ROCZNIK NAUKOWO—DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE

Zeszyt 48 Prace fizyczne I Rok 1973

Dr Zbigniew Borelowski
Mgr Sławomir Brzezowski
Zakład Fizyki Teoretycznej
Instytutu Fizyki UJ
w Krakowie

MACIERZ "S" - REGULARYZACJA BOGOLUBOWA I REPREZENTACJA KADYSZEWSKIEGO

1. Pojęcie operatora "S"

Jak wiadomo z mechaniki kwantowej, stan układu fizycznego opisać można w sposób kompletny za pomocą tzw. funkcji stanu $\Psi(t)$. Rozwój stanu fizycznego $\Psi(t)$ w czasie opisuje się za pomocą operatora unitarnego $U(t_2,t_1)$ zdefiniowanego, jak następuje:

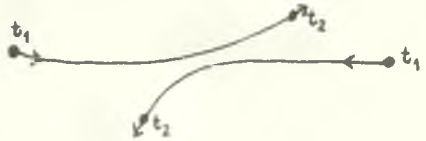
$$U(t_2,t_1)\,\Psi(t_1) = \Psi(t_2) \qquad .../1.1/$$

Jeżeli funkcja $\Psi(t)$ opisuje układ rozpraszanych na sobie cząstek, to interesuje nas związek między stanem cząstek przed rozproszeniem

$$\Psi(t_1) \overset{df}{=} |in\rangle$$

i po rozproszeniu

$$\Psi(t_2) \overset{df}{=} |out\rangle^{*/}$$



Zakładamy, że cząstki biorące udział w rozproszeniu są swobodne z wyjątkiem krótkiej chwili interakcji. Oś czasu ustalamy tak, aby t=o odpowiadało momentowi oddziaływania i wtedy przejście od stanu $|in\rangle$ do stanu $|out\rangle$ opisujemy za pomocą operatora $U(t_2,t_1)$:

*/ Definicje te odbiegają od spotykanych w literaturze.

$$|out\rangle = U(t_2,t_1)\,|in\rangle \qquad .../1.1'/$$

gdzie

$$t_1 < 0$$
$$t_2 > 0$$

Założenie, że funkcje $|in\rangle$ i $|out\rangle$ opisują cząstki swobodne /tzn. nie zmieniają się w czasie w sposób istotny/, pozwala zrobić przejście graniczne

$$t_1 \longrightarrow -\infty$$
$$t_2 \longrightarrow +\infty$$

co doprowadza do zdefiniowania operatora "S" - podstawowego operatora w kwantowej teorii pola:

$$S = \lim_{\substack{t_1 \to -\infty \\ t_2 \to +\infty}} U(t_2,t_1) \qquad .../1.2/$$

a więc

$$\Psi(+\infty) = S\,\Psi(-\infty) \qquad .../1.3/$$

W przypadku opisu rozproszeń cząstek zapisujemy zwykle:

$$\Psi(-\infty) \equiv |in\rangle$$
$$\Psi(+\infty) \equiv |out\rangle \qquad .../1.4/$$

Zgodnie z ogólnym formalizmem mechaniki kwantowej stany $|in\rangle$ i $|out\rangle$ możemy wyrazić jako superpozycję zupełnego układu stanów ortonormalnych, np. stanów własnych $|\vec{p}\rangle$ /albo $\Phi_{\vec{p}}(\vec{x})$/ operatora pędu:

$$|in\rangle = \int |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}|in\rangle \, d^3\vec{p} \qquad .../1.5/$$

gdzie $\langle \vec{p}|in\rangle$ jest funkcją pędu i oznacza iloczyn skalarny

$$\int \Phi^*_{\vec{p}}(\vec{x})\ \Psi(\vec{x},t)\ d^3\vec{x} \qquad .../1.6/$$

zapisany w notacji Diraca. Analogicznie

$$|out\rangle = \int |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}|out\rangle \, d^3\vec{p} \qquad .../1.5/$$

Zwykle stan $|in\rangle$ jest wprost stanem własnym operatora pędu $|\vec{p}_{in}\rangle$ /strumień cząstek o jednakowych pędach $\vec{p}$ in/. Stan $|out\rangle$ jest na ogół superpozycją stanów $|\vec{p}\rangle$ i możemy tylko badać gęstość prawdopodobieństwa $\varrho_{\vec{p}}$ z jakim stan $|in\rangle$ przejdzie w wybrany stan $|\vec{p}\rangle$:

$$\varrho_{\vec{p}} = |\langle out|\vec{p}\rangle|^2 = |\langle\vec{p}\ in|S|\vec{p}\rangle|^2 \qquad .../1.7/$$

bo w tym wypadku

$$|out\rangle = S|\vec{p}\ in\rangle$$

Mówimy o gęstości prawdopodobieństwa przejścia $\varrho_{\vec{p}}$, ponieważ widmo stanów własnych pędu $|\vec{p}\rangle$ jest ciągłe i prawdopodobieństwo przejścia dokładnie w stan $|\vec{p}\ out\rangle$ jest równe zeru. Dopiero wielkość $\varrho_{\vec{p}_{out}} d^3\vec{p}$ daje prawdopodobieństwo otrzymania po rozproszeniu stanu o pędzie z przedziału $/\vec{p}_{out}, \vec{p}_{out} + d\vec{p}/$. Liczbę zespoloną $\langle\vec{p}\ |S|\vec{p}_{in}\rangle$ /dla ustalonych pędów/ nazywamy elementem macierzowym macierzy rozpraszania. Dlatego zamiast terminu "operator S" często spotyka się określenie"macierz S". Elementy tej macierzy związane są z tzw. różniczkowym przekrojem czynnym $\frac{d\sigma}{dp}(pin,p)$, który wyznaczamy doświadczalnie. Porównanie wyników doświadczenia z przekrojem czynnym obliczonym teoretycznie pozwala więc na sprawdzenie teorii.

Przystępujemy do wyprowadzenia jawnej postaci operatora "S". Zależność funkcji falowej od czasu wyznaczyć można z równania Schrödingera /najwygodniej w obrazie oddziaływania/:

$$\hat{H}_I(t)\ \Psi(t) = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) \qquad .../1.8/$$

w układzie jednostek $\hbar = c = 1$. Korzystając z definicji /1.1/ otrzymujemy:

$$\hat{H}_I(t)\ U(t,t_0)\Psi(t_0) = i\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0)\Psi(t_0) \qquad .../1.9/$$

dla dowolnego t i dla dowolnego stanu $\Psi(t_0)$. Równanie to przepisać można w postaci operatorowej

$$\hat{H}_I(t)\ U(t,t_0) = i\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) \qquad .../1.10/$$

a po nałożeniu warunku początkowego $U(t_0,t_0) = \hat{1}$ w postaci operatorowego równania całkowego

$$U(t,t_0) = 1 - i\int_{t_0}^{t} H_I(t')\,U(t',t_0)\,dt' \qquad .../1.11/$$

Iteracyjne rozwiązanie tego równania ma postać szeregu nieskończonego

$$U(t,t_0) = 1 + (-i)\int_{t_0}^{t} dt_1\, H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2\, H_I(t_1) H_I(t_2) + \dots \qquad \dots/1.12/$$

