrangianów L_1, L_2 itd. jest w bardzo znacznym stopniu dowolny. Jeśli jednak ograniczyć się do możliwie najprostszej ich postaci byleby tylko był spełniony warunek:

$$\frac{dL}{d\tau} = 0 \qquad /17/$$

wówczas np. Langrangian L_1 przybierze postać

$$L_1 = m_0\left[c\sqrt{(\mu\mu)} - \frac{l^2}{c^2}(\omega\omega)\right] \qquad /18/$$

a L_2 będzie kształtu

$$L_2 = m_0\left[c\sqrt{(uu)} - \frac{l^2}{c^2}(\omega\omega) + \eta\frac{l^4}{c^4}(\dot{\omega}\dot{\omega})\right] \qquad /19/$$

gdzie l jest charakterystyczną dla Langrangianów cząstek spinowych stałą w wymiarze długości, η - stałą bezwymiarową. Pojawienie się owej stałej l jest automatyczne i konieczne w celu ujednolicenia wymiarów poszczególnych składników każdego Langrangianu.

Rozwiązania równań ruchu /9/ w układzie spoczynkowym cząstki /tj. w tym istniejącym inercjalnym układzie współrzędnych Σ_0 w którym $\hat{p} = 0$/ mają postać $u^i = 0$, $u^4 = c$ tylko dla cząstki bezspinowej tj.dla cząstki opisanej Langrangianem L_0. Dla pozostałych typów cząstek otrzymujemy rozwiązania opisujące (w Σ_0) płaski ruch po okręgu o stałej średnicy i ze stałym okresem ruchu przy czym płaszczyzna tego okręgu jest prostopadła do stałego w czasie trójwektora spinu $\hat{s}$ (s^{23}, s^{31}, s^{12}).

Wydaje się narzucającą następująca interpretacja: Langrangiany L_1, L_2... opisują spinowe cząstki rozmyte. Miarą tego rozmycia jest średnica Λ owego okręgu w Σ_0, który jako całość obrazuje spoczywającą w tym układzie cząstkę. Średnicę ową można porównywać z długością fali de Broglie´a dla naszej cząstki. Można też, wychodząc z koncepcji "elementarnej długości" l, traktować ją jako wielokrotność l. Znamienną jest rzeczą, iż energia takiej "rozmytej" cząstki spinowej obliczona ze wzoru /10/ jest większa od zwykłej energii spoczynkowej m_0c^2, gdzie m_0 jest stałą multiplikatywną Lagrangianu L_0

Odpowiednią różnicę $\Delta W = W - m_o c^2$ można próbować interpretować jako "energię oddziaływania cząstki z czasoprzestrzenią" przejawiającego się w rozmyciu cząstki. We wszystkich powyższych przypadkach położenie $l = 0$ sprowadza wszystkie Langrangiany do L_o a więc cząstki do bezspinowych, nie rozmytych.

Wracając do wyjściowego równania Kleina-Gordona zauważamy iż przejdzie nam ono teraz w równanie różnicowe typu

$$\left(\tilde{\Box} + \frac{W^2}{c^2\hbar^2}\right)\Psi(x) = 0 \qquad /20/$$

gdzie

$$\tilde{\Box} \stackrel{df}{=} \frac{\tilde{\partial}}{\partial x^\nu}\frac{\tilde{\partial}}{\partial x_\nu} \qquad /21/$$

przy czym $\frac{\tilde{\partial}}{\partial x^\nu}$ jest operatorem różnicowym postaci

$$\frac{\tilde{\partial}}{\partial x^1}\Psi(x) \stackrel{df}{=} \frac{\Psi(x^1+l, x^2, x^3, x^4) - \Psi(x^1, x^2, x^3, x^4)}{l}, \quad (\nu=1) \qquad /22/$$

itd. dla $\nu = 2,3,4$.

