ROCZNIK NAUKOWO-DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE

Zeszyt 51 Prace matematyczne VII Rok 1974

Zenon Moszner

SUR UN PROBLÈME DE M.G. TARGOŃSKI

M. Gyorgy Targoński m'a posé, pendant la conférence au sujet des équations fonctionnelles à Oberwolfach en 1972, le problème suivant.

Soit donnée une fonction $F(\alpha, x)$ de deux variables réelles et des valeurs réelles. La fonction $f(t)$ réelle des valeurs réelles, croissante, remplissant la condition $f(0)=0$ et telle que

$$F\big(F(\alpha, f(t_1)), f(t_2)\big) = F\big(\alpha, f(t_1 + t_2)\big) \tag{1}$$

existe-t-elle toujours?

La réponse à cette question est négative. Nous donnerons dans un cas plus général les conditions nécessaires et suffisantes ou seulement nécessaires pour que la réponse soit positive.

Soit T un groupe par rapport à l'opération "+", pas nécessairement commutative, F une fonction: $\Gamma \times X \to \Gamma$, où Γ et X sont des ensembles arbitraires et f est une fonction: $T \to X$, inversible.

La condition (1) a lieu, si et seulement si la fonction F est une solution de l'équation de translation

$$F(F(\alpha, x_1), x_2) = F(\alpha, x_1 \top x_2) \tag{2}$$

sur l'ensemble $\Gamma \times f(T)$, où $\top$ est une opération: $f(T) \times f(T) \to f(T)$ par rapport à laquelle l'ensemble $f(T)$ forme un groupe, isomorphe avec le groupe T.

Demonstration. Posons pour x_1 et x_2 de X:

$$x_1 \top x_2 = f\left[f^{-1}(x_1) + f^{-1}(x_2)\right]. \tag{3}$$

On voit facilement que l'ensemble $f(T)$ forme un groupe par rapport à l'opération $\top$ (l'élément neutre c'est $f(e)$, où e est l'élément neutre de T, l'élément inverse à l'élément $f(t)$ est $f(-t)$, où $-t$ désigne l'élément inverse à l'élément t dans le groupe T). De plus, d'après (1), en posant $f(t_1) = x_1$ et $f(t_2) = x_2$, nous obtenons

$$F(F(\alpha, x_1), x_2) = F(\alpha, x_1 \top x_2).$$

Il en résulte d'après (3) que les groupes T et $f(T)$ sont isomorphes. La démonstration de la nécessité est donc terminée.

Pour démontrer la suffisance, il suffit de remarquer que si la fonction F remplit la condition (2) et f désigne l'isomorphisme de T à $f(T)$, dans ce cas (1) a lieu. En effet nous avons:

$$F\big(F(\alpha, f(t_1)), f(t_2)\big) = F\big(\alpha, f(t_1) \top f(t_2)\big) = F\big(\alpha, f(t_1 + t_2)\big),$$

c.q.f.d.

On sait /voir p.ex. [1]/ que si la fonction F remplit (2) dans ce cas:

(4) . pour chaque $\bar{\alpha}$ fixé dans Γ, les ensembles

$$\{x \in f(T) : F(\bar{\alpha}, x) = \alpha\}$$

ont la même puissance, indépendante de α de Γ,

(5) les ensembles des valeurs des fonctions $F(\bar{\alpha}, x)$, pour $\bar{\alpha}$ fixé dans Γ et x varié dans $f(T)$, sont identiques ou disjoints.

Les conditions (4) et (5) sont donc nécessaires pour que la reponse au problème de M. Targoński soit positivé. La question qui se pose est la suivante: est-ce que ces deux conditions (4) et (5) sont suffisantes pour que la réponse soit positive?

Travail cité

[1] Z. Moszner, Structure de l'automate plein, réduit et inversible, sous presse dans Aequationes Math.