ROCZNIK NAUKOWO—DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE

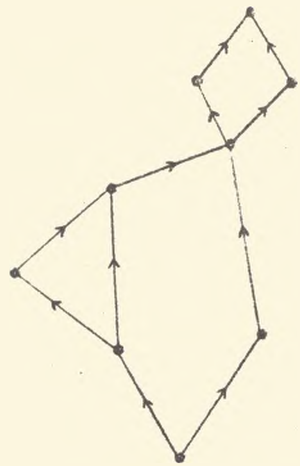
Zeszyt 54 Prace z dydaktyki matematyki Rok 1974

Zofia Krygowska

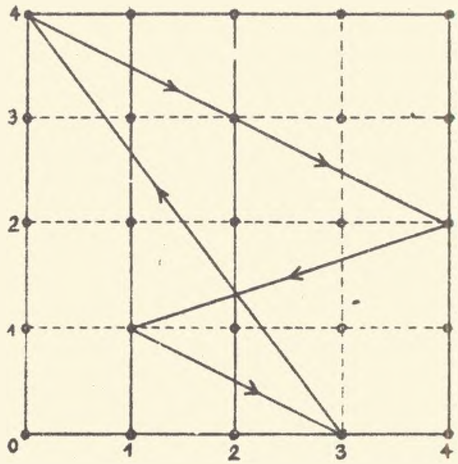
DYDAKTYCZNA ROLA SKOŃCZONYCH I KONKRETNYCH MODELI STRUKTUR MATEMATYCZNYCH

1. Skończony model matematycznej struktury będziemy nazywać konkretnym, jeżeli liczby elementów zbiorów, występujących w modelu są zadane numerycznie oraz relacje określające daną strukturę są tak dane uczniowi, że może on przez bezpośrednie manipulacje na elementach tych zbiorów, czy ich symbolach rozwiązywać problemy związane z danym modelem. W tym znaczeniu tabela o dwóch wejściach definiująca działanie grupowe w zbiorze $\{a,b,c\}$ określa konkretny, skończony model grupy, mimo że symbole a,b,c nie mają dla ucznia ustalonego indywidualnie sensu /zmienne, jakieś obiekty/. Rozpatrując kolejno wiersze i kolumny uczeń może "manipulacyjnie" zbadać, czy ma do czynienia z grupą i odkryć szczególne własności tej grupy. Zbiór liczb 1,2,3 z dodawaniem i odejmowaniem modulo 3 jest konkretnym skończonym modelem ciała,ale już nie konkretnym, choć skończonym modelem ciała będzie dla ucznia w przyjętym znaczeniu zbiór liczb naturalnych nie większych od p, gdy p jest liczbą pierwszą, z dodawaniem i mnożeniem modulo p, jeżeli p nie jest dane numerycznie. Dziewięć różnych kolorowych klocków Dienesa o trzech kształtach i trzech kolorach może służyć do konstrukcji skończonego, konkretnego modelu afinicznej płaszczyzny rzędu 3; zbiór tych klocków z umową co do sensu terminu "prosta" w tym modelu jest właśnie konkretnym modelem takiej płaszczyzny. Manipulując tym materiałem uczeń bada bezpośrednio własności takiej płaszczyzny, wyznacza możliwe kolineacje, odkrywa, że w tej płaszczyźnie spełnione jest twierdzenie Desargues'a itp. Graf przedstawiony na rysunku 1 określa skończony konkretny model kraty; uczeń może to stwierdzić analizując "manipulacyjnie" rysunek, natomiast już nie będzie konkretnym modelem struktury porządku częściowe-

go zbiór liczb naturalnych nie większych od n z relacją podzielności, jeżeli n nie jest dane numerycznie.



Rys. 1



Rys. 2

Nowoczesna dydaktyka matematyki eksponuje konkretne i skończone modele struktur matematycznych. Ułatwiają one uczniom dostęp do pojęć algebry abstrakcyjnej, służą dobrze oswajaniu ich z elementami rachunku prawdopodobieństwa i statystyki, są szeroko wykorzystywane przy wprowadzaniu elementów topologii kombinatorycznej, lub pojęcia przestrzeni metrycznej. Znaczenie ich polega na tym, że uczeń może konkretnie, manipulacyjnie rozwiązywać problemy dotyczące takiego modelu, przez wyczerpywanie wszystkich możliwych przypadków, bez konieczności operowania klasami pojęciowymi i inferencjami ogólnymi.

2. Rozważmy typowy i bardzo interesujący przykład takiego właśnie zastosowania konkretnego, skończonego modelu przestrzeni wektorowej[1]. Punkty węzłowe sieci przedstawionej na rysunku 2 mają odpowiednio zgodnie z tym rysunkiem przyporządkowane współrzędne. Wprowadza się pojęcie translacji w zbiorze tych punktów wzorami:

$$x' = x + u \mod 5,$$

$y' = y + v$ modulo 5, gdy u i v są liczbami należącymi do zbioru $\{0,1,2,3,4\}$.

[1]Maurice Glaymann Initiation to vector spaces, Educational Studies in Mathematics, 2/1969/, s. 69-79.

Punkt o współrzędnych a,b oznacza się symbolem $\binom{a}{b}$, translację o parametrach u,v symbolem /u,v/.

Zbiór węzłów sieci - to zbiór 25 punktów, zbiór translacji - to zbiór również 25 przekształceń zdefiniowanych powyżej na zbiorze tych punktów.

Problem, czy można przejść z punktu $\binom{1}{1}$ do punktu $\binom{2}{2}$ przez iloczyn translacji, którego wszystkie czynniki są identyczne, uczniowie rozwiązują "manipulacyjnie", rozważając kolejno różne translacje. Na przykład na pewno nie nadaje się do tego translacja T = /2,4/, bo:

$$\binom{1}{1} \xrightarrow{T} \binom{3}{0} \xrightarrow{T} \binom{0}{4} \xrightarrow{T} \binom{2}{3} \xrightarrow{T} \binom{4}{2} \xrightarrow{T} \binom{1}{1} \qquad \text{/rys. 2/.}$$

W klasie uczniowie mogą się podzielić pracą i zbadać wszystkie translacje z punktu widzenia tego problemu. Problem, czy można w tym sensie przejść od punktu $\binom{1}{1}$ do punktu $\binom{2}{2}$ z dopuszczeniem składania translacji z dwóch translacji w dowolnym porządku i w dowolnej ilości czynników, rozwiązują uczniowie przez zestawienie w tabeli wszystkich takich możliwych złożeń i obrazów punktu $\binom{1}{1}$ w tych złożeniach. Oto taka tabela dla $T_1 = (2,3)$ i $T_2 = (2,4)$ /z uwzględnieniem przemienności składania translacji/:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & \multicolumn{6}{c}{T_1 \longrightarrow} \\
\hline
 & \binom{1}{1} & \binom{3}{4} & \binom{0}{2} & \binom{2}{0} & \binom{4}{3} & \binom{1}{1} \\
 & \binom{3}{0} & \binom{0}{3} & \binom{2}{1} & \binom{4}{4} & \binom{1}{2} & \binom{3}{0} \\
 & \binom{0}{4} & \binom{2}{2} & \binom{4}{0} & \binom{1}{3} & \binom{3}{1} & \binom{0}{4} \\
T_2 \downarrow & \binom{2}{3} & \binom{4}{1} & \binom{1}{4} & \binom{3}{2} & \binom{0}{0} & \binom{2}{3} \\
 & \binom{4}{2} & \binom{1}{0} & \binom{3}{3} & \binom{0}{1} & \binom{2}{4} & \binom{4}{2} \\
 & \binom{1}{1} & \binom{3}{4} & \binom{0}{2} & \binom{2}{0} & \binom{4}{3} & \binom{1}{1}
\end{array}$$

Z tabeli odczytują uczniowie na przykład

$$\binom{1}{1} \xrightarrow{T_1} \binom{3}{4} \xrightarrow{T_2} \binom{0}{3} \xrightarrow{T_2} \binom{2}{2},$$

i odpowiadają pozytywnie na postawione im pytanie.

