ROCZNIK NAUKOWO—DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE

Zeszyt 51 Prace matematyczne VII Rok 1974

Zbigniew Powązka

LÖSUNG EINES FOURIER - NEUMANN PROBLEMS FÜR DIE DIFFERENTIALGLEICHUNG $\Delta u - u_t = 0$ FÜR EINEM UNBEGRENZTEN RAUM

1. In dieser Arbeit wollen wir folgendes Problem lösen. Es seien die Gebiete

(1) $$Z = \{(x,y,t): x > 0,\ 0 < y < x,\ t > 0\}$$

und

$$S_0 = \{(x,y,0): x > 0,\ 0 \leqslant y \leqslant x\},$$
$$S_1 = \{(x,0,t): x \geqslant 0,\ t \geqslant 0\},$$
$$S_2 = \{(x,x,t): x \geqslant 0,\ t \geqslant 0\}$$

angegeben.

Es bezeichne $f(x,y)$ eine stetige und beschränkte Funktion, definiert an dem Rand S_0. Es sei die Funktion

$$F(x,t) = \begin{cases} f_1(x,t) & \text{für } (x,t) \in S_1, \\ f_2(x,t) & \text{für } (x,t) \in S_2 \end{cases}$$

an dem Rand $S_1 \cup S_2$ angegeben.

Es soll eine Funktion $u(x,y,t)$ der Klasse C^2 in Hinsicht auf die Variable x,y, und der Klasse C^1 in Hinsicht auf die Variable t gesucht werden, die Gleichung

(2) $$\Delta u - u_t = 0$$

im Gebiete Z und die Grenz-Bedingungen:

(3) $$u(x,y,0) = f(x,y) \qquad \text{in } S_0,$$

(4) $$D_n u(x,y,t) = F(x,t) \qquad \text{in } S_1 \cup S_2$$

erfüllt (n bezeichnet die innere Normale).

An dem Rand S_1 ist es:

$$D_n u(x,y,t) = D_y u(x,y,t)$$

und an dem Rand S_2 ist es:

$$D_n u(x,y,t) = D_\nu u(x,y,t)$$

ν ist der Vektor $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Gemäß (4) bekommen wir

$$D_y u = f_1(x,t) \qquad \text{in } S_1,$$

$$(5) \qquad \tfrac{1}{\sqrt{2}} D_x u - \tfrac{1}{\sqrt{2}} D_y u = f_2(x,t) \qquad \text{in } S_2.$$

2. Es seien

$$Z_t = \{(\xi, \eta, \tau) : \xi > 0, \quad 0 < \eta < \xi, \quad 0 < \tau < t\}$$

und

$$S_0 = \{(\xi, \eta, 0) : \xi \geq 0, \quad 0 \leq \eta \leq \xi\},$$
$$S_t = \{(\xi, \eta, t) : \xi \geq 0, \quad 0 \leq \eta \leq \xi\},$$
$$(S_1)_t = \{(\xi, 0, \tau) : \xi \geq 0, \quad 0 \leq \tau \leq t\},$$
$$(S_2)_t = \{(\xi, \xi, \tau) : \xi \geq 0, \quad 0 \leq \tau \leq t\}.$$

Wir beweisen im folgendem, daß die Funktion

$$(6) \qquad \begin{aligned} u(x,y,t) = {} & \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^\xi f(\xi,\eta)\, G(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\Big|_{\tau=0} d\eta\, d\xi - \\ & \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_0^\infty f_1(\xi,\tau)\, G(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\Big|_{\eta=0} d\xi\, d\tau - \\ & \frac{1}{4\pi} \int_0^t \int_0^\infty f_2(\xi,\tau)\, G(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\Big|_{\eta=\xi} d\xi\, d\tau \end{aligned}$$

die Lösung des (F-N) Problems für die Gleichung (2) ist. $G(X,Y) = G(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ ist die Green - Funktion für das (F-N) Problem. Wir werden diese mit Hilfe der symmetrischen Abbildungen konstruiren.

3. Es seien zwei Punkte: $X(x,y,t) \in Z$, $Y(\xi,\eta,\tau) \in Z_t$ angegeben. Die Spiegelung des Punktes $X(x,y,t)$ in der Ebene $y = x$ bezeichnen wir mit $X_1(y,x,t)$. Die symmetrische Abbildung des Punktes X_1 in der Ebene $x = 0$ nennen wir $X_2(-y,x,t)$. Das symmetrische Bild des Punktes:

X_2 in Bezug auf die Ebene $y = -x$ ist der Punkt $X_3(-x,y,t)$,
X_3 in Bezug auf die Ebene $y = 0$ ist der Punkt $X_4(-x-y,t)$,
X_4 in Bezug auf die Ebene $y = x$ ist der Punkt $X_5(-y,-x,t)$,

X_5 in Bezug auf die Ebene $y = 0$ ist der Punkt $X_6(y,-x,t)$,
X_6 in Bezug auf die Ebene $y = -x$ ist der Punkt $X_7(y,-x,t)$.

Es sei:

$$
\begin{aligned}
G(x,y,t,\xi,\eta,\tau) = {} & \frac{1}{t-\tau}\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{4(t-\tau)}\right] + \frac{1}{t-\tau}\exp\left[-\frac{(\xi-y)^2+(\eta-x)^2}{4(t-\tau)}\right] \\
& + \frac{1}{t-\tau}\exp\left[-\frac{(\xi+y)+(\eta-x)^2}{4(t-\tau)}\right] + \frac{1}{t-\tau}\exp\left[-\frac{(\xi+x)+(\eta-y)^2}{4(t-\tau)}\right] \\
& + \frac{1}{t-\tau}\exp\left[-\frac{(\xi+x)^2+(\eta+y)^2}{4(t-\tau)}\right] + \frac{1}{t-\tau}\exp\left[-\frac{(\xi+y)^2+(\eta+x)^2}{4(t-\tau)}\right] \\
& + \frac{1}{t-\tau}\exp\left[-\frac{(\xi-y)^2+(\eta+x)^2}{4(t-\tau)}\right] + \frac{1}{t-\tau}\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2+(\eta+y)^2}{4(t-\tau)}\right],
\end{aligned}
\tag{7}
$$

also

$$G(X,Y) = U(X,Y) + \sum_{i=1}^{7} U(X_i,Y), \tag{8}$$

$$U(X,Y) = \frac{1}{t-\tau}\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{4(t-\tau)}\right]. \tag{9}$$

4. Jetzt beweisen wir folgendes:

Theorem 1.