Kolejny wyraz U_n tego szeregu ma postać

$$U_n(t,t_0) = (-i)^n \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n\, H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n)$$

co można też zapisać w postaci

$$U_n(t,t_0) = (-i)^n \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_n} dt_n\, \theta(t_1-t_2) \dots \theta(t_{n-1}-t_n) \cdot$$
$$\cdot\, H_I(t_1) \dots H(t_n) \qquad \dots/1.13/$$

gdzie funkcja Heaviside'a $\theta(t)$ jest określona jak następuje:

$$\theta(t) = 0 \quad \text{gdy} \quad t < 0$$
$$\theta(t) = 1 \quad \text{gdy} \quad t \geqslant 0 \qquad \dots/1.14/$$

Po przejściu granicznym $t \longrightarrow +\infty$, $t_0 \longrightarrow -\infty$ i po skorzystaniu z zachodzącej dla prostych przypadków zależności $H_I(t) = -L_I(t)$, gdzie $L_I(t)$ jest częścią operatora Lagrange'a opisującą oddziaływanie, otrzymujemy operator "S" w postaci

$$S = 1 + i\sum_{n=1}^{\infty} T_n \qquad \dots/1.15/$$

gdzie

$$T_n = (i)^{n-1} \iint_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n\, \theta(t_1-t_2) \dots \theta(t_{n-1}-t_n)$$
$$\cdot\, L_I(t_1) \dots L_I(t_n) \qquad \dots/1.16/$$

2. Elementy teorii pola

W formaliźmie nierelatywistycznej mechaniki kwantowej istnieje zasadnicza różnica między pojęciem pola i cząstki. Dynamika, której podlega cząstka /jej funkcja falowa/ pochodzi od oddziaływania cząstki z polem /np. elektrostatycznym lub magnetostatycznym/, o którym zakładamy, że rozchodzi się ono w sposób natychmiastowy. Niezależnie od tego, czy jest to pole zewnętrzne, czy też jego źródło bierze udział w dynamice,

traktuje się je jako oddziaływanie na odległość i wprowadza jako część potencjalną do operatora Hamiltona. Fakt korpuskularnej natury promieniowania z jednej strony i falowej struktury "cząstek materii"z drugiej sugerują możliwość opisu zarówno "pól" jak i "cząstek" za pomocą wspólnego formalizmu. Próby skonstruowania takiego formalizmu doprowadziły do powstania teorii pola. W klasycznej teorii pola obiekty fizyczne reprezentowane są przez tzw. funkcje pola $\Phi(x)$, które spełniają równanie Kleina-Gordona, odpowiadające relatywistycznemu związkowi między energią i pędem

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = 0 \qquad .../2.1/$$

gdzie $\Box \equiv g^{n\nu}\partial_n\partial_\nu$ jest operatorem Kleina-Gordona. Funkcje wszystkich rodzajów pól relatywistycznych powinny spełniać to równanie /dla odpowiednich mas spoczynkowych m/. W zależności od swego geometrycznego charakteru mogą one oprócz tego spełniać równanie Diraca/fermiony o spinie $\frac{1}{2}$/, lub równania falowe wyższych rzędów.W tej pracy ograniczymy się do rozważenia skalarnych funkcji $\varphi(x)$ wspomnianych na wstępie. Funkcje Lagrange'a pól swobodnych /ściślej - ich gęstości/$\mathcal{L}(\varphi(x), \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x})$ buduje się z funkcji pola w taki sposób, aby z zasady wariacyjnej dla całki działania otrzymać odpowiednie równanie:
Zasadę wariacyjną

$$\delta A = \delta\int \mathcal{L}(x)\, dx = 0 \qquad .../2.2/$$

można bowiem zapisać w równoważnej postaci /zakładając znikanie wariacji funkcji pola w nieskończoności/

$$\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\varphi(x)} - \sum_{n/0}^{3}\frac{\partial}{\partial x^n}\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^n}} = 0 \qquad .../2.3/$$

Jest to tzw. równanie Eulera-Lagrange'a.Przyjmując gęstość funkcji Lagrange'a rzeczywistego, nienaładowanego,swobodnego pola skalarnego $\varphi(x)$ w postaci:

$$\mathcal{L}(x) = \partial_n\varphi\,\partial^n\varphi - m^2\varphi^2 \qquad .../2.4/$$

otrzymujemy z zasady wariacyjnej równanie Kleina-Gordona,co dowodzi poprawności wyboru funkcji Lagrange'a. Funkcję Lagrange'a jako funkcję x^0 /czasu/ otrzymujemy przez scałkowanie gęstości $\mathcal{L}(x)$ po zmiennych przestrzennych

$$L(x^0) = \int \mathcal{L}(x)\, d^3\vec{x} \qquad .../2.5/$$

Do teorii pola przenosi się strukturę formalizmu kanonicznego wypracowanego w oparciu o mechanikę klasyczną. Kontynuując tę analogię wprowadza się tensor energii-pędu

$$T_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \varphi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial^\mu \varphi} - \mathcal{L}\delta_{\mu\nu} \qquad .../2.6/$$

oraz 4-wektor energii-pędu

$$P^\mu(x^0) = \int T^{0\mu}(x)\, d^3\vec{x} \qquad ...2.7/$$

W wypadku pól oddziaływujących wprowadza się gęstość lagrangianu oddziaływania $\mathcal{L}_I(x)$ skonstruowaną z funkcji falowych pól oddziaływających. Kształt funkcji $\mathcal{L}_I(x)$ należy tak dobrać, aby była ona relatywistycznie niezmiennicza, oraz by otrzymać wyniki zgodne z doświadczeniem /czynnik modelu w teorii pola/. Wspomniana wyżej klasyczna teoria nie operuje pojęciem cząstki a tym bardziej nie obejmuje procesów związanych z powstawaniem i ginięciem cząstek, obserwowanych w przyrodzie. Próbę opisu tej klasy zjawisk stanowi kwantowa teoria pola. W ramach krótkiego artykułu nie sposób podać wyczerpującego omówienia tej teorii; ograniczymy się tylko do podania głównych jej założeń. Funkcję pola z klasycznej teorii rozwija się w szeregi Fouriera /obraz pędowy/.

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^4k\, e^{ikx} \varphi(k) \qquad .../2.8/$$

gdzie $kx \overset{df}{=} g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = k_0 x_0 - \vec{k}\cdot\vec{x}$

Z równania Kleina-Gordona /2.1/ wynika, że

$$(k^2 - m^2)\,\tilde{\varphi}(k) = 0 \qquad \text{gdzie} \qquad k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2$$

a więc

$$\tilde{\varphi}(k) = \delta(k^2 - m^2)\varphi(k)$$

Stąd

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4k\, \delta(k^2 - m^2) e^{ikx} \varphi(k) \qquad .../2.9/$$

Po odpowiednich przekształceniach otrzymujemy

$$\varphi(x) = \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x), \qquad .../2.10/$$

gdzie

$$\varphi^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{k^0>0} e^{ikx}\, \delta(k^2 - m^2)\, \varphi(k)\, d^4k =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{2k^0}}\, e^{ikx} \varphi^{(+)}(\vec{k}) \quad k^0 = +\sqrt{\vec{k} + m^2} \qquad .../2.11/$$

$$\varphi^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{k_0>0} e^{-ikx}\, \delta(k^2 - m^2)\, \varphi(-k)\, d^4k =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{2k^0}}\, e^{-ikx} \varphi^{(-)}(\vec{k}) \qquad k^0 = +\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \qquad .../2.11'/$$