Ale tabela pozwala na wysnucie wniosków ogólniejszych. Badając konkretnie, jakie w niej występują punkty, uczniowie stwierdzają, że każdy punkt rozważanego zbioru punktów ma swój symbol w tabeli, że od każdego punktu do każdego punktu można przejść przez składanie translacji T_1 i T_2 w odpowiedniej ilości tych czynników, i to na różne sposoby.

Zauważmy jednak, że odkrycie tego ważnego dla danej teorii /dla uczniów jest to konstruowana przez nich teoria/ faktu jest właściwie przypadkowe. Twierdzenie: "grupa translacji generowana przez translacje T_1 i T_2 jest tranzytywna w rozważanym zbiorze punktów", zostało "manipulacyjnie" udowodnione z zupełną ścisłością, ale istota rzeczy nie została wyjaśniona. To wyjaśnienie bowiem wymaga rozumowania pojęciowego. Może ono być oparte na rachunku kongruencjami, na rachunku w ciele Z_5, może polegać też na analizie ex post tabeli, ale dopiero ujęcie pojęciowe pozwala zrozumieć istotę rzeczy, odkryć "powód", dla którego przez składanie translacji T_1 i T_2 taki wynik uzyskano, a przez składanie innych dwóch translacji takiego wyniku może się nie uzyskać. Manipulacja przygotowuje w danym przypadku do odkrycia niezależności liniowej translacji i zrozumienia roli tego pojęcia, ale nie może ujęcia pojęciowego zastąpić. Hasło: "Manipulować, ciągle manipulować przed abstrahowaniem" sformułowane przez autora książki poświęconej problemom związanym z skończonymi, konkretnymi modelami abstrakcyjnych struktur, konstruowanymi dla celów nauczania, jest słuszne, pod warunkiem, że odczytujemy je aż do końca[2].

Każdy środek dydaktyczny, każda metoda dydaktyczna wymagają wszechstronnej i ostrożnej oceny. Wymagają zbadania, jakie funkcje w procesie uczenia się mogą, a jakich nie mogą spełnić. Między innymi trzeba je analizować nie tylko z punktu widzenia ich efektywności w zakresie przyswajania wiedzy, ale także z punktu widzenia form myślenia, rodzajów twórczości, typów aktywności intelektualnej, których rozwojowi sprzyjają lub których rozwój mogą nawet hamować. Takiej analizy bardzo wnikliwej i takiej oceny wymaga na przykład nauczanie programowane, stosowanie różnych środków technicznych itp., dotyczy to również bardziej specjalnych zagadnień dydaktyki matematyki, jak wykorzystywanie w nauczaniu konkretnych, skończonych modeli struktur matematycznych.

Aby jaśniej przedstawić sens takiej analizy, omówimy kilka przykładów rzeczywiście obserwowanych na różnych poziomach matematycznych doświadczeń.

Zaczniemy od dokładnego prześledzenia pracy osoby dorosłej w toku rozwiązywania kolejnych zadań dotyczących pewnej struktury matematycznej[3]. Źródłem reakcji łańcuchowej, którą przedstawimy, było zadanie po-

[2] André Myx, Modèles finis, Monographie Galion, CEDIC, Paris 1973, s. 9.

[3] Na podstawie osobistych doświadczeń autorki artykułu.

stawione uczniom w ramach Matematycznej Olimpiady o następującej treści: 11 osób tworzy zespół, którego członkowie mają prawo uczestniczyć w uruchomieniu mechanizmu, nadającego pewien sygnał. Nadanie sygnału wymaga zgodnej decyzji co najmniej sześciu osób spośród tych jedenastu. Należy tak wyposażyć całe urządzenie w zamki i tak rozdać klucze do tych zamków osobom zespołu, aby każda szóstka miała dostęp do mechanizmu, oraz aby żaden z zespołów liczących mniej niż sześć osób tej możliwości nie miał.

Pójdziemy drogą przebytą przez myśl osoby rozwiązującej to zadanie. Czytamy temat. Nie dostrzegamy od razu żadnego punktu zaczepienia. Próbujemy zmniejszyć ilościowo liczby występujące w zadaniu tak,aby zachowując relacje między danymi móc już manipulacyjnie, konkretnie analogiczne, ale łatwiejsze zadanie rozwiązać. Zespół trójosobowy wydaje się nam mało instruktywny z tego punktu widzenia. Do zespołu czteroosobowego nie umiemy zastosować warunków zadania, ponieważ - jak nam się wydaje - fakt, że minimalna grupa uprawniona[4] liczy o jedną osobę więcej niż maksymalna grupa nieuprawniona do nadania sygnału, wraz z faktem,że zespół osób uzupełniających minimalną grupę uprawnioną do całego zespołu tworzy już grupę nieuprawnioną i to maksymalną taką grupę, stanowi istotne założenia problemu. Przykład zespołu pięcioosobowego z trójosobowymi grupami minimalnymi upoważnionymi, spełnia te założenia i nadaje się jeszcze do manipulacyjnego rozważania. Powstaje w ten sposób uproszczona <u>wersja</u> I* zadania:

Pełny zespół jest zbiorem $\{a,b,c,d,e\}$ pięciu osób; minimalnych trójosobowych grup upoważnionych jest 10, tym samym maksymalnych dwuosobowych grup nieupoważnionych jest też 10. Zadanie rozwiązujemy konstruując stopniowo tabelę, dołączając kolejno w miarę potrzeby numery koniecznych zamków; wszystko to sprowadza się do prawie mechanicznych manipulacji. Jeżeli zamek o danym numerze udostępniamy jakiejś osobie, zaznaczamy w odpowiedniej kratce tabeli krzyżyk, w przeciwnym przypadku kratę zacieniujemy. Rozumujemy tak: Ponieważ zespół $\{d,e\}$ nie jest upoważniony, musimy przewidzieć zamek, do którego dostępu nie będzie miał ani d ani e. Uwzględniając to, że każdy trójosobowy zespół musi mieć dostęp do każdego zamku, otrzymujemy pierwszy wiersz tabeli. Ponieważ zespół $\{c,d\}$ nie jest upoważniony i ten zespół ma już dostęp do zamku o numerze 1, musimy mieć zamek o numerze 2, do którego ani c, ani d nie będą mieli dostępu. Uwzględniając prawo zespołów trójosobowych - otrzymujemy przydział zamków przedstawiony w wierszu drugim tabeli. Postępując tak dalej, stwierdzamy ostatecznie po 10 krokach, że zadanie rozwiązaliśmy nie tylko poprawnie, ale i najbardziej ekonomicznie

[4]Będziemy używać dalej skrótów "uprawniona" lub "upoważniona" zamiast "uprawniona /upoważniona/ do nadania sygnału".

/najmniejsza możliwie ilość zamków/. Dowód odczytać można bezpośrednio z tabeli znowu manipulacyjnie, sprawdzając kolejno dla grup minimalnych uprawnionych i maksymalnych nieuprawnionych warunki zadania.

	a	b	c	d	e
1	x	x	x		
2	x	x			x
3	x			x	x
4			x	x	x
5		x		x	x
6		x	x		x
7		x	x	x	
8	x		x		x
9	x		x	x	
10	x	x		x	

Próba rozwiązania zadania w ułatwionej wersji I^{*}, ułatwionej przez to, że praktycznie mała liczność zbioru umożliwiła manipulacyjne rozwiązanie, sugeruje analogiczne, ale już pojęciowe rozwiązanie zadania w wersji I^{**} na temat zespołu 11 osób. Do pojęciowego ujęcia jesteśmy już "zmuszeni", chociaż mamy do czynienia nadal ze zbiorem skończonym i z danymi numerycznymi. Zmusza nas do tego praktycznie duża liczność tego zbioru, która uniemożliwia konstruowanie tabeli na kartce papieru, bo minimalnych zespołów uprawnionych i maksymalnych nieuprawnionych mamy już $\binom{11}{6} = \binom{11}{5} = 462$. W istocie rzeczy poszukując rozwiązania postępujemy tak samo, jak przy konstruowaniu tabeli. Przypuszczamy, że zadanie ma rozwiązanie. Jeżeli S jest którymkolwiek zespołem maksymalnym nieupoważnionym, to istnieje zamek z, do którego dostępu nie ma żadna z osób tego zespołu. Każda z osób zespołu sześcioosobowego $\bar{S}$ dopełniającego zespół S do pełnego zespołu musi mieć dostęp do tego zamku, gdyby bowiem tak nie było, to jest, gdyby choć jedna osoba a, należąca do $\bar{S}$, nie miała klucza do zamku z, to zespół $S \cup \{a\}$, choć sześcioosobowy, nie miałby dostępu do zamku z - wbrew założeniu, że każdy zespół sześcioosobowy jest uprawnionym zespołem. Niechaj S' będzie innym niż S maksymalnym zespołem nieuprawnionym. Ponieważ $S' \not\subset S$, więc $S' \cap \bar{S} \neq \emptyset$, zatem zespół S' ma dostęp do zamku z. Musi więc istnieć zamek $z' \neq z$, do którego S' nie ma dostępu, a więc każda z osób zespołu $\bar{S}'$ otrzymuje klucz do tego zamku.