Die Funktion (9) erfüllt als die Funktion des Punktes Y folgende Bedingungen:

a/ X ist der Pol der Funktion (9).

b/ In Hinsicht auf die Variable ξ, η ist sie von der Klasse C^2 und in Hinsicht auf die Variable τ ist sie von der Klasse C^1.

c/ Sie erfüllt die Gleichung:

$$\Delta_{\xi,\eta} u - u_\tau = 0 . \tag{10}$$

d/ Sie erfüllt die Bedingungen:

$$G(x,y,t,\xi,\eta,\tau) = 0 \quad \text{in } S_t - X, \tag{11}$$

$$D_\eta G = 0 \quad \text{in } (S_1)_t, \tag{12}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} D_\xi G - \frac{1}{\sqrt{2}} D_\eta G = 0 \quad \text{in } (S_2)_t. \tag{13}$$

Sie ist also eine Green-Funktion für die Aufgabe (F-N).

Beweis:

Ad a. Da $X \in Z$, also auf Grund der Konstruktion $X_i (i=1,\dots,7)$ gehört nicht zu Z. Die Funktion $U(X_i,Y)$ hat im Punkt X keinen Pol. Die Funktionen $U(X,Y)$ und $G(X,Y)$ haben den Pol in X.

Ad b. Aus der Formel (7) sieht man leicht, daß die Funktion $G(X,Y)$ die Bedingung (11) erfüllt.

Ad c. Jedes Glied der Summe erfüllt die Gleichung (2), also es erfüllt auch die Gleichung (10) in Hinsicht auf ξ, η. Darum erfüllt die Gleichung (10) auch die ganze Summe.

Ad d. Es sei ein beliebiger Punkt $P(\xi_0, \eta_0, t) \in S_t - X$. Wir beweisen, daß $G(X,Y) \to 0$ bei $Y \neq P$ und $Y \to P$.

Tatsächlich $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 > 0$ und $U(X,Y) \to 0$ und $U(X_i,Y) \to 0$ für $i=1,\ldots,7$, bei $Y \to P$ und $\tau \to t$, und endlich $G(X,Y) \to 0$.

Für die Ableitung der Funktion (9) in Hinsicht auf η erhalten wir die Gleichheit

$$D_\eta U_k \big|_{\eta=0} = D_\eta U_{7-k} \big|_{\eta=0} \qquad \text{für } k = 0,\ldots,7,$$

dabei $D_\eta U \big|_{\eta=0} = D_\eta U_0 \big|_{\eta=0}$ bezeichnet. Wir beweisen jetzt, daß die Funktion $G(X,Y)$ die Bedingung (13) erfüllt. Tatsächlich für den Punkt $(\xi, \xi, \tau) \in (S_2)_t$ gelten die Gleichheiten:

$$D_\xi U \big|_{\eta=\xi} = D_\eta U_1 \big|_{\eta=\xi};$$

$$D_\xi U_1 \big|_{\eta=\xi} = D_\eta U \big|_{\eta=\xi};$$

$$D_\xi U_k \big|_{\eta=\xi} = D_\eta U_{9-k} \big|_{\eta=\xi} \qquad \text{für } k = 2,\ldots,7.$$

Wir multiplizieren sie beiderseis mit $\frac{1}{\sqrt{2}}$, addieren und erhalten die Bedingung (13). So ist das Theorem 1 beweisen. Gemäß (6) und (8) haben wir die Lösung in Gestalt:

$$\begin{aligned} u(x,y,t) = {} & \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\int_0^\xi f(\xi,\eta)\, U(X,Y)\big|_{\tau=0}\, d\eta\, d\xi + \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{7}\int_0^\infty\int_0^\xi f(\xi,\eta)\, U(X_i,Y)\big|_{\tau=0}\, d\eta\, d\xi \\ (14) \qquad & - \frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_0^\infty f_1(\xi,\tau)\, U(X,Y)\big|_{\eta=0}\, d\xi\, d\tau - \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{7}\int_0^t\int_0^\infty f_1(\xi,\tau)\, U(X_i,Y)\big|_{\eta=0}\, d\xi\, d\tau \\ & - \frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_0^\infty f_2(\xi,\tau)\, U(X,Y)\big|_{\eta=\xi}\, d\xi\, d\tau - \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{7}\int_0^t\int_0^\infty f_2(\xi,\tau)\, U(X_i,Y)\big|_{\eta=\xi}\, d\xi\, d\tau . \end{aligned}$$

Der Einfachheit halber bezeichnen wir in den weiteren Erwägungen die in der Formel (14) auftretenden Integralen der Reihe nach mit $I_0 - I_{23}$. Man kann sich leicht von folgendem überzeugen:

$$\begin{aligned} & I_k = I_{23-k} && \text{für } k = 8,\ldots,15, \\ (15) \qquad & I_{16} = I_{17}, && \\ & I_k = I_{41-k} && \text{für } k = 18,\ldots,23. \end{aligned}$$

Gemmaß (15) erhällt die Formel (16) folgende Gestalt:

$$u(x,y,t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\int_0^\xi f(\xi,\eta)\,U(X,Y)\Big|_{\tau=0} d\eta\, d\xi + \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{7}\int_0^\infty\int_0^\xi f(\xi,\eta)\,U(X_i,Y)\Big|_{\tau=0} d\eta\, d\xi$$

$$\text{(16)} \qquad - \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{4}\int_0^t\int_0^\infty f_1(\xi,\tau)\;U(X_{8-i},Y)\Big|_{\eta=0} d\xi\, d\tau$$

$$- \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{4}\int_0^t\int_0^\infty f_2(\xi,\tau)\;U(X_i,Y)\Big|_{\eta=\xi} d\xi\, d\tau\,.$$

Die Funktion (16) ist also die Lösung für die Aufgabe (F-N), welche wir im Abschnitt 1 beschrieben haben. Hier haben wir 16 Integrale. Wir bezeichnen sie mit $J_o - J_{15}$, wobei:

$$J_k = I_k \qquad \text{für } k = 0,1,\dots,11,$$

$$J_k = I_{5+k} \qquad \text{für } k = 12,\dots,15.$$

5. Wir beweisen jetzt manche Hilfssätze.

Hilfssatz 1.

