ROCZNIK NAUKOWO–DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE

Zeszyt 54 Prace z dydaktyki matematyki Rok 1974

Gustaw Treliński

ORGANIZACJA ĆWICZEŃ Z ANALIZY MATEMATYCZNEJ OPARTA NA PROGRAMOWANIU INDYWIDUALNEGO PRZYGOTOWANIA STUDENTA DO TYCH ĆWICZEŃ

1. Wstęp

Badania dotyczące niepowodzeń studentów na I roku studiów pokazują, że odpad i odsiew jest spowodowany w dużej mierze nie tylko niedostatecznym przygotowaniem merytorycznym wyniesionym ze szkoły średniej, ale także trudnościami tzw. "progu dydaktycznego", występującego przy przechodzeniu od metod nauczania w szkole średniej do studiowania w szkole wyższej oraz "progu wychowawczego", objawiającego się wchodzeniem w nowe warunki życia i pracy. Podkreśla się przy tym, że system selekcji i rekrutacji kandydatów na I rok studiów ma niemały wpływ na przebieg i powodzenie na studiach.

Masowy zasięg szkolnictwa w Polsce wymaga ogromnej wysoko wyspecjalizowanej kadry nauczycieli. Musimy kształcić szerokie ich rzesze niezależnie od dobrej czy słabej jakościowo rekrutacji. Ta rekrutacja na nauczycielski kierunek matematyki była w ciągu wielu lat z wielu przyczyn ilościowo i jakościowo bardzo niezadowalająca. Powstała potrzeba ulepszenia metod selekcji oraz zbadania, czy jest możliwe zniwelowanie "progu", uzupełnienie braków merytorycznych i tym samym zmniejszenie dość wysokiego /w latach poprzedzających moje badania odpad i odsiew wynosił około 35%/ odpadu i odsiewu na I roku przez zastosowanie odpowiednich zabiegów dydaktycznych. Chodziło przede wszystkim, w tym niekorzystnym dla rekrutacji do zawodu nauczyciela matematyki okresie, o uratowanie dla polskiej szkoły jednostek, które mimo słabego startu miały szanse przy odpowiedniej opiece przezwyciężyć początkowe trudności i ukończyć w normalnym czasie studia. Przy tradycyjnej metodyce pracy ze studentami pierwszego roku takie jednostki, często przygotowane źle w szkole średniej, ale nie pozbawione wystarczających zdolności i matematycznych i pedagogicznych, musiały szybko ze studiów rezygnować, a w szkołach średnich ciągle było za mało kwalifikowanych nauczycieli matematyki.

W roku 1968 przeprowadzono w WSP w Krakowie egzamin wstępny w sposób eksperymentalny; eksperyment ten zastosowano także w latach następnych. Egzamin trwał 9 dni i obejmował materiał przewidziany programem matematyki i fizyki w szkole średniej oraz dodatkowo wiadomości z matematyki, nie objęte tym programem, którym poświęcono w ciągu tych 9 dni wykłady i ćwiczenia /prowadzono je na poziomie szkoły wyższej/. Zajęcia z matematyki i fizyki "szkolnej" prowadzono w formie tradycyjnych ćwiczeń, sprawdzając wiadomości i uzdolnienia kandydatów na wcześniej opanowanym materiale; zajęcia z matematyki "pozaszkolnej" sprawdzały przede wszystkim uzdolnienia na nowym materiale. W trakcie egzaminu przeprowadzono także tradycyjny egzamin pisemny. Egzamin eksperymentalny stworzył możliwość - w stopniu większym niż egzamin tradycyjny - eliminacji kandydatów, którzy nie wykazywali dostatecznych uzdolnień matematycznych. Niestety, bardzo słabej rekrutacji nie mogła w sposób decydujący "naprawić" nawet tak wnikliwa selekcja.

Od czasu przeprowadzenia eksperymentu sytuacja zmieniła się na lepsze zarówno ze względu na reformę programu matematyki w szkole średniej, jak i ze względu na stale polepszającą się rekrutację na kierunek matematyki w WSP. Niemniej problem progu dydaktycznego i wychowawczego na I roku studiów pozostaje w dalszym ciągu aktualny; ciągle jeszcze start młodzieży na studia nie jest wyrównany, ponieważ są ogromne różnice między poziomami nauczania matematyki w szkołach średnich.