Ta analiza wstępna zadania w wersji I^{**} odpowiadająca "pojęciowo" manipulacyjnemu konstruowaniu tabeli w wersji I^{*}, wskazuje jedno jedyne możliwe rozwiązanie naszego zadania. Zaopatrujemy mechanizm w 462 zamków, z których tworzymy ciąg z_i o 462 wyrazach. Rozważamy ciąg S_i wszystkich różnych minimalnych zespołów uprawnionych. Każdej osobie zespołu S_i dajemy klucz do zamku z_i, żadna inna osoba klucza do tego zamku nie otrzymuje. Podajemy w ten sposób optymalne ze względu na ilość zamków /minimalna ilość zamków/ rozwiązanie zadania. Istotnie, jeżeli S jest zespołem nieupoważnionym, to S zawiera się w jakimś pięcioosobowym zespole nieupoważnionym $\bar{S}_i$, zatem zespół S nie ma dostępu do zamku z_i. Jeżeli S jest dowolnym zespołem upoważnionym, to w S zawiera się jakiś zespół upoważniony S_i. Dowolnie wybrany zamek z_j został udostępniony wszystkim osobom zespołu S_j, ale $S_j \cap S_i \neq \emptyset$ /dwa sześcioosobowe zespoły muszą mieć element wspólny, bo pełny zespół liczy 11 osób/. Do zespołu S_i należy osoba mająca klucz do zamku z_j, zespół S_i ma więc też dostęp do tego zamku.

Poszukując warunków koniecznych dla rozwiązania zadania,postępujemy, jak powiedzieliśmy, podobnie, jak postępowaliśmy konstruując tabelę. Istotna różnica polega na zastąpieniu inferencji odnoszących się do poszczególnych elementów, inferencjami odnoszącymi się do klas, do zbiorów, inferencjami kwantyfikowanymi. Sporządzając tabelę, rozumowaliśmy: zespół $\{d,e\}$ nie ma dostępu do wszystkich zamków, istnieje więc zamek nr 1, do którego klucza nie ma żaden członek tego zespołu. Stąd każdy członek pozostałego zespołu $\{a,b,c\}$ musi mieć dostęp do zamku nr 1. Przechodziliśmy następnie do takiego samego rozważania w stosunku do zespołu nieupoważnionego $\{c,d\}$, itd. W wersji I^{**} rozumujemy: Jeżeli S jest którymkolwiek zespołem nieupoważnionym, to istnieje zamek z, do którego dostępu ten zespół nie ma itd. Postępowanie w pierwszym przypadku nazwaliśmy manipulacyjnym, w drugim pojęciowym.

Podobna różnica charakteryzuje dowód poprawności rozwiązania. Aby sprawdzić po wykonaniu tabeli, że przedstawiony w niej przydział zamków, spełnia warunki zadania, trzeba sprawdzić, czy każdy zespół uprawniony jest w posiadaniu kluczy do wszystkich zamków. W tym celu zaś wystarczy prześledzić wzrokiem tabelę i zauważyć, że w przecięciu każdych trzech kolumn z każdym wierszem znajduje się choć jeden krzyżyk. W wersji I^{**} trzeba znaleźć "powód" tego faktu, którym jest to, że każde dwa zespoły upoważnione mają choć jeden element wspólny, a więc rozumować ogólnie: jeżeli S_i i S_j są zespołami upoważnionymi, to $S_i \cap S_j \neq \emptyset$ dla każdych i, j.

Pojęciowego rozumowania wymaga "przedłużenie" zadania,refleksja ex post nad otrzymanym rozwiązaniem, analiza wykorzystanych danych i sposobu ich wykorzystania.

Zauważamy, że w wersji I^{**} korzystaliśmy jeszcze z danych numerycznych, ale łatwo można się od tych danych uwolnić, otrzymując rozwiązanie zadania ogólniejszego. Korzystaliśmy bowiem w istocie rzeczy z następujących założeń:

1. W rodzinie zespołów uprawnionych istnieje baza zespołów uprawnionych minimalnych, podobnie w rodzinie zespołów nieupoważnionych istnieje baza zespołów maksymalnych nieuprawnionych.

2. Zespół jest uprawniony wtedy i tylko wtedy, gdy zespół dopełniający go do zespołu pełnego nie jest uprawniony.

3. Każdy zespół, w którym zawiera się zespół uprawniony, jest zespołem uprawnionym.

Warunek 1 wykorzystaliśmy w istocie rzeczy w tym celu, aby otrzymać rozwiązanie ekonomicznie optymalne, to jest takie rozwiązanie, przy którym ilość zamków jest możliwie najmniejsza. Moglibyśmy bez zmiany rozumowania zabezpieczyć mechanizm zamkami w takiej ilości, że każdemu zespołowi upoważnionemu /nie tylko minimalnemu, jak poprzednio/ przyporządkować będzie można zamek, do którego klucze otrzymają członkowie tego zespołu i tylko oni. Otrzymamy rozwiązanie także poprawne. Dane zadania tworzą więc taką strukturę matematyczną, dla której można sformułować i rozwiązać analogiczny do problemów I^{*} i I^{**} problem, nie zakładając skończoności rozważanych zbiorów i pomijając założenie 1. Aby dostrzec strukturę kryjącą się za danymi numerycznymi zadania, trzeba je ująć pojęciowo, a nie manipulacyjnie.

Rozważymy więc wersję I naszego problemu, wersję ogólniejszą, i jak nam się w tym momencie wydaje, uwzględniającą tylko istotne dla problemu dane. Oto ta wersja:

Dany jest zbiór K oraz niepusta rodzina U jego niepustych podzbiorów, spełniająca następujące warunki:

Ia $$\bigwedge_{A\subset K,\ B\subset K} A\in U \text{ i } A\subset B \Longrightarrow B\in U$$

Ib $$\bigwedge_{A\subset K} A\in U \Longleftrightarrow \bar{A}\notin U$$

/$\bar{A}$ oznacza dopełnienie zbioru A do pełnego zbioru K/.

Zakładamy także, że rozporządzamy zbiorem Z, którego moc nie jest a priori ograniczona; możemy w toku rozumowania przyjmować taką moc zbioru Z, jaka nam będzie potrzebna.

Należy wskazać takie odwzorowanie f zbioru K w zbiór P(Z), które spełnia warunek:

$$\bigwedge_{X\subset K} X\in U \Longleftrightarrow F(X) = F(K), \quad \text{gdzie} \quad F(X) = \bigcup_{x\in X} f(x).$$

Rozwiązanie: Zauważamy przede wszystkim, że jeżeli $A,B \in U$, to $A \cap B \neq \emptyset$. Gdyby bowiem było $A \cap B = \emptyset$, to byłoby też $A \subset \bar{B}$, a więc z założenia Ia $\bar{B} \in U$, co jest wobec założenia Ib sprzeczne z założeniem $B \in U$. Przyjmujemy, że moc zbioru Z jest równa mocy zbioru U, istnieje więc bijekcja g rodziny U na zbiór Z. Szukane odwzorowanie f definiujemy w sposób następujący: $x \in K \Rightarrow f(x) = \{z : \bigvee_{A \in U} g(A) = z \wedge x \notin A\}$. Oczywiście $F(K) = Z$.