Funkcje $\varphi^{(+)}(\vec{k})$ i $\varphi^{(-)}(\vec{k})$ mają postać:

$$\varphi^{(+)}(\vec{k}) = \frac{\theta(k^0)\varphi(k)}{\sqrt{2k^0}} \qquad k_0 = +\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \qquad .../2.12/$$

$$\varphi^{(-)}(\vec{k}) = \frac{\theta(k^0)\varphi(-k)}{\sqrt{2k^0}}$$

W kwantowej teorii pola zakłada się, że każdy stan fizyczny /tzw. amplitudę stanu Φ_p/ można otrzymać ze stanu próżni $|0\rangle$ działając na ten stan operatorami tworzenia cząstek. Potraktujemy funkcje $\varphi^{(+)}(\vec{k})$ i $\varphi^{(-)}(\vec{k})$ jako pewne operatory działające we wspomnianej przestrzeni stanów. Tym samym 4-wektor energii-pędu /2.7/ stanie się operatorem energii pędu P^μ, a tensor krętu /którego klasycznej postaci nie przedstawialiśmy/ - operatorem krętu. Z ogólnych własności transformacyjnych, jakie powinna posiadać każda relatywistycznie niezmiennicza teoria wynikają reguły komutacyjne dla operatorów pędu i krętu. Rozważmy dwie z nich:

$$\left[\varphi^{(+)}(k), P^\mu\right] = -\, k\, \varphi^{(+)}(k)$$

$$\left[\varphi^{(-)}(k), P\right] = k\, \varphi^{(-)}(k) \qquad .../2.13/$$

gdzie

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{(+)}(k) &= \varphi(k) \\ \varphi^{(-)}(k) &= \varphi(-k) \end{aligned}\right\} \quad \text{określone tylko dla } k^0 > 0.$$

Niech Φ_p oznacza pewną amplitudę stanu wielocząstkowego /symbol p opisuje zespół pędów cząstek tworzących stan Φ_p/. Wówczas

$$P^{\mu}\Phi_p = p^{\mu}\Phi_p$$

przyczym zakładamy

$$P^{\mu}|0\rangle = 0$$

Stosując równania operatorowe /2.13/ do stanu Φ_p otrzymujemy:

$$P^{\mu}\varphi^{(+)}(k)\Phi_p = (p^{\mu} + k^{\mu})\Phi^{(+)}(k)\Phi_p \qquad .../2.15/$$

Stan $\varphi^{(+)}(k)\Phi_p$ jest stanem własnym operatora pędu do wartości własnej $p + k$. Operator $\varphi^{(+)}(k)$ "dorzucił" więc do stanu Φ_p cząstkę o 4 pędzie k. Podobnie

$$P\ \varphi^{(-)}(k)\Phi_p = (p - k)\varphi^{(-)}(k)\ (p \qquad .../2.15'/$$

/operator $\varphi^{(-)}(k)$ "zniszczył" cząstkę o 4-pędzie k/. Operator niszczenia działając na stan próżni /o energii zerowej/ obniża jego energię. Ponieważ nie może istnieć stan o energii ujemnej, więc

$$\varphi^{(-)}(\vec{k})|0\rangle = 0 \qquad .../2.16/$$

Okazuje się, że wszystkie reguły komutacyjne równoważne są uniwersalnej zależności między operatorami pola:

$$\left[\varphi^{(-)}(\vec{k}),\ \varphi^{(+)}(\vec{k}')\right] = \delta(\vec{k}-\vec{k}), \qquad .../2.17/$$

Definicja iloczynu skalarnego stanów oraz założenie unormowania amplitudy stanu do funkcji delta-Diraca /ciągłe widmo stanów o określonym pędzie/ wskazuje regułę sprzęgania po hermitowsku operatorów tworzenia i niszczenia cząstek. Mamy bowiem:

$$\varphi^{(+)}(\vec{k})|0\rangle$$

jako stan jednej cząstki o pędzie $\vec{k}$. Iloczyn skalarny dwóch takich stanów o różnych pędach $\vec{k}$ i $\vec{k}'$ powinien być równy

$$\langle 0|\left(\varphi^{(+)}(\vec{k})\right)\ \varphi^{(+)}(\vec{k}')|0\rangle = \delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

Zakładając unormowanie stanu próżni

$$\langle 0 \mid 0 \rangle = 1$$

otrzymujemy zgodność wzorów /2.17/ i /2.17'/ jeżeli położymy

$$\left(\varphi^{(+)}(\vec{k})\right)^{+} = \varphi^{(-)}(\vec{k}) \qquad .../2.18/$$

3. Operator "S" w teorii pola.

Przed zbudowaniem operatora S należy wprowadzić kilka pojęć.

1-o. Iloczyn normalny operatorów pola, oznaczony

$$:\varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2)\ldots\,\varphi_n\,(x_n): \qquad .../3.1/$$

lub w reprezentacji pędowej

$$:\varphi_1(p_1)\ \ldots\ \varphi_n(p_n): \qquad .../3.1'/$$

nakazuje ustawienie operatorów niszczenia na prawo od operatorów tworzenia i występuje we wszystkich wielkościach dynamicznych zbudowanych z operatorów pola /np. w gęstości lagrangianu/.

2-o. Pojęcie zwężenia /kontrakcji/ operatorów pola oznaczone i zdefiniowane jak następuje:

$$\underbrace{\varphi(x)\,\varphi}(y) \overset{df}{=} \left[\varphi(x), \varphi(y)\right] = -\,i\,D(x-y) \qquad .../3.2/$$

gdzie

$$D(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{\,ik(x-y)}\delta(k^2-m^2)\theta(-k^0)d^4k \qquad .../3.3/$$

jest funkcją zmiennej /x-y/, lub w reprezentacji pędów

$$\underbrace{\varphi(p)\,\varphi}(k) \overset{df}{=} \left[\varphi(p),\ \varphi(k)\right] = \delta(p+k)\ D(k) \qquad .../3.2'/$$

gdzie

$$D(k) = \theta(k^0)\ \delta(k^2 - m^2) \qquad .../3.3'/$$

jest funkcją 4-pędu.

3-o. Twierdzenie Wicka, które mówi, że iloczyn operatorów pola można zastąpić sumą iloczynów normalnych tych operatorów ze zwężeniami według wzoru:

$$\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_n = :\varphi_1 \ldots \varphi_n: + \underbrace{\varphi_1\varphi_2}\,:\varphi_3 \ldots \varphi_4 \ldots + \underbrace{\varphi_1\varphi_3}\,:$$

$$\varphi_2\varphi_4 \ldots \varphi_n : + : \underbrace{\varphi_1 \ldots \varphi_i}\,\varphi_n :+ : \underbrace{\varphi_1 \ldots \varphi_4} : +$$

$$+ : \underbrace{\varphi_1\varphi_2}\,\underbrace{\varphi_3\varphi_4} \ldots \varphi_4 : + \ldots \qquad \ldots/3.4/$$

itd., aż wszystkie operatory zostaną zwężone.