Es sei $f(\xi,\tau)$ eine beschränkte Funktion in $(S_1)_t$, das Gebiet

$$E = \{(x,y,t):\ a<x<A,\ 0<b<y<B,\ 0<c<t<T\},$$

wo A,a,B,b,c,T reelle Zahlen sind.
Es seien die Funktionen:

$$r^2(\xi) = (\xi - x)^2 + y^2 \quad \text{oder} \quad r^2(\xi) = (\xi + x)^2 + y^2$$

angegeben. Die Integrale

$$\text{(17a)} \qquad K = \int_0^t\int_0^\infty \frac{f(\xi,\tau)}{(t-\tau)^n} \exp\left[-\frac{r^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi\, d\tau,$$

$$\text{(17b)} \qquad K^* = \int_0^t\int_0^\infty \frac{f(\xi,\tau)\,r^2}{(t-\tau)^n} \exp\left[-\frac{r^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi\, d\tau$$

sind gleichmäßig konvergent im Gebiete E.

Beweis:

Ad (17a). Nehmen wir an: $M = \sup\limits_{(\xi,\eta)\in(S_1)_t} f(\xi,\tau)$, $n>1$, und $\mu\in(0,1)$, dann erhalten wir ([2] s.152)

$$\text{(18)} \qquad \left[\frac{r^2}{4(t-\tau)}\right]^{n-\mu} \exp\left[-\frac{r^2}{4(t-\tau)}\right] \leqslant (n-\mu)^{(n-\mu)} \exp\left[-(n-\mu)\right]$$

und

$$|K| \leqslant M_1 \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^\mu} \int_0^\infty \frac{d\xi}{[(\xi-x)^2+y^2]^{n-\mu}},$$

wo

$$M_1 = M \cdot 4^{n-\mu}(n-\mu)^{(n-\mu)} \exp -(n-\mu).$$

Da $n > 1$ wegen der Definition des Gebietes E haben wir

$$|K| < M_1 \frac{t^{1-\mu}}{1-\mu} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi - x)^2 + b^2} .$$

Mit Hilfe der Transformation:

(19) $\quad \xi - x = bs, \ -\infty < s < +\infty$

bekommen wir:

$$|K| \leqslant \frac{M_1}{b} \ \frac{t^{1-\mu}}{1-\mu} .$$

Gemäß der Definition E erhalten wir

$$|K| \leqslant \frac{M_1}{b} \cdot \frac{T^{1-\mu}}{1-\mu} ,$$

also das Integral K ist gleichmäßig konvergent.

Anmerkung 1. Bei $n = 1$ nützen wir in (17a) die Formel (18) mit $n = 2$ aus.

Anmerkung 2. Bei $r^2(\xi) = (\xi + x)^2 + y^2$ – berechnen wir mit der Transformation $\xi + x = bs, (-\infty < s < +\infty)$.

Ad (17b). Nehmen wir an, daß $n > 2$ ist, dann

$$|K^*| \leqslant M \cdot 4^{n-\mu} \int_0^t \int_0^{\infty} \left[\frac{r^2}{4(t-\tau)} \right]^{n-\mu} \exp\left[- \frac{r^2}{4(t-\tau)} \right] \frac{1}{(t-\tau)^{\mu}} \ \frac{1}{r^{2(n-\mu-1)}} \, d\xi \, d\tau ,$$

Gemäß (18) erhalten wir:

$$|K^{*}| \leqslant M_1 \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\mu}} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{[(\xi - x)^2 + y^2]^{n-\mu-1}} .$$

M, M_1, μ werden wie im a) definiert. Weiter haben wir:

$$|K^*| \leqslant M_1 \frac{t^{1-\mu}}{1-\mu} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi - x)^2 + b^2} .$$

Das Integral an rechter Seite der Ungleichung schätzen wir folgendermassen:

$$|K^*| \leqslant M_1 \frac{\pi}{b} \frac{T^{1-\mu}}{1-\mu} .$$

Daraus folgt der Beweis der gleichmäßigen Konvergenz des Integrals K^*.

Hilfssatz 2.

Nehmen wir an, daß die Voraussetzung für den Hilfsatz 1 erfüllt ist,

$$E_1 = \{(x,y,t) : 0 < a < x < A, b < y < B, \quad 0 < c < t < T\},$$

wo a,A,b,B,c,T reelle Zahlen sind, und:

$$r^2 = (\xi - y)^2 + x^2 \quad \text{oder} \quad r^2 = (\xi + y)^2 + x^2 .$$

Die Integrale:

$$(20a) \qquad K_1 = \int_0^t \int_0^\infty \frac{f(\xi,\tau)}{(t-\tau)^n} \exp\left[-\frac{r^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi \, d\tau ,$$

$$(20b) \qquad K_1^* = \int_0^t \int_0^\infty \frac{f(\xi,\tau) r^2}{(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{r^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi \, d\tau$$

sind gleichmäßig konvergent in jedem Gebiete E_1.

Der Beweis ist ähnlich wie im Hilfssatz 1.

Hilfssatz 3.