Załóżmy, że $A \in U$ i $z \in Z$. Istnieje więc taki zbiór /jedyny/ B, że $B \in U$ i $g(B) = z$. Z definicji odwzorowania f wiemy, że $\bigwedge_{x \in B} z \notin f(x)$. Ale $A \cap B \neq \emptyset$, więc istnieje taki element x zbioru A, że $z \in f(x)$. Stąd $z \in F(A)$ i $Z \subset F(A)$. Ale $F(A) \subset Z = F(K)$, więc $F(A) = F(K)$.

Załóżmy, że $A \notin U$. Wtedy $\bar{A} \in U$. Przyjmijmy $z = g(\bar{A})$. Z definicji odwzorowania f i tego, że g jest bijekcją $z \in f(x) \Longleftrightarrow x \in \bar{A}$. Zatem jeżeli $x \in A$, to $z \notin f(x)$, stąd $z \notin F(A)$ i $Z \neq F(A)$.

Udowodniliśmy więc, że

$$\bigwedge_{X \subset K} X \in U \Longleftrightarrow F(X) = F(K),$$

a więc, że nasze odwzorowanie f spełnia warunki zadania.

W wersjach I^{*} i I^{**} kryterium zaliczania zespołu do rodziny zespołów uprawnionych miało charakter numeryczny. Zespoły liczące mniej osób niż wyznaczony limit nie miały uprawnienia, od tego limitu począwszy wzwyż uprawnienie miały. Z tego założenia w rozumowaniu w wersji I^{**} jeszcze korzystaliśmy, w rozumowaniu w wersji I już nie korzystaliśmy. Można by sobie wyobrazić sytuację, w której nie liczność zespołu, ale kompetencje osób występujących w zespole są decydujące. Takim przykładem może być sytuacja następująca. Każdy zespół, do którego należy osoba a, i różny od $\{a\}$, jest zespołem upoważnionym. Zespołem upoważnionym jest też zespół $K - \{a\}$. Żaden inny zespół nie ma już uprawnień. Łatwo stwierdzić, że założenia zadania I są tu spełnione, rozwiązanie ogólne podane w wersji I ma tu zastosowanie.

Zauważmy jednak, że warunek Ib - to warunek bardzo szczególny. Możemy sobie wyobrazić sytuacje konkretne, możliwe w rzeczywistości, w których ten warunek nie jest spełniony.

Oto bardzo prosty model takiej sytuacji Pełny zespół - to zespół $\{a, b, c, d\}$. Osoby a i c są specjalistami w pewnej dziedzinie, osoby b i d w innej dziedzinie. Do nadania sygnału wymagana jest zgoda co najmniej jednego specjalisty z każdej dziedziny. Upoważnione więc do nadania sygnału są zespoły zawierające choć jedną z grup: $\{a,b\}$, $\{a,d\}$, $\{b,c\}$, $\{c,d\}$. Mamy zaopatrzyć mechanizm w zamki tak, aby te i tylko te zespoły miały doń dostęp. Rozwiązanie znajdujemy manipulacyjnie w tabeli.

Oto ta tabela:

	a	b	c	d
1	x		x	
2		x		x

Jest to jedyne możliwe rozwiązanie zadania, które nazwiemy wersją II* naszego ogólnego problemu, rozwiązanie, które nie jest szczególnym przypadkiem przydziału kluczy podanego w wersji I. Założenie Ib nie jest tu spełnione, było to założenie istotne dla rozumowania zastosowanego w wersji I.

Przykład ten sugeruje nam ostatnią ogólną wersję II, w której zachowamy tylko założenie Ia. W ten sposób nasza rodzina U zbiorów uprawnionych staje się ideałem półgrupy rodziny podzbiorów zbioru K ze względu na dodawanie zbiorów. Jeżeli bowiem jest spełnione założenie Ia, to oczywiście dla każdego zbioru A rodziny U i każdego podzbioru B zbioru K suma $A \cup B$ należy do U.

Zakładamy więc tylko, że U jest niepustą rodziną niepustych podzbiorów zbioru K spełniającą warunek, że każdy nadzbiór zbioru należącego do U należy też do U. Problem formułujemy przy tym założeniu, jak w wersji I.

Rozwiązanie: Tym razem - nasuwa nam je tabela w wersji II*; zakładamy, że zbiór Z jest równoliczny z rodziną $P(K) - U$ /a więc z rodziną zespołów nieupoważnionych/. Szukane odwzorowanie f definiujemy w sposób następujący

$$x \in K \Longrightarrow f(x) = \left\{z: \bigvee_{A \in P(K) - U} z = g(A) \wedge x \notin A\right\},$$

gdzie g jest jakąkolwiek ustaloną bijekcją zbioru $P(K) - U$ na Z.

Udowodnimy, że

$$\bigwedge_{A \subset K} A \in U \Longleftrightarrow F(A) = Z$$

/F(A) w znaczeniu poprzednio ustalonym w wersji I/.

Załóżmy, że $A \in U$, oraz $z \in Z$. Istnieje więc zbiór B należący do $P(K) - U$ taki, że $z = g(B)$. Ale $A \not\subset B$, bo każdy nadzbiór zbioru A, jako należącego do U, należy do U. Istnieje więc element a należący do A i nie należący do B. Z definicji odwzorowania f wynika więc, że $z \in f(a)$, zatem także $z \in F(A)$. Udowodniliśmy, że jeżeli $A \in U$, to $Z \subset F(A)$; oczywiście też $F(A) \subset Z$, zatem $F(A) = Z$.

Załóżmy, że $A \notin U$, oraz $z = g(A)$. Z definicji odwzorowania f i z tego, że g jest bijekcją wynika, że $z \in f(x) \Longleftrightarrow x \notin A$. Stąd $z \notin F(A)$ i $F(A) \neq Z$.

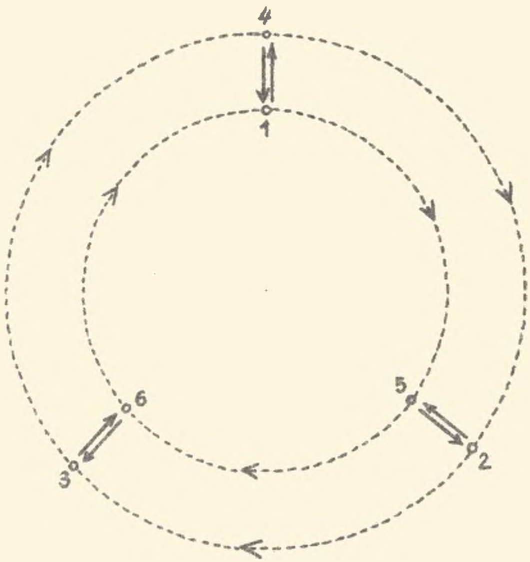
Zauważmy, że warunek Ia jest naturalnym warunkiem koniecznym w każdej konkretnej sytuacji związanej z naszym problemem "rozdawania kluczy". Dołączając do zespołu upoważnionego inne jeszcze osoby, otrzymujemy zespół także upoważniony do nadania sygnału. Każdy zespół,w którym wyróżniamy sensownie z punktu widzenia praktycznego zespoły upoważnione do nadania sygnału, niezależnie od kryteriów tego wyróżnienia, ma taką strukturę, że rodzina zespołów upoważnionych jest ideałem półgrupy rodziny podzbiorów pełnego zespołu ze względu na sumę mnogościową. Zawsze więc można - jeżeli tylko rozporządzamy takim zbiorem zamków, jaki tylko nam będzie potrzebny - zaopatrzyć mechanizm w zamki i tak przydzielić klucze do zamków osobom pełnego zespołu, że zespoły uprawnione i tylko te zespoły rozporządzają pełnym kompletem kluczy, a więc zespoły upoważnione i tylko te zespoły mają dostęp do mechanizmu. Rozwiązanie ogólne podaliśmy w wersji II, w szczególnych przypadkach można je oczywiście uprościć. W praktyce mamy do czynienia tylko ze zbiorami skończonymi, istnieje więc wtedy baza minimalnych uprawnionych zbiorów i baza maksymalnych zbiorów nieuprawnionych, można więc w rozumowaniu w wersji II zastąpić rodzinę $P(K) - U$ rodziną maksymalnych zbiorów nieuprawnionych, jak to zrobiliśmy rozwiązując zadanie II^{**}. Wtedy także nasze rozwiązanie ogólne jest tym samym rozwiązaniem, które otrzymaliśmy w wersjach I^{*} i I^{**}.