Pozostaje nam zbudować operator "S". Korzystając ze wzorów /1.15/, /1.16/ i /2.7/ otrzymujemy:

$$S = 1 + i\sum_{n/1}^{\infty} T_n = 1 + i\sum \frac{1}{n!}\iint S_n(x_1 \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \qquad \ldots/3.5/$$

$$T_n = i^{n-1}\iint dx_1 \ldots dx_n\, \theta(x_1^0 - x_2^0) \ldots \theta(x_{n-1}^0 - x_n^0)\mathcal{L}_I(x_1) \ldots \mathcal{L}_I(x_n) =$$

$$= \frac{i^{n-1}}{n!}\iint dx_1 \ldots dx_n\, T\left[\mathcal{L}_I(x_1) \ldots \mathcal{L}_I(x_n)\right] \qquad \ldots/3.6/$$

Wzory /3.5/ i /3.6/ można streścić w symbolicznej postaci

$$S = T \exp\left[i\int \mathcal{L}_I(x)\, d^n x\right] \qquad \ldots/3.7/$$

gdzie T jest symbolem iloczynu chronologicznego, to jest symbolem porządkowania operatorów $\mathcal{L}_I(x)$ w kolejności chronologicznej /wg x^0/. Do iloczynu operatorów $\mathcal{L}_I(x)$ /który stanowi iloczyn iloczynów normalnych/ stosujemy tzw. Wicka zwężając kolejno operatory pola pochodzące od różnych operatorów Lagrange'a i uzyskujemy rozkład operatora T_n na sumę operatorów. Z poszczególnymi składnikami tej sumy związana jest poglądowa interpretacja graficzna /diagramy Feynmana/, opisana w każdym podręczniku kwantowej teorii pola //IV/, /V/, /VI//.

4. Regularyzacja osobliwych członów T operatora "S"

Kolejne całki T_n są na ogół rozbieżne a procedura formalnego ich uzbieżniania nosi nazwę regularyzacji. Interpretacja fizyczna wyników procedury regularyzacji nosi nazwę renormalizacji i sprowadza się w naj-

prostszych przypadkach do zmiany masy spoczynkowej oraz stałej sprzężenia pól. Omówimy tu pokrótce metodę renormalizacji przedstawioną przez Bogolubowa w /IV/. Założył on postać

$$S_1(x) = i\,\mathcal{L}_I(x)$$

Po narzuceniu na operator "S" warunków unitarności, kowariantności, przyczynowości i symetrii, które wydają się najnaturalniejszymi z punktu widzenia intuicji fizycznej, okazuje się, że człon $S_n(x_1 \ldots x_n)$ można określić indukcyjnie przy pomocy członów $S_1(x) \ldots S_{n-1}(x_1 \ldots x_{n-1})$ z dokładnością do addytywnego operatora $i\,\Lambda_n(x_1 \ldots x_n)$ będącego sumą iloczynów normalnych operatorów pola ze współczynnikami funkcyjnymi

$$Z\left(\ldots \frac{\partial}{\partial x^i} \ldots\right) \delta(x_1 - x_2) \ldots \delta(x_{n-1} - x_n)$$

gdzie $Z\left(\ldots \frac{\partial}{\partial x^i} \ldots\right)$ jest symetrycznym wielomianem pochodnych cząstkowych o stałych współczynnikach. Operator $\Lambda_4(x_1 \ldots x_n)$ możemy przedstawić w najogólniejszej postaci

$$\Lambda(x_1 \ldots x) = \sum_k Z_k\left(\ldots \frac{\partial}{\partial x^i} \ldots\right) \delta(x_1 - x_2) \ldots \delta(x_{n-1} - x_n) : \varphi_1(x_1) \ldots \varphi_k(x_k) : \qquad \ldots /4.1/$$

Operatory o tych własnościach noszą nazwę kwazilokalnych. Bogolubow pokazał w swej pracy /IV/, że dowolności w określeniu operatora "S" sprowadzić można do dowolności w wyborze lagrangianu. Określamy zmodyfikowany lagrangian o postaci:

$$\mathcal{L}_I(x,g) \overset{df}{=} \mathcal{L}_I(x) \cdot g(x) + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \int \Lambda_\nu(x_1, x_1 \ldots x_{\nu-1})\, g(x)\, g(x_1) \ldots g(x_{\nu-1})\, d^4x_1 \ldots d^4x_{\nu-1} \qquad \ldots /4.2/$$

gdzie tzw. "funkcja włączeniowa" $g(x)$ określona jest następująco:

$g(x) \equiv 0$ w obszarze, gdzie oddziaływanie jest wyłączone,

$0 < g(x) < 1$ w obszarze, gdzie oddziaływanie jest włączone, częściowo,

$g(x) \equiv 1$ dla obszaru z pełnym oddziaływaniem.

Funkcja $g(x)$ ma charakter pomocniczy i w fizycznych przypadkach kładzie się $g(x) \equiv 1$.

Tworząc operator "S" według wzoru /3.7/ i grupując wyrazy o jednakowych potęgach funkcji $g(x)$ otrzymuje się ogólny wzór na operator $S_n(x_1 \dots x_n)$ w zależności od $\mathcal{L}_I(x)$ i $\Lambda_2(x_1,x_2) \dots \Lambda_n(x_1 \dots x_n)$, którego jawną postać przedstawimy dla $S_2(x_1,x_2)$ i dla $S_3(x_1,x_2,x_3)$

$$S_2(x_1,x_2) = i^2\, T\left[\mathcal{L}_I(x_1)\,\mathcal{L}_I(x_2)\right] + i\,\Lambda_2(x_1,x_2) \qquad /4.3/$$

$$S_3(x_1,x_2,x_3) = -i\, T\left[\mathcal{L}_I(x_1)\mathcal{L}_I(x_2)\mathcal{L}_I(x_3)\right] - T\left[\mathcal{L}_I(x_1)\,\Lambda_2(x_2,x_3)\right] - T\left[\mathcal{L}_I(x_2)\,\Lambda_2(x_1,x_3)\right] - T\left[\mathcal{L}(x_3)\Lambda_2(x_1,x_2)\right] + i\,\Lambda_3(x_1,x_2,x_3) \qquad \dots/4.3'/$$

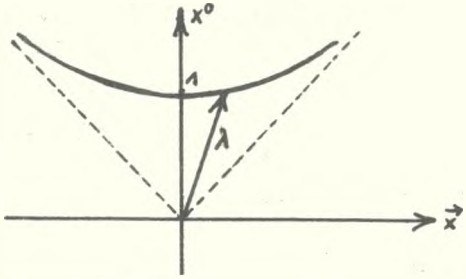
Dowolności w określeniu kolejnych członów S_n wykorzystuje się do renormalizacji. Najpierw prowadzi się obliczenia danego członu operatora "S" korzystając z jego standardowej postaci /3.6/ ze zwykłym lagrangianem $\mathcal{L}_I(x)$. Jeżeli wynik jest rozbieżny, to za pomocą tzw. procedury regularyzacji oddzielamy część zbieżną od rozbieżnej. Okazuje się wtedy, że część rozbieżna ma postać operatora kwazilokalnego Λ_ν. Korzystając z dowolności określenia funkcji Lagrange'a wprowadzamy operator Λ_ν ze znakiem przeciwnym do zmodyfikowanej funkcji Lagrange'a według wzoru /4.2/. Wiemy teraz, na pewno, że obliczanie tego samego członu operatora "S" z użyciem nowego lagrangianu doprowadzi do skasowania się członów rozbieżnych. Bogolubow pokazał również, że powyższa modyfikacja lagrangianu daje automatycznie regularyzację niektórych wyższych członów operatora "S".