Na zakończenie tytułem przykładu rozpatrzmy cząstkę opisaną Lagrangianem L_1 o postaci:

$$L_1 = m_o\left[c\sqrt{(\mu\mu)} - \frac{l_o^2}{2c^2}(\omega\omega)\right]; \quad \left(l_o \stackrel{df}{=} l\sqrt{2}\right) \qquad /23/$$

pęd wewnętrzny $k^\alpha_{(1)}$ tej cząstki ma postać:

$$k^\alpha_{(1)} \stackrel{df}{=} \frac{\partial L_1}{\partial \omega^\alpha} = -m_o\frac{l_o^2}{c^2}\omega^\alpha \qquad /24/$$

czteropęd $p^\alpha_{(1)}$ ma więc kształt:

$$p^\alpha_{(1)} \stackrel{df}{=} \frac{\partial L_1}{\partial \mu^\alpha} - \frac{d}{d\tau}k^\alpha_{(1)} = m_o\mu^\alpha + m_o\frac{l_o^2}{c^2}\dot{\omega}^\alpha \qquad /25/$$

Równania ruchu $\dot{p}^\alpha_{(1)} = 0$ pokrywają się z równaniami Mathissona dla cząstki w spinie 1/2 oraz z równoważnymi im w tym przypadku równaniami Frenkla dla elektronu.

Całkując te równania w układzie Σ_o otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \mu_1(\tau) &= \mp\frac{\lambda}{m_o l_o}\sin\frac{c}{l}\tau \\ \mu_2(\tau) &= \mp\frac{\lambda}{m_o l_o}\cos\frac{c}{l}\tau \\ \mu_3(\tau) &= 0 \\ \mu_4(\tau) &= \pm c\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{m_o^2c^2l_o^2}} \end{aligned} \qquad /26/$$

gdzie oś x^3 jest równoległa do trójwektora $\tilde{s}$ spinu naszej cząstki, λ jest wielkością zależną tylko od stałych całkowania równań ruchu. Z /26/ widać, że średnica okręgu (w płaszczyźnie x^1 x^2) $\Lambda = \frac{2\lambda}{m_o c}$. Kładąc ją jako miarę rozmycia cząstki równą długości fali de Broglie'a $\Lambda_B = \frac{\hbar}{m_o c}$ otrzymujemy:

$$\lambda = \frac{\hbar}{2} \tag{/27/}$$

tensor spinu $s^{\alpha\beta}$ ma postać:

$$s^{\alpha\beta} = \mu^{\alpha} k^{\beta}_{(1)} - \mu^{\beta} k^{\alpha}_{(1)} \tag{/28/}$$

Z /26/, /27/ i /24/ wynika, że $s^{\alpha\beta} s_{\alpha\beta} = 2c^2 (k_{(1)} k_{(1)}) = \frac{\hbar^2}{4}$. /28'/

Energia W naszej cząstki w Σ_o ma na mocy /25/ i /26/

postać $W = c\sqrt{(p_{(1)}\, p_{(1)})} = m_o c^2 \sqrt{1 + \left(\frac{\Lambda}{2 t_o}\right)^2}$ /29/

a stąd "energia rozmycia" cząstki ΔW ma postać

$$\Delta W = m_o c^2 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\Lambda}{2 t_o}\right)^2} - 1\right] \tag{/30/}$$

L i t e r a t u r a

Borelowski Z.: Acta Physica Polonica 27, 821 /1965/.

ON A MODEL OF A FREE ELEMENTARY PARTICLE WITH THE LAGRANGIAN DEPENDING OF HIGHER ORDER DERIVATIVES OF VELOCITY

S u m m a r y

The Spin Free Particle with the diffluence in the Center Mass System is described. The momentum of this particle is non parallel to velocity. The Klein-Gordon equation for this case is modified.

"Модель свободной элементарной частицы, Лагранжиан которой зависит от производных скорости".

Резюме

Свободная частица, Лагранжиан которой зависит от производных скорости, обладает внутренним моментом импульса - так сказать классическим спином. Она "размытая" в системе покоя. Её импульс не параллелен скорости. При переходе на половой уровень, уравнение Клейна-Гордона соответственно модифицируется.