Przedstawiłam dokładnie całą tę drogę, aby zilustrować rolę przykładów stanowiących konkretne i skończone modele struktury, której dotyczy rozwiązywany problem w ukierunkowaniu myślenia osoby poszukującej rozwiązania. Zauważamy, że takie modele z jednej strony pomagają w znalezieniu drogi prowadzącej do rozwiązania, z drugiej mogą hamować wybór drogi najprostszej, prowadzącej do rozwiązania bardziej ogólnego. Tak więc zadanie I^{*} od razu nasunęło plan rozwiązania zadania I^{**}, to z kolei - po analizie ex post jego rozwiązania - nasunęło pomysł uogólnienia. Równocześnie jednak szczególne, numeryczne dane zadań I^{*} i I^{**} - mimo, że w wersji I uwolniliśmy się od nich - uwarunkowały to uogólnienie. Uznaliśmy za istotne założenie, które było potrzebne przy szczególnym sposobie rozumowania, imitującym manipulację w pierwszej tabeli. Drugi przykład skończonego i konkretnego modelu struktury, która nam się ostatecznie ujawniła w wersji II, znowu odegrał rolę pozytywną, sugerując ostateczne uogólnienie zarówno problemu jak i jego rozwiązania. Dostrzegliśmy prostotę struktury określonej danymi i proste rozwiązanie, którego nie widzieliśmy na początku. Bardziej zaawansowany w myślenie algebraicznymi strukturami matematyk dostrzegłby to być może od razu, ale z dydaktycznego punktu widzenia, nie o takim poziomie matematycznych doświadczeń myślimy, badając rolę skończonych i konkretnych modeli struktur matematycznych w toku rozwiązywania matematycznych problemów.

4. Analiza przykładów w omawianych w bardzo interesującej książce poświęconej zastosowaniom modeli skończonych w nauczaniu na stopniu podstawowym, cytowanej na stronie 46, ujawnia te formy myślenia, które roz-

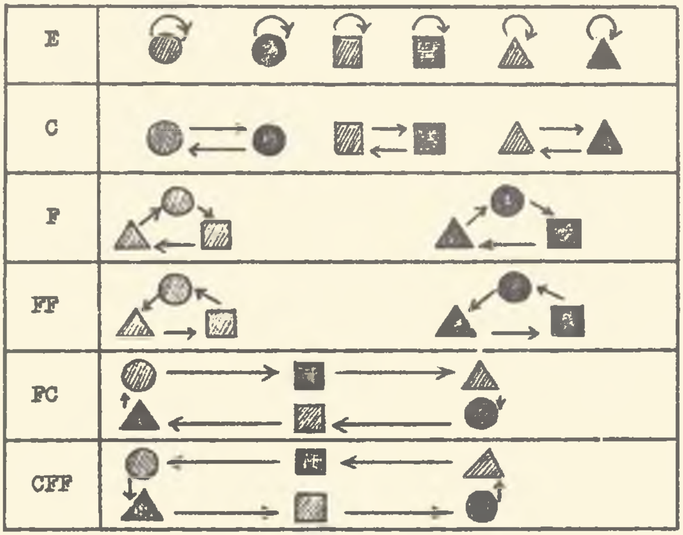
wija szczególnie rozwiązywanie problemów na temat skończonych matematycznych struktur na przykładach ich konkretnych modeli. Rozważymy jeden z najprostszych przykładów podanych w tej książce.

Uczeń /autor myśli tu o uczniu w wieku 7-10 lat/ rozporządza sześcioma klockami trzech kształtów /koło, kwadrat, trójkąt/; każdy kształt występuje w dwóch kolorach. Definiuje się dwa operatory działające na tym zbiorze, Operator C zmienia kolor klocka, nie zmieniając jego kształtu, operator F zmienia kształt, koło na kwadrat, kwadrat na trójkąt, krójkąt na koło, nie zmieniając koloru. Uczniowie w toku konkretnych manipulacji tym materiałem składają w różnych kombinacjach te operatory i mają za zadanie wykryć złożenia "dające to samo", i ustalić ostatecznie zbiór transformacji danego zbioru klocków generowany przez te dwa operatory. Pierwszy problem, który się nasuwa w toku tych czasochłonnych manipulacji, to problem natury technicznej, problem dobrej organizacji tych czynności. Uczniowie otrzymują planszę przedstawioną na rysunku 3.



Rys. 3

Ustawiają kolejno klocki na pozycji 1 i badają, notując wyniki w tabeli, wszystkie transformacje, które prowadzą od pozycji 1 do pozycji 1, od 1 do 2 itd. od 1 do 6. Taką manipulację wykonują z każdym z sześciu klocków, stwierdzając ostatecznie, że istnieje tylko sześć "różnych łańcuchów". Każdy inny łańcuch daje w efekcie to samo, co jeden z tych sześciu łańcuchów, żadnego z tych sześciu łańcuchów nie można zastąpić innym łańcuchem spośród tych sześciu. W toku tego badania nasuwa się nowy techniczny problem dogodnego zapisania tych łańcuchów i ich dogodnego graficznego przedstawienia. Pojawia się zapis ciągu łańcuchów wykrytych jako różne w toku manipulacji: E, C, F, FF, FC, CFF, gdzie E oznacza identyczność /powrót do wyjściowego klocka/. Pojawia się także tabela przedstawiona na rysunku 4, to jest tabela grafów każdej z tych bijekcji zbioru klocków na ten sam zbiór.



Rys. 4

Sporządzenie tej tabeli umożliwia już manipulacje innego niż poprzednio rodzaju, manipulacje na grafie. Uczniowie otrzymują zadanie wyznaczenia wszystkich łańcuchów, które można zastąpić przez łańcuchy tworzone z jednej tylko bijekcji wymienionej w tabeli. Znajdują kolejno:

$C,\ C^2 = E,$

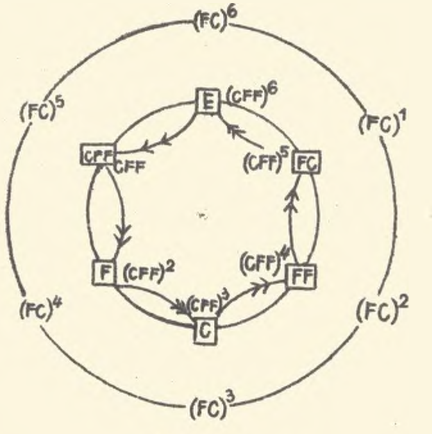
$F,\ F^2,\ F^3 = E,$

$FF,\ (FF)^2 = F,\ (FF)^3 = E$

$FC,\ (FC)^2 = FF,\ (FC)^3 = C,\ (FC)^4 = F,\ (FC)^5 = CFF,\ (FC)^6 = E,$

$CFF,\ (CFF)^2 = F,\ (CFF)^3 = C,\ (CFF)^4 = FF,\ (CFF)^5 = FC,\ (CFF)^6 = E.$

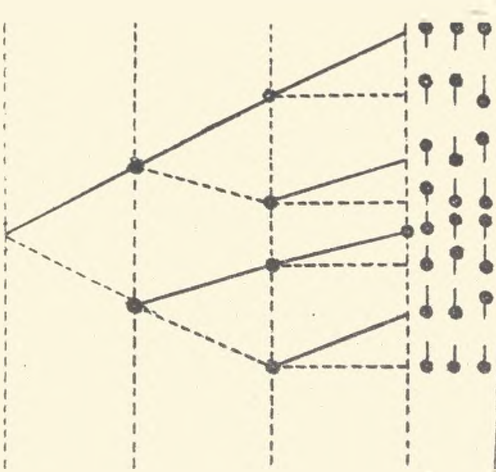
To zestawienie uświadamia uczniom, że każdy łańcuch spośród sześciu rozważanych łańcuchów można zastąpić łańcuchem złożonym tylko z bijekcji FC lub łańcuchem złożonym tylko z bijekcji CFF. Przedstawia się ten rezultat na grafie kołowym /rysunek 5/. Jest to graf ujmujący strukturę grupy cyklicznej wszystkich bijekcji zbioru sześciu klocków na ten zbiór, generowany przez dane na wstępie operatory.