Es sei $f(\xi,\tau)$ eine beschränkte Funktion in $(S_2)_t$,

$$E_2 = \left\{ (x,y,t) : \; 0 < a < x < A, \quad y < x - \delta , \quad 0 < c < t < T \right\},$$

wo a,A,c,T reelle Zahlen sind, und

$$r^2(\xi) = (\xi - x)^2 + (\xi - y)^2 .$$

Die Integrale:

$$(21a) \qquad K_2 = \int_0^t \int_0^\infty \frac{f(\xi,\tau)}{(t-\tau)^n} \exp\left[-\frac{r^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi \, d\tau ,$$

$$(21b) \qquad K_2^* = \int_0^t \int_0^\infty \frac{f(\xi,\tau) r^2}{(t-\tau)^n} \exp\left[-\frac{r^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi \, d\tau$$

sind gleichmäßig konvergent in jedem E_2.

Beweis:

Ad (21a). Es sei $M = \sup_{(\xi,\tau)\in(S_2)_t} f(\xi,\tau)$ und $\mu \in (0,1)$. Mit Hilfe der Ungleichung (18) erhalten wir:

$$|K_2| \leqslant M_1 \frac{t^{1-\mu}}{1-\mu} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(\xi - x)^2 + (\xi - y)^2} ,$$

wo $M_1 = M \cdot 4^{n-\mu} (n-\mu)^{n-\mu} \exp[-(n-\mu)]$.

Mit der Transformation:

$$\xi - x = s(\xi - y) , \qquad -\infty < s < +\infty ,$$

erhalten wir:

$$|K_2| < \frac{M_1}{x-y} \frac{t^{1-\mu}}{1-\mu}$$

und gemäß der Definition E_2 haben wir:

$$|K_2^*| \leqslant \frac{M_1}{\delta} \frac{T^{1-\mu}}{1-\mu},$$

was zur gleichmäßigen Konvergenz des Integrals K_2 im E_2 genügt.

Ad (21b). Für $n>3$ ist der Beweis ähnlich wie beim Integral (17b). Bei $n = 2$ und $n = 3$ werwenden wir die Ungleichung (18) indem wir zum Potenzexponent 1 addieren.

Hilfssatz 4.

Es sei $f(\xi,\tau)$ eine beschränkte Funktion in $(S_2)_t$.

$$E_3 = \{(x,y,t):\ 0<a<x,\ \ 0<b<y,\ \ 0<c<t<T\},$$

wo a, b, c, T reelle Zahlen sind, und

$$r^2(\xi) = (\xi+x)^2 + (\xi+y)^2 .$$

Die Integrale:

$$(22a) \qquad K_3 = \int_0^t\int_0^\infty \frac{f(\xi,\tau)}{(t-\tau)^n} \exp\left[-\frac{r^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi\, d\tau ,$$

$$(22b) \qquad K_3^* = \int_0^t\int_0^\infty \frac{f(\xi,\tau)\, r^2}{(t-\tau)^n} \exp\left[-\frac{r^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi\, d\tau$$

sind gleichmäßig konvergent im Gebiete E_3.

Beweis:

Ad (22a). Ähnlich wie vorher /Hilfssatz 3/, bekommen wir:

$$|K_3| \leqslant M_1 \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^\mu} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(\xi+x)^2+(\xi+y)^2} .$$

Wir wenden die Transformation an:

$$\xi + x = s(\xi + y), \qquad -\infty < s < +\infty,$$

und erhalten gemäß der Definition E_3:

$$|K_3| < M_1 \frac{\pi}{2} \cdot \frac{T^{1-\mu}}{1-\mu},$$

was den Beweis von gleichmäßiger Konvergenz dieses Integrals endet.

Ad (22b). Hier ist der Beweis ähnlich wie bei dem Hilfssatz 3 (21b).

Hilfssatz 5.

Es sei $f(\xi,\tau)$ eine beschränkte Funktion in $(S_2)_t$,

$$E_4 = \{(x,y,t):\ a<x<A,\ \ -a<b<y<B,\ \ 0<c<t<T\},$$

wo a,A,b,B,c,T reelle Zahlen sind, und

$$r^2(\xi) = (\xi - x)^2 + (\xi + y)^2 \quad \text{oder} \quad r^2(\xi) = (\xi + x)^2 + (\xi - y)^2 .$$

Die Integrale:

$$(23a) \qquad K_4 = \int_0^t \int_0^\infty \frac{f(\xi,\tau)}{(t-\tau)^n} \exp\left[- \frac{r^2}{4(t-\tau)} \right] d\xi \, d\tau ,$$

$$(23b) \qquad K_4^* = \int_0^t \int_0^\infty \frac{f(\xi,\tau)\, r^2}{(t-\tau)^n} \exp\left[- \frac{r^2}{4(t-\tau)} \right] d\xi \, d\tau$$

sind gleichmäßig konvergent in E_4.

Der Beweis des Hilfssatzes 5 ist ähnlich wie der Beweis des Hilfssatzes 4.

Hilfssatz 6.

Es sei $f(\xi,\eta)$ eine beschränkte Funktion in S_0.

$$E_5 = \{ (x,y,t) : a < x < A,\ b < y < B,\ 0 < c < t < T \} ,$$

wo a,A,b,B,c,T reelle Zahlen sind, und

$$r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 .$$

Die Integrale:

$$(24a) \qquad K_5 = \int_0^\infty \int_0^\xi \frac{f(\xi,\eta)}{t^n} \exp\left[- \frac{r^2}{4t} \right] d\eta \, d\xi ,$$

$$(24b) \qquad K_5^* = \int_0^\infty \int_c^\xi \frac{f(\xi,\eta)\, r^2}{t^n} \exp\left[- \frac{r^2}{4t} \right] d\eta \, d\xi$$

sind gleichmäßig konvergent in E_5.