5. Pędowa reprezentacja Kadyszewskiego

Nieco odmienną od powszechnie przyjętej metodę obliczania członów operatora "S" podał Kadyszewski [I]. Korzystamy w niej z postaci /3.6/ operatora T_n i dokonujemy trywialnej zamiany

$$\theta(x^0) \longrightarrow \theta(\lambda \cdot x) \qquad \lambda \cdot x = \lambda^0 \cdot x^0 - \vec{\lambda}\cdot\vec{x} \dots /5.1/$$

gdzie λ jest czterowektorem o własnościach $\lambda^2 = 1 \quad \lambda^0 \geqslant 0 \dots /5.2/$



Możliwość takiej zamiany wynika z komutowania operatorów Lagrange'a

$$\left[\mathcal{L}_I(x), \mathcal{L}_I(y)\right] = 0 \qquad (x-y)^2 < 0$$

czyli dla dwóch punkto-chwil, między którymi nie zachodzi związek przyczynowy. Dla T otrzymujemy wówczas:

$$T_n = \int \theta\left(\lambda\cdot(x_1-x_2)\right)\ldots\theta\left(\lambda\cdot(x_{n-1}-x_n)\right)\mathcal{L}_I(x_1)\ldots\mathcal{L}_I(x_n)\, d^4x_1\ldots d^4x_n \qquad \ldots/5.3/$$

Funkcje Heavisideá występujące w tym wzorze można rozwinąć w szeregi Fouriera

$$\theta(\lambda\cdot x) = \frac{-1}{2\pi i}\int \frac{e^{-i\tau(\lambda x)}}{\tau + i\varepsilon}\, d\tau \qquad \ldots/5.4/$$

Obliczając tę całkę na płaszczyźnie zespolonej τ otrzymujemy funkcję Heaviside'a o znanych własnościach. Po podstawieniu do /5.3/ pędowych przedstawień operatorów $\mathcal{L}_I(x)$:

$$\mathcal{L}_I(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ipx}\tilde{\mathcal{L}}(p)\, d^4p \qquad \ldots/5.5/$$

można zauważyć, że

$$T_1 = \tilde{\mathcal{L}}(0)$$

$$T_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\mathcal{L}}(\lambda\tau)\frac{d\tau}{\tau+i\varepsilon}\tilde{\mathcal{L}}(-\lambda\tau) \qquad \ldots/5.6/$$

$$T_n = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\iint_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\mathcal{L}}(\lambda\tau_1)\frac{d\tau_1}{\tau_1+i\varepsilon}\tilde{\mathcal{L}}(\lambda\tau_2-\lambda\tau_1)\ldots\frac{d\tau_{n-1}}{\tau_{n-1}+i\varepsilon}\tilde{\mathcal{L}}(-\lambda\tau_{n-1})$$

Pędowa reprezentacja Kadyszewskiego prowadzi do specjalnej interpretacji graficznej. Dla jej przedstawienia musimy posłużyć się jakimś konkretnym modelem, np.

$$\mathcal{L}_I(x) = e : \varphi^3(x): \qquad .../5.7/$$

W reprezentacji pędowej otrzymamy

$$\tilde{\mathcal{L}}(\lambda\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \delta(\lambda\tau - k_1 - k_2 - k_3) : \varphi(k_1)\varphi(k_2)\varphi(k_3) : d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3$$

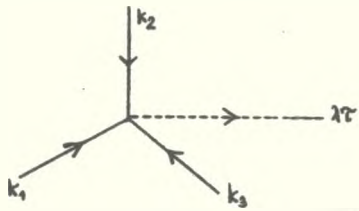
gdzie ...../5.8/

$$\varphi(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-ikx}\varphi(x)\, d^4 x$$

Operatorowi $\varphi(k)$ przypisujemy linię cząstki o 4-pędzie k. Z argumentu funkcji δ -Diraca wynika, że

$$k_1 + k_2 + k_3 = \lambda\tau$$

Jeżeli więc w jednej punkto-chwili "spotykają" się 3 cząstki /por. postać $\mathcal{L}(x)$/ o pędach k_1, k_2, k_3, to tę samą punkto-chwilę opuszcza nieznany twór /nazwijmy go kwasicząstką/ o pędzie $\lambda\tau$. Możemy więc narysować diagram:



Przyjmując taką interpretację graficzną operatora $\tilde{\mathcal{L}}_I(\lambda\tau)$ możemy w podobny sposób zilustrować kolejne człony T_{rt} pamiętając o możliwości zastosowania tw. Wicka. Np. dla T_2 otrzymamy:

$$T_2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \delta(\lambda\tau - p_1 - p_2 - p_3)\, \delta(-\lambda\tau - k_1 - k_2 - k_3) \frac{1}{\tau + i\varepsilon}$$

$$\cdot : \varphi(p_1)\varphi(p_2)\varphi(p_3) :: \varphi(k_1)\varphi(k_2)\varphi(k_3) : d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3 d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3 d\tau =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \delta\Big(\sum_{i/1}^{3} p_i + \sum_{j/1}^{3} k_j\Big) \delta\Big(\lambda\tau - \sum_{i/1}^{3} p_i\Big) \frac{1}{\tau + i\varepsilon}$$

$$\cdot : \varphi(p_1)\varphi(p_2)\varphi(p_3)\varphi(k_1)\varphi(k_2)\varphi(k_3) : d^4k_1 \ldots d^4p_3\, d\tau \qquad .../5.9/$$

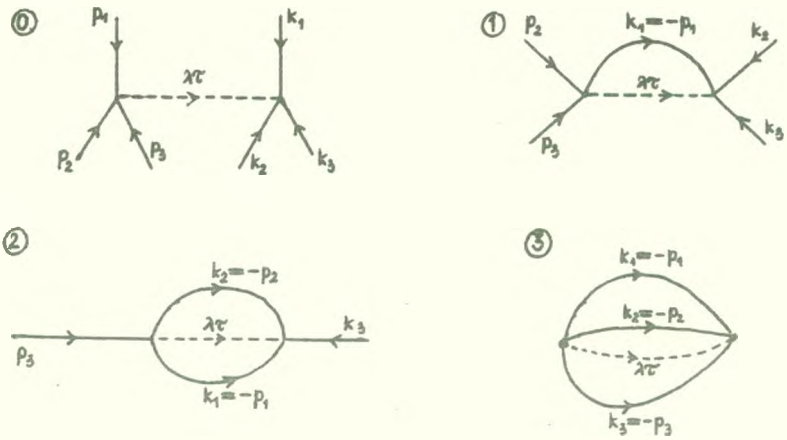
Do iloczynu operatorów pola stosujemy tw. Wicka:

$$
\begin{aligned}
:\varphi(p_1)\varphi(p_2)\varphi(p_3):\,:\varphi(k_1)\varphi(k_2)\varphi(k_3): \;=\; &:\varphi(p_1)\ldots\varphi(k_3): \;+\\
&+\;:\underbrace{\varphi(p_1)\varphi(p_2)\varphi(p_3)}\varphi(k_1)\varphi(k_2)\varphi(k_3): \;+\\
&+\;:\underbrace{\varphi(p_1)\varphi(p_2)\varphi(p_3)\varphi(k_1)}\varphi(k_2)\varphi(k_3): \;+\;\ldots\;+\\
&+\;:\underbrace{\varphi(p_1)\varphi(p_2)\varphi(p_3)\varphi(k_1)\varphi(k_2)}\varphi(k_3)+\;\ldots\;+\;\ldots \qquad /5.10/\\
&+\;:\underbrace{\varphi(p_1)\varphi(p_2)\varphi(p_3)\varphi(k_1)\varphi(k_2)\varphi(k_3)}+\;\ldots
\end{aligned}
$$