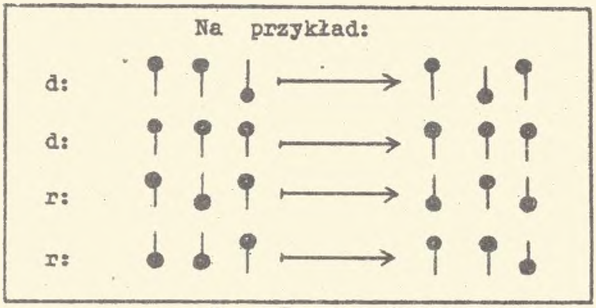
Rys. 5

Te nazwy nie są jeszcze uczniom przyswajane. Nie wprowadza się jeszcze tu pojęcia grupy, uczniowie w toku manipulacji oswajają się jednak z podstawowymi ideami, które będą potem podstawą dalszej matematyzacji tej zabawy.

Do tej matematyzacji zmierza się przez następny etap. Uczniowie ustawiają obok siebie trzy zapałki, przy czym każdą zapałkę można ustawić główką do góry lub na dół. Po poszukiwaniu empirycznym, mającym na celu zbadanie, ile jest takich możliwych ustawień trzech zapałek, notuje się wyniki w postaci drzewa przedstawionego na rysunku 6. Otrzymuje się zbiór sześciu "stanów". Na tym zbiorze definiuje się dwa operatory. Operator d przesuwa lewą zapałkę na prawy koniec trójki bez obracania zapałki. Operater r obraca każdą zapałkę /rysunek 7/. Podobne, jak w poprzednim zadaniu postępowanie manipulacyjne, ale bardziej skomplikowane, prowadzi ostatecznie do wyróżnienia tylko sześciu różnych łańcuchów, utworzonych przez składanie operatorów d i r, mianowicie do zbioru e, d, d^2, r, rd, rd^2 gdzie e oznacza identyczność w danym zbiorze stanów.



Rys. 6



Rys. 7

Teraz następuje moment, do którego autor przywiązuje - i słusznie - szczególne znaczenie dydaktyczne. Uczniowie porównują dane obu zadań i otrzymane rezultaty. Nasuwa się analogia między zbiorem bijekcji zbioru klocków na ten sam zbiór, bijekcji generowanych przez operatory C i F, oraz zbioru bijekcji zbioru stanów zapałek, bijekcji generowanych przez operatory d i r. Uczniowie ustalają słownik

$$E \longleftrightarrow e$$
$$F \longleftrightarrow d$$
$$F^2 \longleftrightarrow d^2$$
$$CF \longleftrightarrow rd$$
$$CF^2 \longleftrightarrow rd^2$$
$$C \longleftrightarrow r$$

który wyraża tę analogię. Konstruuje się tabelę składania parami bijekcji pierwszego zbioru i tabelę składania parami bijekcji drugiego zbioru. Uczniowie stwierdzają zupełne podobieństwo tych tabel, jedna tabela przechodzi w drugą po zastosowaniu przyjętego słownika. Teraz dopiero w myśli ucznia zarysowuje się coś, co jest ukryte w tych tabelach, struktura.

Jak widzimy, oparte na manipulacjach w konkretnych, skończonych modelach pewnej struktury /tu grupa cykliczna rzędu sześć/ badanie, kierowane zresztą mocno krok za krokiem przez nauczyciela, staje się poligonem bardzo bogatych i instruktywnych matematycznie doświadczeń ucznia. Kształci ono przede wszystkim następujące formy aktywności matematycznej, nie tylko zresztą matematycznej: 1. ekonomiczne organizowanie manipulacji, często bardzo trudne, i systematyczne realizowanie planu postępowania, 2. konstruowanie różnych schematów, ułatwiających manipulacje i planowe zapisywanie uzyskiwanych częściowych rezultatów, 3. wybór oznaczeń i symboliki i sprawne posługiwanie się przyjętym kodem,

4. wnikliwe obserwowanie sytuacji, wysnuwanie wniosków z tej obserwacji, w szczególności dostrzeganie strukturalnej analogii i konstruowanie "słownika" wyrażającego istnienie wspólnej struktury w różnych jej modelach.

Oczywiście praca ucznia wykonana na modelu skończonym i konkretnym przy pomocy manipulacji ma jeszcze inne walory, związane z treścią nauczania /przygotowanie do ujęcia podstawowych matematycznych abstrakcyjnych struktur/, różne walory związane z motywacją i zainteresowaniami ucznia w pewnym wieku /uczniowie lubią manipulacje/, ale tu się tym nie zajmujemy, chodzi nam bowiem tylko o formy aktywności matematycznej ucznia rozwijane w toku manipulacyjnego badania modelu struktury. Z tego punktu widzenia możemy też zauważyć, jakich form tego rodzaju aktywność ucznia nie rozwija, lub rozwija tylko w małym stopniu. Nie występują tu lub występują tylko w bardzo prostych wersjach elementy rozumowania pojęciowego. Rozumowanie ucznia opiera się przede wszystkim na bezpośredniej obserwacji własności elementów zbiorów; ta sytuacja stwarza w małym stopniu okazję najprostszych choćby inferencji typu: "Wiem, że dla każdego elementu x zbioru A, jeżeli x spełnia warunek w_1, to x spełnia też warunek w_2; wiem też, że a jest elementem zbioru A i a spełnia warunek w_1. Wobec tego mogę być pewny, że a spełnia warunek w_2 i w dalszym rozumowaniu będę się już na tej wiadomości opierać".

Oczywiście problemy dotyczące skończonych, konkretnych modeli matematycznych struktur, nie wykluczają takich pojęciowych rozumowań. Wiadomo, że te problemy bywają bardzo trudne i wymagają stosowania różnych skomplikowanych strategii i rozumowań pojęciowych. W sytuacjach dydaktycznych jednak kładzie się właśnie nacisk na manipulacyjną aktywność ucznia. Zwykle zresztą nie stawia się ucznia przed problemami otwartymi zupełnie. Takie sytuacje mogą oczywiście wystąpić nawet w prostych przypadkach, na przykład w związku z poszukiwaniem i stosowaniem "słownika", ale w przypadkach rzeczywiście interesujących trudności przekraczają w tym zakresie możliwości mającego małe matematyczne doświadczenie ucznia. Trzeba także wziąć pod uwagę, że manipulacyjne badania prowadzone przez ucznia z możliwie dużym marginesem koniecznej swobody wymagają czasu, którym na ogół w nauczaniu nie rozporządza się bez ograniczeń.

Autor książki, której fragment omówiliśmy, stwierdza w jej zakończeniu "Manipulacje /obserwacja i doświadczenie/ stanowią pierwszy etap tego, co potocznie nazywa się "abstrahowaniem". Trzeba więc zwrócić szczególną uwagę na czynności szyfrowania i rozszyfrowywania; dobre zakodowanie sytuacji skonstruowane i przyjęte przez ucznia może być źródłem nowych wzbogacających go rodzajów aktywności"[5].

---

[5] Op. cit., s. 157.