Beweis:

Ad (24a). Es sei die Hilfsfunktion:

$$\emptyset(\xi,\eta) = \begin{cases} f(\xi,\eta) & \text{in } S_0, \\ 0 & \text{in } \pi - S_0 \end{cases} \quad \text{angegeben.}$$

M sei die $\sup\limits_{(\xi,\eta)\in S_0} f(\xi,\eta)$, dann haben wir:

$$|K_5| \leq M \int_0^\infty \int_0^\xi \frac{1}{t} \exp\left[- \frac{r^2}{4t} \right] d\eta \, d\xi .$$

Führen wir noch die Gebiete

$$(25) \qquad W_R = \{ (\xi,\eta) : \xi^2 + \eta^2 \leq R^2 \},$$

(26) $$Z_R = \{(\xi,\eta):\ \xi^2+\eta^2 > R^2\}$$ ein.

Für die entsprechenden R werden die folgenden Ungleichheiten

(27) $$\frac{\xi^2+\eta^2}{4} \leqslant (\xi-x)^2+(\eta-y)^2 \leqslant 4(\xi^2+\eta^2)$$ erfüllt.

Für das Integral K_5 erhalten wir die Abschätzung:

$$|K_5| \leqslant \frac{M}{c^n}\int_0^\infty\int_0^\infty \exp\left[-\frac{r^2}{4T}\right]d\eta\, d\xi = \frac{M}{c^n}\iint_{W_R} \exp\left[-\frac{r^2}{4T}\right]d\eta\, d\xi + \frac{M}{c^n}\iint_{Z_R} \exp\left[-\frac{r^2}{4T}\right]d\eta\, d\xi .$$

Für das letzte Integral erhalten wir wegen (27)

$$|K_5| \leqslant \frac{M}{c^n}\iint_{W_R} \exp\left[-\frac{r^2}{4T}\right]d\eta\, d\xi + \frac{M}{c^n}\iint_{Z_R} \exp\left[-\frac{\xi^2+\eta^2}{16T}\right]d\eta\, d\xi .$$

Das erste Integral ist hier endlich, und das zweite Integral ist konvergent in Z_R, also K_5 ist gleichmäßig konvergent in E_5.

Ad (24b). Ähnlich wie vorher haben wir:

$$|K_5^*| \leqslant \frac{M}{c^n}\int_0^\infty\int_0^\infty \exp\left[-\frac{r^2}{4T}\right] r^2\, d\eta\, d\xi .$$

Gemäß den Formeln (25) - (27) haben wir:

$$|K_5^*| \leqslant \frac{M}{c^n}\iint_{W_R} \exp\left[\frac{-r^2}{4T}\right] r^2\, d\eta\, d\xi + \frac{M}{c^n}\iint_{Z_R} \exp\left[-\frac{r^2}{16T}\right] r^2 d\eta\, d\xi .$$

Wenn wir in ersten Integral die Transformation:

$$\xi = x + 2\sqrt{T}\,\varrho\cos\varphi ,$$
$$\eta = y + 2\sqrt{T}\,\varrho\sin\varphi , \qquad 0<\varrho<R,\quad 0<\varphi<\tfrac{\pi}{2} ,$$

und im zweiten Integral die Transformation:

$$\xi = x + 4\sqrt{T}\,\varrho_1\cos\varphi_1 ,$$
$$\eta = y + 4\sqrt{T}\,\varrho_1\sin\varphi_1 , \qquad 0<\varrho_1<R,\quad 0<\varphi_1<\tfrac{\pi}{2}$$

anwenden, erhalten wir, wie vorher, die gleichmäßige Konvergenz des Integrals K_5^*.

Anmerkung. Bei $r^2 = (\xi + x)^2 + (\eta + y)^2$ ist der Beweis ähnlich wie bei dem Hilfssatz 6.

6. Wir ziehen jetzt manche Folgerungen aus.

Folgerung 1.

Die Integrale:

a/ J_k für $k = 0,\ldots,7,$

b/ $\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\xi D_t\left[f(\xi,\eta)\, U(X_i,Y)\big|_{t=0}\right] d\eta\, d\xi$ für $i = 0,\ldots,7,$

c/ $\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\xi D_x\left[f(\xi,\eta)\, U(X_i,Y)\big|_{t=0}\right] d\eta\, d\xi$ für $i = 0,\ldots,7,$

d/ $\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\xi D_y\left[f(\xi,\eta)\, U(X_i,Y)\big|_{t=0}\right] d\eta\, d\xi$ für $i = 0,\ldots,7,$

e/ $\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\xi D_x^2\left[f(\xi,\eta)\, U(X_i,Y)\big|_{t=0}\right] d\eta\, d\xi$ für $i = 0,\ldots,7,$

f/ $\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\xi D_y^2\left[f(\xi,\eta)\, U(X_i,Y)\big|_{t=0}\right] d\eta\, d\xi$ für $i = 0,\ldots,7$

sind gleichmäßig konvergent in R_5.

Beweis:

Ad a. Die gleichmäßige Konvergenz der Integrale J_k für $k = 0,\ldots, 7$ folgt aus dem, Beweis des Hilfssatzes 6 Teil a/ und aus der Anmerkung bei dem Hilfssatz 6.

Ad b. Der Ausdruck in b/ ist lineare Kombination der Integrale K_5 und K_5^{π} /für $n = 2$ und $n = 3$/; er ist also gleichmäßig konvergent.

Ad c und d. In Gebiet R_5 haben diese Integrale die Majorante K_5^{π}, daher sind sie gleichmäßig konvergent.

Ad e und f. Die Ausdrücke in e/ und f/ sind lineare Kombinationen der Integrale K_5 und der mit den Integralen K_5^{π} majorisierten Integrale; daraus folgt ihre gleichmäßige Konvergenz.

Folgerung 2.

