ROCZNIK NAUKOWO–DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE

Zeszyt 51 Prace matematyczne VII Rok 1974

Zenon Moszner

SUR LES APPLICATIONS FORTES

On considère dans la théorie des automates abstraits incomplets la notion des homomorphismes forts. Rappelons cette notion.

On dit que l'automate (A_2, X, δ_2) de Miedwiediew est l'image de l'automate (A_1, X, δ_1) de Miedwiediew par l'homomorphisme fort h si

(1) $$h : A_1 \longrightarrow A_2;$$

(2) $$\bigwedge_{a_1 \in A_1} \bigwedge_{x \in X} \Big(\delta_1(a_1,x) \text{ existe} \Longrightarrow \delta_2\big(h(a_1), x\big) \text{ existe}\Big);$$

(3) $$\bigwedge_{a_1 \in A_1} \bigwedge_{x \in X} \Big(\delta_1(a_1,x) \text{ existe} \Longrightarrow \delta_2\big(h(a_1), x\big) = h\big(\delta_1(a_1,x)\big)\Big);$$

(4) $$\bigwedge_{a_2 \in h(A_1)} \bigwedge_{x \in X} \Big(\delta_2(a_2,x) \text{ existe} \Longrightarrow \bigvee_{a_1 \in A_1} \big(h(a_1) = a_2 \text{ et } \delta_1(a_1,x) \text{ existe}\big)\Big).$$

On sait $([1]$ p.52$)$ que les conditions (1),(2) et (3) ne doivent pas impliquer (4), c'est-á-dire l'homomorphisme ne doit pas être en même temps fort.

On peut aussi donner facilement un exemple qui montre que l'application h, remplissant les conditions (1) et (4), ne doit pas remplir la condition (2) (la condition (3) implique évidemment (2)), même si l'application h est une bijection. En effet, considerons l' automate donné par le graphe suivant:

$$\text{ect}\ldots \underset{-3}{\circ} \xrightarrow{x} \underset{-2}{\circ} \xrightarrow{x} \underset{-1}{\circ} \xrightarrow{x} \underset{0}{\circ} \qquad \underset{1}{\circ} \qquad \underset{2}{\circ} \qquad \underset{3}{\circ} \quad \text{ect}$$

c'est-á-dire prenons pour A l'ensemble des nombres entiers et posons $X = \{x\}$ et $\delta(a,x) = a + 1$ pour $a \leqslant -1$ (l'automate est, et doit être, incomplet). L' application $h(a) = a + 1$ est une bijection de A à A, remplissant la condition (4) $(\delta_1 = \delta_2)$, qui ne remplit pas la condition (2) (pour $a_1 = -1$).

Il est à remarquer que la situation citée ci-dessus ne peut pas se passer si l'ensemble A des états de l'automate est fini. La proposition suivante est vraie:

Si l'application h de l'ensemble A fini des états de l'automate (A, X, δ) de Miedwiediew incomplet sur le même ensemble A, c'est-à-dire une bijection de A, remplit la condition (4) (avec $\delta_1=\delta_2 \overset{df}{=} \delta$) dans ce cas elle doit remplir aussi la condition (2) (aussi avec $\delta_1=\delta_2=\delta$).

Supposons, pour la démonstration par l'absurde, qu'il existe un état $\bar{a}$ de A et un $\bar{x}$ de X tels que $\delta(\bar{a},\bar{x})$ existe et $\delta(h(\bar{a}), \bar{x})$ n'existe pas et désignons par $\bar{A}$ l'ensemble de tous les états a de $A=h(A)$ pour lesquels il existe $\delta(a,\bar{x})$. Il existe d'aprés (4), pour chaque a de $\bar{A}$, au moins un élément $\tilde{a}$ de A tel que $h(\tilde{a})= a$ et $\delta(\tilde{a},\bar{x})$ existe. La fonction h^{-1} inverse à la fonction h applique l'élément a de $\bar{A}$ à l'élément $\tilde{a}$ ci-dessus. On voit donc que

$$h^{-1} : \bar{A} \longrightarrow \bar{A}$$

et de plus la fonction h^{-1} est inversible. Les ensembles $\bar{A}$ et $h^{-1}(\bar{A})\subset\bar{A}$ ont donc la même puissance. De plus $h^{-1}(\bar{A})\neq\bar{A}$ puisque $\bar{a}\in\bar{A}$ et $\bar{a}\notin h^{-1}(\bar{A})$ (la supposition que $\bar{a}\in h^{-1}(\bar{A})$ nous donnerait $h(\bar{a})\in\bar{A}$ ce qui est impossible puisque $\delta(h(\bar{a}),\bar{x})$ n'existe pas). Il en résulte que l'ensemble $\bar{A}$, et de plus l'ensemble $A\supset\bar{A}$, sont infinis.

Remarquons que la proposition pour les deux automates analogue à celle démontrée plus haut, n'est pas exacte. En effet, posons $A_1= A_2= \{a\}$, $X = \{x\}$, $\delta_1(a,x)= a$, $\delta_2(a,x)$ n'existe pas, $h(a)= a$. Dans ce cas nous avons (4), mais la condition (2) n'a pas lieu.

Les conditions (2) et (4) étant dualistes, on peut donc donner l'implication analogue de (2) à (4) Il en résulte en particulier que chaque automorphisme de l'automate de Miedwiediew incomplet dont l'ensemble des états est fini, doit être fort.

Travail cité

[1] J. Gancarzewicz; Remarks on Algebraic Properties of Sequential Machines, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Jagiellońskiego CCLII, Prace Matematyczne, zeszyt 15 /1971/, p.47-59.