Ta uwaga ma głęboki sens dydaktyczny. Praca dziecka w toku manipulacyjnego rozwiązywania zadań dotyczących skończonych, konkretnych modeli matematycznych struktur może mieć ogromne znaczenie dla rozwoju jego matematycznej myśli /i nie tylko matematycznej/, jeżeli jednak będzie się ją organizować w perspektywie wyrażonej w cytowanej uwadze, jeżeli już w toku tej pracy występować będą pewne elementy rozumowania pojęciowego, które jest podstawą wszelkiej intelektualnej działalności człowieka. Zbyt długie i jednostronne przyzwyczajanie ucznia do manipulacyjnego rozstrzygania zagadnień, może być nawet szkodliwe, podobnie, jak zbyt jednostronne przyzwyczajanie ucznia na przykład w nauczaniu geometrii do ilustrowania każdej sytuacji na modelach materialnych. Manipulacje w rodzaju tych, których przykłady podaliśmy, uczą dziecko wypracowywania własnych strategii i ekonomicznej organizacji pracy. Ale najbardziej ekonomiczną formą pracy umysłowej jest rozumowanie pojęciowe i tego trzeba od początku uczyć.

Przejście od rozumowania manipulacyjnego do rozumowania pojęciowego jest więc ważnym problemem dydaktycznym. Temu zagadnieniu poświęcimy jeszcze dwa przykłady, zaczerpnięte z polskiej praktyki szkolnej i konkretnie obserwowane w klasie. Przykłady te dotyczą zagadnień o wiele prostszych i o wiele bardziej tradycyjnych niż poprzednio cytowane, niemniej bardzo wyraźnie ujawniają, co w istocie rzeczy w problemie "przejścia", o którym mówimy, chodzi.

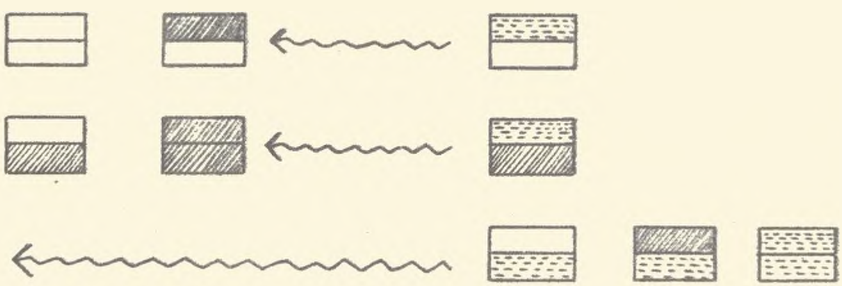
Uczniowie klasy piątej zapoznali się z poglądowo zdefiniowanym dodawaniem "zegarowym" w zbiorze liczb naturalnych od 1 do 12, przy czym definicję związano z manipulacjami wskazówką zegara. Dodać "zegarowo" liczbę a naszego zbioru do liczby b naszego zbioru, to znaczy odpowiedzieć na pytanie, która to będzie godzina po upływie b godzin od godziny a, inaczej wyznaczyć liczbę wskazaną na tarczy zegara przez wskazówkę, którą zaczynając od pozycji a obróciliśmy o $\frac{b}{12}$ kąta pełnego w kierunku zwykłego obrotu wskazówek zegara. Uczniowie zaczynają od materialnej manipulacji, następnie dodają "zegarowo" już sprawnie liczby danego zbioru i sporządzają tabelę dodawania. Zauważmy, że definicja nie jest symetryczna ze względu na a i b /a jest liczbą - stanem, b - liczbą operatorem/, zatem dodawanie "zegarowe" nie jest a priori z definicji przemienne. Uczniowie mają zbadać wszystkie własności tego działania. Pierwszy naturalny etap - to obserwacja tabeli dodawania "zegarowego". Konkretna analiza tej tabeli pozwala uczniom stwierdzić, że dodawanie "zegarowe" jest przemienne i że jego modułem jest liczba 12, że do każdej liczby istnieje liczba przeciwna ze względu na dodawanie zegarowe. O tym się można było jeszcze empirycznie przekonać, wystarczyło się dobrze przyjrzeć tabeli. Ale ta metoda praktycznie zawodzi, gdy trzeba rozstrzygnąć, czy dodawanie zegarowe jest łączne. Jedyna możliwość

– to rozumowanie oparte na uświadomieniu sobie, że suma zegarowa $(a \oplus b) \oplus c$ może różnić się od sumy "zwykłej" $(a + b) + c$ tylko o naturalną wielokrotność liczby 12, i podobnie, że suma "zegarowa" $a \oplus (b \oplus c)$ może różnić się od sumy "zwykłej" $a + (b + c)$ też tylko o naturalną wielokrotność 12, skąd ze względu na łączność sumy "zwykłej" i poglądowe określenie "zegarowego" dodawania, uczniowie otrzymają poprawny wniosek. Zauważmy, że choć uczeń będzie się tu jeszcze w wyobraźni odwoływał do zegara – nie rozporządza bowiem takim środkiem jak rachunek kongruencji – jego rozumowanie będzie niemniej na takim rachunku oparte. W istocie rzeczy udowodni, że dodawanie modulo n jest łączne dla dowolnego n /wystarczy bowiem tylko uzmiennić stałą 12 w jego rozumowaniu, aby to udowodnić/, bo to rozumowanie miało charakter pojęciowy, w przeciwieństwie do empirycznego poszukiwania odpowiedzi na pytanie, czy dodawanie zegarowe jest przemienne. Teraz także własność przemienności nabiera innego sensu, bo wyjaśniono "powód" tego, co przedtem zauważono, stwierdzając symetryczność tabeli. Motywacją dla przejścia od jednego do drugiego sposobu myślenia jest konieczność zastosowania innego niż manipulacja, obserwacja i badanie empiryczne sposobu poszukiwania odpowiedzi na postawione pytanie.

Siedmioletnie dziecko rozwiązuje zadanie: ile dwupiętrowych domków możesz zbudować z klocków czerwonych i niebieskich, kładąc na jednym klocku /parter/ drugi klocek /piętro/. Nie możesz mieć dwóch domków, które mają jednakowo pomalowane partery i piętra.

Naturalna droga, to konkretne budowanie domków z klocków, odpowiedź na postawione pytanie jest rezultatem manipulacji i obserwacji. Jeżeli dziecku nie damy klocków, może ono rozwiązać zadanie manipulując na ich zastępnikach symbolicznych /rysunek, litery, drzewa itp., rys. 7 a, b, c lewa strona/. Niezależnie jednak od tego, jakimi przedmiotami są te zastępniki,

a/

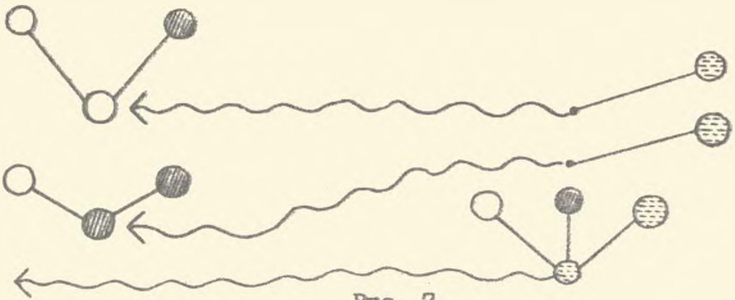


b/ cc cn ← cz

nc nn ← nz

← zc zn zz

c/



Rys. 7

jest to metoda wyczerpywania wszystkich możliwości przez kolejne manipulacje. Jeżeli sformułujemy podobny problem, dopuszczając trzy kolory dla dwupiętrowych domków, to dziecko może zastosować tę samą metodę. Może jednak też już tylko przedłużyć swoje poprzednie rozwiązanie, tak, jak to pokazuje prawa strona rysunku 7, co już jest zaczątkiem rozumowania pojęciowego, bo rekurencyjnego. Jeżeli jednak zaproponujemy rozwiązanie podobnego zadania dla dziewięciu kolorów, postępowanie manipulacyjne okaże się zbyt uciążliwe /za dużo przypadków/, rekurencja zbyt "rozciągnięta", trzeba więc sobie radzić inaczej. Jak to obliczyć bez układania klocków i bez rysowania drzewek? Na ile kolorów można pomalować parter? Na dziewięć. Na ile kolorów można pomalować piętro, gdy parter jest już pomalowany? Na dziewięć. Zatem wszystkich możliwości jest $9 \cdot 9 = 81$. To jest już zupełnie inny proces myślenia niż manipulacja, nawet manipulacja z zastosowaniem kodu literowego. To jest ujęcie czysto pojęciowe, mimo że oparte na operacjach numerycznych. Wystarczy uzmiennić, jak w poprzednim przypadku badania tabeli dodawania zegarowego, stałą 9, aby otrzymać rozwiązanie ogólne, powtarzając formalnie rozumowanie przeprowadzone dla dziewięciu kolorów. To uogólnienie nie może być jeszcze na najniższym poziomie matematycznych doświadczeń dziecka sformułowane wzorem literowym, ale zostało ono już w myśli dziecka dokonane bez tej formalizacji. Nasz mały uczeń odpowiada poprawnie i wyjaśnia swą odpowiedź ze zrozumieniem, gdy mu dajemy analogiczne pytanie ze zmianą ilości kolorów.