Die Integrale:

a/ J_k für $k = 8,\ldots,15,$

b/ $\int\limits_0^t \int\limits_0^\infty D_t\left[f_1(\xi,\tau)\, U(X_{8-i},Y)\big|_{\eta=0}\right] d\xi\, d\tau,$

$\int\limits_0^t \int\limits_0^\infty D_t\left[f_2(\xi,\tau)\, U(X_i,Y)\big|_{\eta=0}\right] d\xi\, d\tau,$ $i = 1,\ldots,4,$

c/ $\int\limits_0^t \int\limits_0^\infty D_x\left[f_1(\xi,\tau)\, U(X_{8-i},Y)\big|_{\eta=0}\right] d\xi\, d\tau,$

$\int\limits_0^t \int\limits_0^\infty D_x\left[f_2(\xi,\tau)\, U(X_i,Y)\big|_{\eta=0}\right] d\xi\, d\eta,$ $i = 1,\ldots,4,$

d/ $\int_0^t \int_0^\infty D_y\left[f_1(\xi,\tau)\; U(X_{8-i},Y)\Big|_{\eta=0}\right] d\xi\, d\tau,$

$\int_0^t \int_0^\infty D_y\left[f_2(\xi,\tau)\; U(X_i,Y)\Big|_{\eta=0}\right] d\xi\, d\tau, \qquad i = 1,\dots,4,$

e/ $\int_0^t \int_0^\infty D_x^2\left[f_1(\xi,\tau)\; U(X_{8-i},Y)\Big|_{\eta=0}\right] d\xi\, d\tau,$

$\int_0^t \int_0^\infty D_x^2\left[f_2(\xi,\tau)\; U(X_i,Y)\Big|_{\eta=0}\right] d\xi\, d\tau, \qquad i = 1,\dots,4,$

f/ $\int_0^t \int_0^\infty D_y^2\left[f_1(\xi,\eta)\; U(X_{8-i},Y)\Big|_{\eta=0}\right] d\xi\, d\tau,$

$\int_0^t \int_0^\infty D_y^2\left[f_2(\xi,\eta)\; U(X_i,Y)\Big|_{\eta=0}\right] d\xi\, d\tau, \qquad i = 1,\dots,4$

sind wegen der Hilfssätze 1 und 2 gleichmäßig konvergent in E bei $k=8,\dots,11$, oder in E_1 bei $k=12,\dots,15$.

Folgerung 3.

Die Integrale:

I.a/ $\int_0^t \int_0^\infty f_1(\xi,\tau)\, U(X_{8-i},Y)\Big|_{\eta=\xi} d\xi\, d\tau,$ II. $\int_0^t \int_0^\infty f_2(\xi,\tau)\, U(X_i,Y)\Big|_{\eta=\xi} d\xi\, d\tau,$

b/ $\int_0^t \int_0^\infty D_t\left[f_1(\xi,\tau)\, U(X_{8-i},Y)\Big|_{\eta=\xi}\right] d\xi\, d\tau,$ $\int_0^t \int_0^\infty D_t\left[f_2(\xi,\tau)\, U(X_i,Y)\Big|_{\eta=\xi}\right] d\xi\, d\tau,$

c/ $\int_0^t \int_0^\infty D_x\left[f_1(\xi,\tau)\, U(X_{8-i},Y)\Big|_{\eta=\xi}\right] d\xi\, d\tau,$ $\int_0^t \int_0^\infty D_x\left[f_2(\xi,\tau)\, U(X_i,Y)\Big|_{\eta=\xi}\right] d\xi\, d\tau,$

d/ $\int_0^t \int_0^\infty D_y\left[f_1(\xi,\tau)\, U(X_{8-i},Y)\Big|_{\eta=\xi}\right] d\xi\, d\tau,$ $\int_0^t \int_0^\infty D_y\left[f_2(\xi,\tau)\, U(X_i,Y)\Big|_{\eta=\xi}\right] d\xi\, d\tau,$

e/ $\int_0^t \int_0^\infty D_x^2\left[f_1(\xi,\tau)\, U(X_{8-i},Y)\Big|_{\eta=\xi}\right] d\xi\, d\tau,$ $\int_0^t \int_0^\infty D_x^2\left[f_2(\xi,\tau)\, U(X_i,Y)\Big|_{\eta=\xi}\right] d\xi\, d\tau,$

f/ $\int_0^t \int_0^\infty D_y^2\left[f_1(\xi,\tau)\, U(X_{8-i},Y)\Big|_{\eta=\xi}\right] d\xi\, d\tau,$ $\int_0^t \int_0^\infty D_y^2\left[f_2(\xi,\tau)\, U(X_i,Y)\Big|_{\eta=\xi}\right] d\xi\, d\tau$

sind gleichmäßig konvergent und zwar die Integrale I für $i=1$ und $i=4$ in E und für $i=2$ und $i=3$ in E_1, die Integrale II für $i=1$ in E_2, für $i=4$ in E_3, für $i=2$ und $i=3$ in E_4.

7. Gemäß den obigen Hilfssätzen und Folgerungen erhalten wir:

Theorem 2.

Die Funktion (16) ist im Raum $Z \cup S_0$ die Funktion von der Klasse C^2 in Hinsicht auf die Variable x,y. Im Raum $Z \cup S_1 \cup S_2$ ist sie von der Klasse C^1 in Hinsicht auf die Variable t.

Theorem 3.

Die Funktion (16) erfüllt im Gebiete Z die Gleichung 2 .

Theorem 4.

Bei den Bedingungen $(x,y,t)\in Z$ und dem Punkt $(x,y,t)\to(x_0,y_0,t_0)\in S_0$, konvergiert das Integral J_0 gegen $f(x_0,y_0)$ und die Integrale J_k $(k=1,\dots,15)$ gegen Null.

Beweis

Nehmen wir an:

$$\bar{f}(\xi,\eta)=\begin{cases} f(\xi,\eta) & \text{in } S_0, \\ 0 & \text{in } C(S_0), \end{cases}$$

dann ist:

$$J_0(x,y,t)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{f}(\xi,\eta)}{t}\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{4t}\right]d\eta\, d\xi$$

das Fourier-Poissons Integral und gemäß dem Weierstrass-Theorem ist es gegen $f(x_0,y_0)$ konvergent.