Wykropkowano pozostałe kombinacje z taką samą liczbą zwężeń. Podstawiając kontrakcje ze wzoru /3.2'/ otrzymujemy

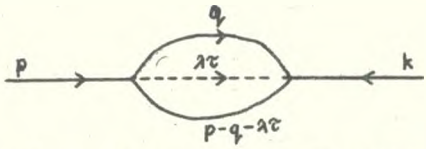
$$
\begin{aligned}
:\varphi(p_1)\varphi(p_2)\varphi(p_3):\,:\varphi(k_1)\varphi(k_2)\varphi(k_3): \;=\; &:\varphi(p_1)\ldots\varphi(k_3): \;+ && (0)\\
&+\;\delta(p_1+k_1)D(k_1):\varphi(p_2)\varphi(p_3)\varphi(k_2)\varphi(k_3): \;+\;\ldots\;+ && (1)\\
&+\;\delta(p_1+k_1)\delta(p_2+k_2)D(k_1)D(k_2):\varphi(p_3)\varphi(k_3): \;+\;\ldots\;+ && (2)\\
&+\;\delta(p_1+k_1)\delta(p_2+k_2)\delta(p_3+k_3)D(k_1)D(k_2)D(k_3)+\;\ldots && (3)
\end{aligned}
$$

Postać członu T_2 z iloczynem operatorów pola rozpisanym wg twierdzenia Wicka sugeruje odpowiadającą temu rozpisaniu interpretację graficzną. Interpretacja ta wprowadzona przez Kadyszewskiego jest odmienna od zwykłej interpretacji Feynmana, w której nie występują linie kwasicząstkowe.



Pojęcia wierzchołków, linii wewnętrznych /propagatorów/ i zewnętrznych diagramu uważamy za znane. Całkowanie kolejnych członów T_n napotyka na podobne trudności, co i w przypadku zwykłego ujęcia operatora "S". Okazuje się jednak, że rozbieżne mogą być wyłącznie całki po pędach przekazywanych na wewnętrznych liniach kwasicząstkowych. Rozpatrzmy jeden z otrzymanych grafów:

②



Odpowiada mu część członu T_2; oznaczmy ją przez $T_2^{(2)}$.

$$T_2^{(2)} = \frac{1}{(2\pi)^2} a_2^{(2)} \int \delta\Big(\sum_{i=1}^{3} p_i + \sum_{j=1}^{3} k_j\Big)\, \delta\Big(\lambda\tau - \sum_{i=1}^{3} p_i\Big) \frac{1}{\tau + i\varepsilon}\, \delta(p_1+k_1)\delta(p_2+k_2) \cdot$$

$$\cdot\, D(k_1)D(k_2) : \varphi(p_3)\varphi(k_3) : d^4p_1\, d^4p_2\, d^4p_3\, d^4k_1\, d^4k_2\, d^4k_3\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} a_2^{(2)} \int \delta(p_3 + k_3)\, \delta(\lambda\tau + k_1 + k_2 - p_3) \frac{1}{\tau + i\varepsilon} D(k_1) D(k_2) \times$$

$$: \varphi(p_3)\varphi(k_3) : d^4k_1\, d^4k_2\, d^4k_3\, d^4p_3\, d\tau = \left| \begin{array}{l} p_3 \equiv p \\ k_3 \equiv k \\ k_1 \equiv q \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} a_2^{(2)} \int \delta(p+k) \frac{1}{\tau + i\varepsilon} D(q)\, D(p-q-\lambda\tau) : \varphi(p)\varphi(k) : \times$$

$$\times\, d^4p\, d^4k\, d^4q\, d\tau. \qquad /5.11/$$

Współczynnik liczbowy $a_2^{(2)}$ odpowiada krotności danego diagramu w rozwinięciu Wicka. Zgodnie z przyjętą interpretacją graficzną funkcje $D(q)$ odpowiadają liniom wewnętrznym /tzw. cząstkom wirtualnym/, funkcja $\frac{1}{\tau + i\varepsilon}$ odpowiada wewnętrznej linii kwasicząstkowej a operatory pola odpowiadają liniom zewnętrznym. Z postaci funkcji $D(q)$ /3.3'/ wynika następująca własność cząstek wirtualnych: cząstki wirtualne poruszają się po liniach wewnętrznych w określonym "kierunku" /tzn. od wierzchołka lewego do prawego, a nie na odwrót/, bo funkcja $\theta\, q^0$ wyznacza kierunek przekazywania energii. Własności tej nie posiadają linie wewnętrzne w zwykłej interpretacji Feynmana. Czteropęd, jaki osiągnie cząstka na linii wewnętrznej jest więc w ujęciu Kadyszewskiego ograniczony pędem do-

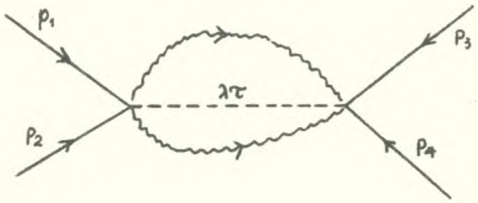
starczonym do wierzchołka, z którego ta linia wychodzi. Wspomniane wyżej i wymagające regularyzacji osobliwości, na jakie natrafia się w zwykłym ujęciu przy obliczaniu członów T_n pochodzą od rozbieżnych całek po pędach cząstek wewnętrznych. W ujęciu Kadyszewskiego, ze względu na ograniczony pęd cząstek wewnętrznych, całki po pędach tych cząstek/w naszym przykładzie po d^4q/ są zbieżne, a rozbieżności "spychane" są jakgdyby do ostatniej całki po $d\tau$. Sposób usuwania tej rozbieżności /regularyzacja/ omówimy na poniższym przykładzie.

W końcowej części niniejszej pracy rozważane będzie oddziaływanie naładowanego pola skalarnego $\varphi(x)$ z polem elektro-magnetycznym $A^{\mu}(x)$ z gęstością funkcji Lagrange'a

$$\mathcal{L}_I(x) = e :\overset{*}{\varphi}(x)\, A^{\mu}(x) A_{\mu}(x) \varphi(x):$$

Jeden z członów operatora "S" otrzymywanych w drugim rzędzie przybliżeń, któremu odpowiada diagram

⑤



ma postać:

$$T_2^{(5)} = a_2^{(5)} e^2 \int \delta\Big(\sum_{i=1}^{4} p_i\Big) \cdot F_2^{(5)}(p_1, p_2) \cdot :\varphi(p_1) \ldots \varphi(p_4): d^4p_1 \ldots d^4p_4 \qquad \ldots/5.12/$$

gdzie całka

$$F_2^{(5)}(p_1, p_2) = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{c(p_1, p_2)} \frac{d\tau}{\tau + i\varepsilon}$$

$$c(p_1, p_2) = (p_1 + p_2) \cdot \lambda \cdot \sqrt{[(p_1 + p_2) \cdot \lambda]^2 - (p_1 + p_2)^2}$$

jest, jak widać, rozbieżna logarytmicznie w dolnym skraju przedziału całkowania. Wybierzmy układ współrzędnych, w którym $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$ i połóżmy $\vec{\lambda} = 0$ w tym układzie. Otrzymamy

$$F_2^{(5)}(p_1^0, p_2^0) = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{p_1^0 + p_2^0} \frac{d\tau}{\tau + i\varepsilon}$$

Łatwo zauważyć, że

$$\lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{\tau+i\varepsilon}-\frac{1}{\tau+M+i\varepsilon}\right)=\lim_{M\to\infty}\frac{M}{(\tau+i\varepsilon)(\tau+M+i\varepsilon)}=\frac{1}{\tau+i\varepsilon}$$