Przykłady zadań "o rozdawaniu kluczy", o "dodawaniu zegarowym", o "malowaniu domków" ilustrują różne "stopnie skończoności zbiorów" istniejące dla osób rozwiązujących zadania odnoszące się do skończonych modeli. Matematyka dzieli zbiory na skończone i nieskończone. Psychologicznie i z punktu widzenia praktyki zbiory skończone dzielą się na takie, w których jest jeszcze możliwa praktycznie manipulacja za pomocą konkretnych czynności wykonywanych na materialnych przedmiotach, czy ich graficznych lub innych zastępnikach i takie, gdzie taka manipulacja byłaby bardzo trudna, czasochłonna dla człowieka. Może ją wykonać maszyna. Człowiek musi sobie w takich przypadkach radzić pojęciowym ujęciem.

Jeżeli ucznia zapytamy, ile ma przekątnych pięciokąt, może wykonać rysunek i przekątne policzyć. Jeżeli zapytamy, ile przekątnych ma wielokąt o stu bokach, musi szukać odpowiedzi na innej drodze.Ta droga nie różni się istotnie od tej, na której szukałby on odpowiedzi na postawione pytanie o przekątne n-kąta. Ale dla jedenastoletniego ucznia pytanie o przekątne stukąta różni się od obu pozostałych pytań. Zmusza go ono do zastosowania strategii pojęciowej tak bardzo różnej od strategii manipulacji, choć mogącej być wynikiem interioryzacji tej ostatniej, ale zawiera element konkretności, którego nie ma już pytanie o przekątne n-kąta. Skończony model z danymi numerycznymi, ale tak dużymi, że manipulacja jest już niemożliwa, może stanowić pomost między myśleniem opartym na obserwacji i postępowaniu empirycznym a rozumowaniem czysto pojęciowym.

Problemy dyskretne, numeryczne, problemy odnoszące się do skończonych struktur stanowią dziś bardzo ważną część matematycznej problematyki. Znaczenie tej problematyki stale wzrasta ze względu na rolę skończonych struktur w zastosowaniach matematyki, ze względu na rozszerzającą się interwencję maszyn matematycznych w rozwiązywaniu zagadnień z różnych dziedzin. Z tego punktu widzenia naiwne jeszcze, manipulacyjne metody rozwiązywania takich zadań przez młodszych uczniów i bardziej subtelne, bardziej skomplikowane, dostępne już starszym uczniom, strategie badania skończonych modeli matematycznych struktur i stosowania takich modeli powinny się dziś znaleźć w centrum uwagi dydaktyków matematyki. Chodzi jednak o to, by od początku rozwijać także strategie i metody pojęciowe, dobierając odpowiednio zadania, "przedłużając" zadania już rozwiązane manipulacyjnie, uzmienniając stałe numeryczne, zmieniając "stopień skończoności" rozważanych zbiorów.

W cytowanym na stronie 2 artykule W. Gnedenko protestuje przeciw zubożaniu matematycznego myślenia uczniów, wynikającego z jednostronności metodologicznej stawianych mu zadań. O tym trzeba pamiętać przy tak modnym obecnie w dydaktyce matematyki zwrocie do "ministruktur", to jest do zadań związanych z modelami skończonych matematycznych struktur, które uczeń może rozwiązywać manipulacyjnie.

Zofia Krygowska

PEDAGOGICAL ROLE OF FINITE AND CONCRETE MODEL OF MATHEMATICAL STRUCTURES

In the article a finite and concrete model of a mathematical structure is called a system of sets and relations defined on those sets, being a model for the given structure and such that cardinal numbers of those sets are presented to the student by means of figures and are practically "small", while the relations are defined in a way enabling him to solve problems connected with structural properties of the model by direct manipulations with elements of the sets or their subsets, which makes him step by step conscious of the structure. Modern didactics of mathematics emphasizes more and more such models as means of transition from the concrete to the abstract, natural for the student, /algebraic and order structures, combinatorics, combinatorial topology, metric spaces etc./. The role of such models, in opinion of didacticians advocating their use in teaching, consists in that the student can reason quite precisely, perform investigation and, in particular, prove theorems by concrete, manipulative exhaustion of finite and accessible for manipulations number of cases, without necessity to deal with abstract conceptual classes and general inferences. But it is the lack of this necessity that arouses reservation, for it limits forms of student's mathematical thinking and often keeps them on the stage of purely empirical investigation.

On the grounds of some typical examples, forms of student's activities both those that are being developed in the course of his exploration of a finite and concrete model and those that are not, are discussed in the article. Also the heuristic role of such a model in finding solution of a more general problem is presented, as well as the role of models for transition from the concrete to the abstract, such that although finite are of such a great cardinal number that "manipulative" investigation is no longer possible for the student and naturally suggests the necessity of conceptual thinking using general inferencies. In particular the method of generalisation by variation of constants, natural for the student, is discussed. The article includes some didactic implications, in particular it emphasizes the general principle, often passed by in evaluation of a didactic experiment that consists in veryfying new means of transition to mathematical abstraction, namely the following principle: all such means should be investigated not only in view of their advantages but also in view of what they cannot give or of what is lost by using them.

Зофия Крыговска

УЧЕБНАЯ РОЛЬ КОНЕЧНЫХ И КОНКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Термин "конечная и конкретная модель математической структуры" понимается автором как система множеств и реляций, касающихся этих множеств, которая является моделью данной структуры, причем кардинальные числа множеств даются учащимся нумерично и являются практически "малыми", а реляции определены таким образом, что учащийся способен,непосредственно манипулируя элементами этих множеств или подмножеств, или же их символами, решать задачи,связанные со структурными особенностями модели, постепенно осознавая ее структуру. Современная методика обучения математике все в большей степени выдвигает такие модели в качестве средств естественного для учащихся перехода от конкретного к абстрактному /алгебраические и порядковые структуры, комбинаторика, комбинаторическая топология, метрика и т. п./. Роль таких моделей, согласно методистам, пропагандирующим их применение в учебном процессе, состоит в том, что учащийся способен рассуждать точно, проводить исследования, в частности доказывать теоремы, исчерпывая манипуляционным способом все случаи в конечном и доступном манипуляции количестве, без необходимости оперирования абстрактными понятийными классами и общими инференциями. Отсутствие этой необходимости вызывает однако некоторые опасения, так как ограничивает формы математического мышления учащегося и сводит их к уровню эмпирического исследования.

В статье - на основании анализа нескольких типичных примеров- рассматриваются формы активности, развиваемые и не развиваемые исследованием учащихся конечной и конкретной модели. Обсуждается также учебная роль такой модели в поисках решения более общей задачи и роль,какую играют в переходе от конкретного к абстрактному конечные модели, имеющие столь крупные кардинальные числа, что "манипуляционное" исследование учащимися невозможно и возникает естественная необходимость понятийного рассуждения с применением общих инференций. В частности в статье рассматривается метод обобщения путем естественного для учащегося варьирования констант. В статье содержатся некоторые дидактические выводы; в частности подчеркивается общий принцип, зачастую игнорируемый в оценке результатов учебного эксперимента, заключающегося в верификации новых средств перехода к математическому абстрагированию, а именно принцип что любое средство должно исследоваться не только с точки зрения того, что оно дает, но и с точки зрения того, что оно дать не может и что утрачивается в результате его применения.