Gemäß den Hilfssätzen 1-5, sowie der Folgerungen 1-3 haben wir:

$$|J_k|\leqslant C\,\frac{t^{1-\mu}}{1-\mu}, \qquad C\text{: const.}, \quad k=8,\dots,15.$$

Wenn $t\to 0$, dann $J_k\to 0$.

Wir beweisen jetzt, daß J_k für $k=1,\dots,7$ gegen Null konvergiert. Es sei $k=1$. Die Beweise sind in den anderen Fällen analog. Gemäß der Definition S_0 und den Voraussetzungen ist $(y,x,0)\notin S_0$. Für jeden Punkt $(\xi,\eta,0)\in S_0$ gibt es daher ein solches $k>0$, daß

$$(\xi-y)^2+(\eta-x)^2>k^2.$$

Es sei

$$Z_k=\left\{(\xi,\eta,0):(\xi-y)^2+(\eta-x)^2>k^2\right\},$$

also $S_0\subset Z_k$. Dann:

$$|J_1|\leqslant\frac{M}{4\pi}\iint_{S_0}\frac{1}{t}\exp\left[-\frac{(\xi-y)^2+(\eta-x)^2}{4t}\right]d\xi\, d\eta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M}{4\pi}\iint_{Z_k}\frac{1}{t}\exp\left[-\frac{(\xi-y)^2+(\eta-x)^2}{4t}\right]d\eta\, d\xi\,.$$

Mit der Transformation:

$$\xi=y+2\sqrt{t}\,\varrho\cos\varphi,$$

$$\eta=x+2\sqrt{t}\,\varrho\sin\varphi,\quad \frac{k}{2\sqrt{t}}<\varrho<+\infty,\quad 0<\varphi<\frac{\pi}{2},$$

erhalten wir:

$$|J_1| \leqslant \frac{M}{\pi}\int_0^{\pi} d\varphi \int_{\frac{k}{2\sqrt{t}}}^{\infty} \exp\left[-\varrho^2\right] d\varrho = M \exp\left[-\frac{k^2}{4t}\right] \to 0 \quad \text{wenn} \quad t \to 0.$$

Wir beweisen jetzt

Theorem 5.

Wenn $(x,y,t) \in Z$ und $(x,y,t) \to (x_0,0,t_0) \in S_1$, dann

a/ $$\lim_{(x,y,t)\to(x_0,0,t_0)} D_y J_8(x,y,t) = -f_1(x_0,t_0),$$

b/ $$\lim_{(x,y,t)\to(x_0,0,t_0)} D_y J_k(x,y,t) = 0 \qquad \text{für} \quad k = 0,\dots,7,9,\dots,15.$$

Beweis

Ad a. Es sei

$$\bar{f}_1(\xi,\tau) = \begin{cases} f_1(\xi,\tau) & \text{in } S_1, \\ 0 & \text{in } C(S_1). \end{cases}$$

Dann

$$D_y J_8(x,y,t) = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}_1(x_0,t_0)y}{2(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(\xi-x)^2+y^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi\, d\tau -$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[\bar{f}_1(\xi,\tau)-\bar{f}_1(x_0,t_0)\right]y}{2(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(\xi-x)^2+y^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi\, d\tau =$$

$$= P_1 + P_2.$$

Mit Hilfe der Formel

$$(30) \qquad \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(\xi-x)^2+y^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi\, d\tau = 1$$

erhalten wir $P_1 = -f_1(x_0,t_0)$.

Da f_1 im Punkte $(x_0,0,t_0)$ stetig ist gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein solches $\delta > 0$, daß für

$$|x-x_0| < \delta, \quad 0 < y < \delta, \quad |t-t_0| < \delta;$$

$$|f_1(x,t) - f_1(x_0,t_0)| < \varepsilon$$

gilt.

Führen wir die Gebiete ein:

$$W(\delta,t) = \left\{(\xi,0,\tau) : |\xi - x_0| < \delta,\ |\tau - t_0| < \delta \text{ i } \tau < t\right\},$$

$$Z(\delta,t) = \left\{(\xi,0,\tau) : |\xi - x_0| < \delta \text{ oder } |\tau - t_0| < \delta,\ \tau < t\right\},$$

also:

$$|P_2| \leqslant \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{W(\delta,t)} \frac{y\,|f_1(\xi,\tau)-f_1(x_0,t_0)|}{(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(\xi-x)^2+y^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{Z(\delta,t)} \frac{y\,|f_1(\xi,\tau)-f_1(x_0,t_0)|}{(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(\xi-x)^2+y^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi\, d\tau = T_1+T_2.$$

Gemäß der Stetigkeit f_1 haben wir:

$$|T_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{4\pi} \iint\limits_{W(\delta,t)} \frac{y}{(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(\xi-x)^2+y^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi\, d\tau < \varepsilon.$$

Fur das Integral T_2 führen wir folgende Gebiete ein:

$$Z_1\left(\frac{\delta}{2},t\right) = \left\{(\xi,0,\tau) : |\xi-x| > \frac{\delta}{2},\ t>\tau,\ |x-x_0| < \frac{\delta}{2},\ |t-t_0| < \frac{\delta}{2},\ 0<y<\delta\right\},$$

$$Z_2\left(\frac{\delta}{2},t\right) = \left\{(\xi,0,\tau) : |\xi-x| < \frac{\delta}{2},\ t>\tau,\ |x-x_0| < \frac{\delta}{2},\ |t-t_0| < \frac{\delta}{2},\ 0<y<\delta\right\},$$

$$Z\left(\frac{\delta}{2},t\right) = Z_1\left(\frac{\delta}{2},t\right) \cup Z_2\left(\frac{\delta}{2},t\right).$$

Wir erhalten also $Z(\delta,t) \subset Z\left(\frac{\delta}{2},t\right)$.