Robimy więc zamianę:

$$\frac{1}{\tau+i\varepsilon}\longrightarrow\frac{1}{\tau+i\varepsilon}-\frac{1}{\tau+M+i\varepsilon}$$

Po takim podstawieniu całka jest formalnie wykonalna; należy jednak po scałkowaniu zrobić przejście graniczne $M\to\infty$ i oddzielić część zbieżną od rozbieżnej. /Całkę wykonujemy w tym wypadku metodą rozkładu funkcji podcałkowej na ułamki proste/.

$$F_2^{(5)}(p_1^\circ,p_2^\circ)=-\frac{\pi}{2}\ln\frac{p_1^\circ+p_2^\circ-\tau}{m}+\frac{\pi}{2}\lim_{M\to\infty}\ln\left|\frac{M}{m}\right|$$

Druga /rozbieżna/ część tej sumy podstawiona do wzoru /5.12/ daje w reprezentacji położeń szukany przyczynek do operatora kwasilokalnego:

$$\frac{\pi}{2}\ln\left|\frac{M}{m}\right|Q_z^{(6)}e^z\int\delta(\Sigma p):\overset{*}{\varphi}(p_1)\,\overset{*}{\varphi}(p_2)\,\overset{*}{\varphi}(p_3)\,\varphi(p_4)\,dp_1\ldots dp_4\overset{df}{=}$$

$$\overset{df}{=}i\int\Lambda_2^{(5)}(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 \qquad \ldots/5.13/$$

Podstawienie do /5.13/ położeniowych reprezentacji operatorów pola daje

$$\Lambda_2^{(5)}(x_1,x_2)=a_2^{(5)}e^2\ln\left|\frac{M}{m}\right|\delta(x_1-x_2):\varphi(x_1)\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_2):$$

Po obliczeniu i zsumowaniu operatorów kwasilokalnych odpowiadających pozostałym członom $T_2^{(i)}$ otrzymać można pełny operator kwasilokalny $\Lambda_2(x_1,x_2)$. Autorzy niniejszej pracy przeprowadzili obliczenia operatorów kwasilokalnych w drugim rzędzie przybliżeń dla dwóch typów oddziaływań:

1. $\mathcal{L}_I(x)=e:\varphi^4(x):$
2. $\mathcal{L}_{II}(x)=e:\varphi(x)\,A^\mu(x)\,A_\mu(x)\varphi(x):$

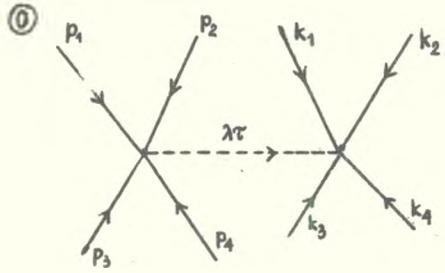
gdzie $\varphi(x)$ opisuje cząstkę /pole/ skalarną,

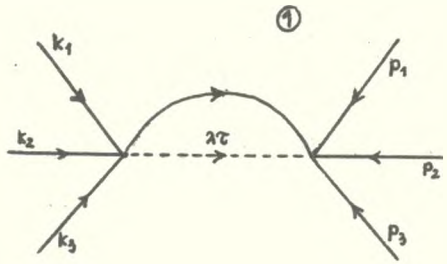
$A^u(x)$ odpowiada polu elektromagnetycznemu,

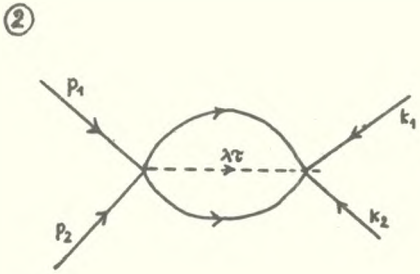
e jest stałą sprzężenia.

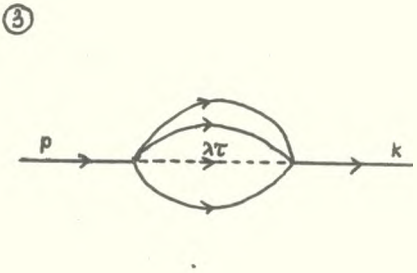
Rozpatrywane będą człony dające przyczynek do przekroju czynnego /tzn. posiadające linie zewnętrzne/.

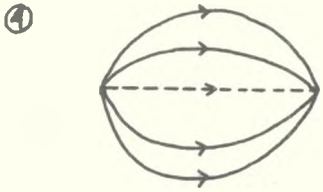
Ad.1. Komplet diagramów dla tego oddziaływania ma w drugim rzędzie przybliżeń postać:











④ nie daje przyczynku do przekroju czynnego.

Element macierzowy II-go rzędu S_2 jest sumą przyczynków od poszczególnych grafów.

$$S_2 = \sum_{r/0}^{4} S_2^{(r)}$$

Obliczenia wykazują rozbieżność członów $S_2^{(2)}$, $S_2^{(3)}$ i $S_2^{(4)}$. Po przeprowadzeniu renormalizacji masy kwasicząstki

$$\frac{1}{\tau + i\varepsilon} \longrightarrow \frac{1}{\tau + i\varepsilon} - \left(\frac{1}{\tau + M + i\varepsilon}\right)^{r+2}$$

i oddzieleniu członów rozbieżnych dla $M \to \infty$ uzyskuje się wyrażenia $\Lambda_2^{(z)}$ jako operatory kwasilokalne w postaci: dla grafu ②:

$$\Lambda_2^{\,2}(x,x_1) = a_2^{(2)} e^2 \left[m - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{\partial}{\partial x_1^0} \right) \right] \delta(x-x_1) : \varphi^2(x) \varphi^2 x_1 : \ln \frac{M}{m}$$

w układzie współrzędnych $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = 0$ i z wyborem $\vec{\lambda} = 0$ w tym układzie, oraz dla grafu ③:

$$\Lambda_2^{(3)}(x,x_1) = a_2^{(3)} e^2 \left[a\left(\frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{\partial}{\partial x_1^0} \right) + b\left(\frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^{02}} \right) + c\left(\frac{\partial^3}{\partial x^{03}} - \frac{\partial^3}{\partial x_1^{03}} \right) + \right.$$

$$\left. + d\left(\frac{\partial^4}{\partial x^{04}} + \frac{\partial^4}{\partial x_1^{04}} \right) + f \right] \delta(x - x_1) : \varphi(x) \varphi(x_1) :$$

w układzie $\vec{k} = 0$ i z wyborem $\vec{\lambda} = 0$ w tym układzie, gdzie

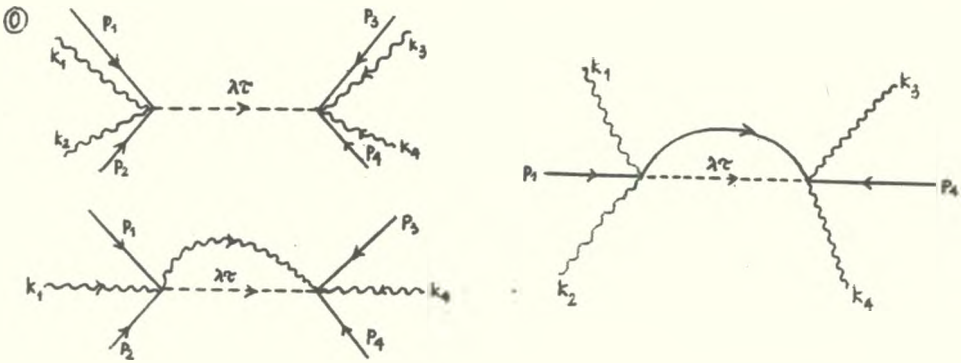
$$a = \frac{81}{2} \ln\left[3\left|\frac{M}{m}\right|\right] + \frac{343}{2} \ln \left|\frac{M}{m}\right| + \frac{405}{2} \left|\frac{M}{m}\right|^2$$

$$b = \frac{243}{2} \left(\frac{M}{m}\right) \text{ i } \quad c = -\frac{1}{2} \left(\frac{M}{m}\right)^2, \quad d = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{m}\right),$$