Es sei $M = \sup\limits_{(\xi,\tau)\in Z_1} f_1(\xi,\tau)$. Wir haben für das Integral T_2 die Abschätzung: $|T_2| \leqslant |S_1| + |S_2|$, wo

$$S_1 = \frac{M}{4\pi} \iint\limits_{Z_1(\frac{\delta}{2},t)} \frac{y}{(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(\xi-x)^2+y^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi\, d\tau,$$

$$S_2 = \frac{M}{4\pi} \iint\limits_{Z_2(\frac{\delta}{2},t)} \frac{y}{(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(\xi-x)^2+y^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi\, d\tau.$$

Aber:

$$|S_1| \leqslant \frac{M}{4\pi} \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{x-\frac{\delta}{2}} \frac{y}{(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(\xi-x)^2+y^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi\, d\tau +$$

$$+ \frac{M}{4\pi} \int_{-\infty}^{t}\int_{x+\frac{\delta}{2}}^{\infty} \frac{y}{(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(\xi-x)^2+y^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi\, d\tau =$$

$$= \frac{My}{\pi} \int_{-\infty}^{x-\frac{\delta}{2}} \frac{d\xi}{(\xi-x)^2+y^2} + \frac{My}{\pi} \int_{x+\frac{\delta}{2}}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi-x)^2+y^2} \to 0.$$

Für das Integral S_2 erhalten wir die Abschätzung:

$$|S_2| \leqslant \frac{M}{4\pi} \int_{x-\frac{\delta}{2}}^{x+\frac{\delta}{2}}\int_{-\infty}^{t-\frac{\delta}{2}} \frac{y}{(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(\xi-x)^2+y^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi\, d\tau \to 0,$$

Gemäß den Hilfssätzen und den Folgerungen haben wir

$D_yJ_k(x,y,t) \longrightarrow 0$ (für $k = 0,\ldots,7,9.10,12,\ldots,15$) bei $(x,y,t) \to (x_o,0,t_o)$. Es bleibt noch zu beweisen, daß $D_yJ_{11}(x,y,t) \longrightarrow 0$ bei $y \to 0$. In der Tat haben wir wegen den Hilfssätzen 1 - 5

$$|D_yJ_{11}(x,y,t)| \leq \frac{My}{2\pi} \int_{-\infty}^{t} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(\xi+x)^2+y^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi\, d\tau$$

$$\frac{2My}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi+x)^2+y^2} \longrightarrow 0,$$

Wir beweisen jetzt

Theorem 6.

Es sei $(x,y,t) \in Z$ und $(x,y,t) \to (x_o,x_o,t_o)$, dann

a/ $\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{11} D_xJ_k(x,y,t) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{11} D_yJ_k(x,y,t) \longrightarrow 0$,

b/ $\frac{1}{\sqrt{2}} D_xJ_{13}(x.y.t) - \frac{1}{\sqrt{2}} D_yJ_{13}(x,y,t) + \frac{1}{\sqrt{2}} D_xJ_{14}(x,y,t) - \frac{1}{\sqrt{2}} D_yJ_{14}(x,y,t) \to 0$

c/ $\frac{1}{\sqrt{2}} D_xJ_{12}(x,y,t) - \frac{1}{\sqrt{2}} D_yJ_{12}(x,y,t) \longrightarrow -f_2(x_o,t_o)$,

d/ $\frac{1}{\sqrt{2}} D_xJ_{15}(x,y,t) - \frac{1}{\sqrt{2}} D_yJ_{15}(x,y,t) \longrightarrow 0$.

Beweis:

Ad a und b. Gemäß den Hilfssätzen 1 - 5 streben die Ausdrücke im a/ und b/ gegen 0 bei $(x,y,t) \to (x_o,x_o,t_o)$.

Ad c. Der Ausdruck c/ nimmt die Gestalt an:

$$\frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \int_0^t \int_0^\infty \frac{f_2(\xi,\tau)(\xi-x)}{(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(\xi-x)^2+(\xi-y)^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi\, d\tau -$$

$$\frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \int_0^t \int_0^\infty \frac{f_2(\xi,\tau)(\xi-y)}{(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(\xi-x)^2+(\xi-y)^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi\, d\tau =$$

$$\frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \int_0^t \int_0^\infty \frac{f_2(\xi,\tau)(y-x)}{(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(\xi-x)^2+(\xi-y)^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi\, d\tau .$$

Gemäß der Gleichheit:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{t} \frac{x-y}{(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(\xi-x)^2+(\xi-y)^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi\, d\tau = 1.$$

erhalten wir Theorem 6 c/.

Ad d. Ahnlich wie vorher, schreiben wir:

$$\int_0^t\int_0^\infty \frac{-1(\xi+x)f_2(\xi,\tau)}{4\pi\sqrt{2}\ (t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(\xi+x)^2+(\xi+y)^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi\, d\tau +$$

$$+\frac{1}{4\pi\sqrt{2}}\int_0^t\int_0^\infty \frac{f_2(\xi,\tau)(\xi+y)}{(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(\xi+x)^2+(\xi+y)^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi\, d\tau =$$

$$=\frac{1}{4\pi\sqrt{2}}\int_0^t\int_0^\infty \frac{f_2(\xi,\tau)(y-x)}{(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(\xi+x)^2+(\xi+y)^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi\, d\tau = L.$$

Es sei $M = \sup\limits_{(\xi,\tau)\in S_2} f_2(\xi,\tau)$. Dann haben wir:

$$|L| \leqslant \frac{M(y-x)}{4\pi\sqrt{2}}\int_0^t\int_0^\infty \frac{1}{(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(\xi+x)^2+(\xi+y)^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi\, d\tau = \frac{M(y-x)}{4\pi\sqrt{2}} \longrightarrow 0.$$

Aus den Theoremen 5 und 6 folgt, daß die Bedingung (4) erfüllt ist.

L i t e r a t u r

[1] M. Krzyżański, Równania różniczkowe cząstkowe, tom I,PWN,Warszawa 1957.

[2] W. Pogorzelski, Równania całkcwe, tom II, PWN, Warszawa 1958.