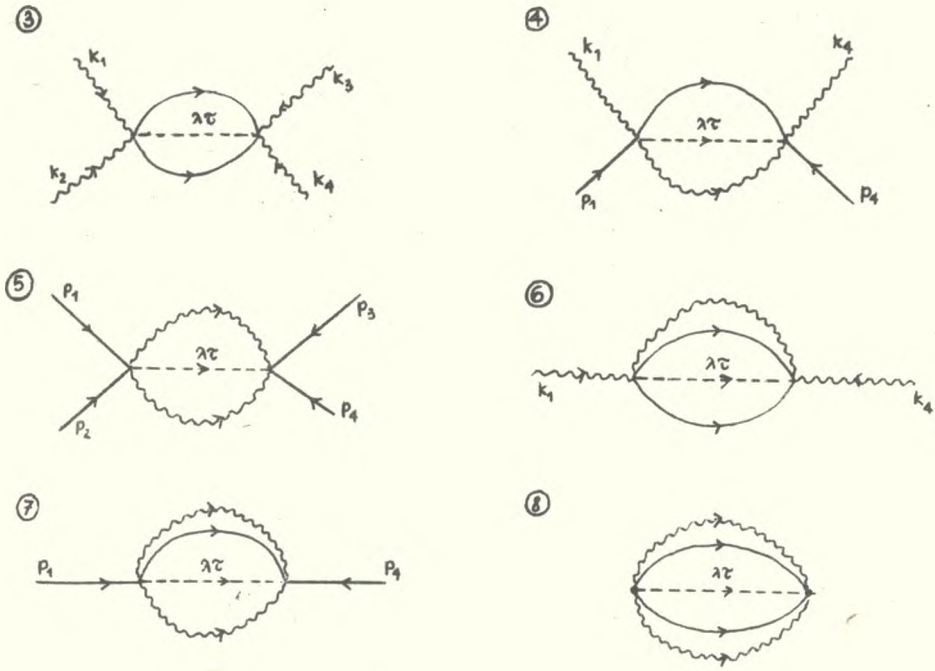
$$f = -\frac{M}{m} + \frac{81}{4} \left(\frac{M}{m}\right)^2$$

Ad.2. W drugim rzędzie przybliżeń oddziaływanie to prowadzi do następujących diagramów:

⓪



Człony odpowiadające powyższym grafom są zbieżne i nie wymagają renormalizacji. Pozostałe diagramy odpowiadają członom rozbieżnym:



Renormalizacja przeprowadzona podobnie, jak w poprzednim przykładzie prowadzi do operatorów kwasilokalnych, jak następuje:

$$\Lambda_2^{(3)}(x_1,x_2) = a_2^{(3)} e^2 \delta(x_1 - x_2) : A^{\mu}(x_1)\, A_{\mu}(x_2) A^{\nu}(x_1)\, A_{\nu}(x_2) : \ln\left|\frac{M}{m}\right|$$

$$\Lambda_2^{(4)}(x_1,x_2) = a_2^{(4)} e^2 \delta(x_1 - x_2) : \overset{*}{\varphi}(x_1)\varphi(x_2) A^{\mu}(x_1) A_{\mu}(x_2) : \ln\left|\frac{M}{m}\right|$$

$$\Lambda_2^{(5)}(x_1,x_2) = a_2^{(5)} e^2 \delta(x_1 - x_2) : \overset{*}{\varphi}(x_1)\varphi(x_1)\overset{*}{\varphi}(x_2)\varphi(x_2) : \ln\left|\frac{M}{m}\right|$$

$$\Lambda_2^{(6)}(x_1,x_2) = a_2^{(6)} e^2 \delta(x_1 - x_2)\left[\left(\alpha + \beta \frac{\partial^2}{\partial x_1^{02}} \ln\left|\frac{M}{m}\right| - \gamma \ln^2\left|\frac{M}{m}\right|\right] : A^{\mu}(x_1) A_{\mu}(x_2) :$$

$$\Lambda_2^{(7)}(x_1,x_2) = a_2^{(7)} e^2 \delta(x_1 - x_2)\left[\left(\delta + \eta \frac{\partial^2}{\partial_2^{02}}\right)\ln\left|\frac{M}{m}\right| + \varrho \ln^2\left|\frac{M}{m}\right|\right] : \overset{*}{\varphi}(x_1)\varphi(x_2) :$$

gdzie $\alpha = 3\pi m^2 - i\frac{m^2}{4}$ i $\beta = \frac{i}{8}$ i $\gamma = -i\frac{m^2}{2}$

$\delta = \pi m^2$ i $\eta = \frac{i}{2}$ i $\varrho = i\frac{m^2}{2}$

Człony $\Lambda_2^{(6)(7)}$ obliczane są w układach środka masy $\vec{p}_{in} = 0$ i z wyborem $\vec{\lambda} = 0$ w tych układach. Dla obydwu funkcji Lagrange'a proces renormalizacji przeprowadzono w reprezentacji pędów, przepisując następnie wyniki w reprezentacji położeń. Metoda renormalizacji z zastosowaniem operatorów kwasilokalnych $\tilde{\Lambda}(p_1 \ldots) \longrightarrow \Lambda(x_1 \ldots)$ abstrahując od możliwości interpretacyjnych wynikających z pojawienia się linii kwazicząstek, w znacznym stopniu ujednoznacznia proces renormalizacji poprzez modyfikację standardowej postaci $\mathcal{L}_I(x)$, co zdaniem autorów niniejszej pracy stanowi rzecz godną podkreślenia.

L i t e r a t u r a

V.G. Kadyshewsky, Zh. Eksper. Teor. Fiz. /USSR/, 46, 654, 1964.

V.G. Kadyshewsky, Zh. Eksper. Teor. Fiz. /USSR/, 46, 873, 1964.

Z. Borelowski, Acta Phys. Polon. B1 nr 2 155 1970.

N.N. Bogoliubov, D.V. Shirkov, "Vvedenie v teoriyu kvantovannych polei", Moskwa, 1957.

S. Shveber, /Vvedenie v relyativistskuyu kvantovuyu teoriyu polya", Moswa 1963.

H.A. Bethe, "Mesons and fields", Evanston 1955.

"S - Matrix: Bogoliubov's Regularization and Kadyshevsky's Representation"

S u m m a r y

The method of Bogoliubov's Regularization in Kadyshevsky's Representation for elektromagnetic-meson interaction is described.

"S- Матрица; Регуляризация Боголюбова и репрезентация Кадышевского"

Резюме

Предлагается способ перенормировки членов S - Матрицы, второго порядка в - представлении Кадышевского, для некоторого Лагранжиана взаимодействия