Pierwszy semestr studiów powinien być w dużej mierze semestrem selekcyjnym. Trzeba jednak sprecyzować, na czym ma ta selekcja polegać. Według jednej koncepcji ma być to semestr szczególnie "twardy", a więc ukierunkowany tylko na eliminację; natomiast w koncepcji, która znajdowała się u podstaw mych badań, w okresie selekcji powinno nastąpić zniwelowanie różnic startu przez odpowiednią metodykę pracy ze studentami w tym okresie. Ci, dla których pomoc w pokonaniu progu okazuje się niewystarczająca, muszą ze studiów matematycznych zrezygnować. Ci zaś, którzy dzięki tej pomocy pokonają pierwsze trudności, mają szansę dalszego studiowania z pozytywnym wynikiem. Sądzę więc, że problem takiej pomocy jest nadal aktualny i jedną z jej możliwych i wyeksperymentowanych form przedstawiam w tym artykule.

Rozprawa ta, jak już zaznaczyłem, jest rezultatem poszukiwania takiej formy pracy ze studentami I roku, która ułatwiłaby im, w tym okresie aklimatyzację w szkole wyższej, wpłynęła na obniżenie odpadu i odsiewu przez stworzenie możliwości pokonania trudności, z jakimi spotyka się młodzież I roku studiów matematycznych. Celem badań było wypracowanie tej formy pracy ze studentami I roku oraz pierwsza weryfikacja jej przydatności w praktyce.

2. Scharakteryzowanie eksperymentowanej formy organizacji zajęć

Badania eksperymentalne przeprowadzono w latach 1967/68 /badania wstępne/, 1968/69 /eksperyment właściwy/ na I roku matematyki WSP w Krakowie w ramach ćwiczeń z analizy matematycznej.

Eksperymentowana forma prowadzenia zajęć z analizy matematycznej stanowi próbę syntezy różnych metod nauczania; wykorzystuje się w niej wszystkie walory kierującej funkcji nauczyciela i indywidualnej pracy studenta. Polega ona na:

1° systematycznym, planowym organizowaniu pracy indywidualnej studentów przy pomocy odpowiednio dla nich opracowanych materiałów, które w dalszym ciągu będę nazywał "Programem",

2° prowadzeniu ćwiczeń audytoryjnych metodą dyskusyjną, bez oceny odpowiedzi ustnych studentów,

3° pisemnej okresowej kontroli z oceną wyników nauczania.

Pierwsze zapoznanie się studenta z danym fragmentem teorii następowało na wykładzie. Po otrzymaniu części "Programu", odnoszącej się do omawianej na wykładzie partii materiału, student rozpoczynał pracę - już poza zajęciami - z "Programem". Na wstępie powinien był on przypomnieć sobie te wiadomości z wykładu, względnie z zalecanej lektury /konstrukcja materiałów tego wymagała/, które będzie indywidualnie opracowywał. Po wykorzystaniu "Programu" student, jeżeli chciał lub uważał za potrzebne, rozwiązywał dodatkowe ćwiczenia umieszczone w omawianych materiałach.

Dalszy etap pracy nad przyswojeniem materiału następował na najbliższych ćwiczeniach audytoryjnych. Na ćwiczeniach tych dyskutowano nad problemami związanymi z opracowanym materiałem, rozwiązywano trudniejsze zadania z "Programu", wyjaśniano na życzenie studentów pewne zagadnienia oraz rozwiązywano nowe problemy formułowane często przez samych studentów.

Po ćwiczeniach audytoryjnych student miał możliwość ponownego przejrzenia danej partii materiału, usunięcia ewentualnych luk w wiadomościach, rozwiązania dodatkowych zadań, względnie teoretycznego pogłębienia wiadomości z wykorzystaniem dodatkowej literatury.

Cały ten cykl przygotowań kończyło zadanie kontrolne pisane pod ścisłym dozorem w ramach ćwiczeń. Omówienie i poprawa zadania kontrolnego następowała na następnych ćwiczeniach audytoryjnych.

Eksperymentowana forma organizowania zajęć jest więc połączeniem nauczania programowanego, nauczania podającego, nauczania problemowego, pracy z podręcznikiem oraz metody dyskusyjnej.

Teksty będące podstawą samodzielnej pracy studentów przypominają w formie zewnętrznej podręcznik programowany. Materiał zawarty w "Programie" jest rozłożony na ciąg powiązanych ze sobą logicznie, merytorycznie i dydaktycznie, w większości dość obszernych, porcji /kadrów/ informacji; każda informacja kończy się pytaniem, na które student ma odpowiedzieć, lub zawiera lukę, którą ma uzupełnić. Materiału "zaprogramowanego" nie poddano drobiazgowej atomizacji z następujących powodów: student z większością wiadomości zapoznaje się już na wykładzie, "Program" je jedynie przypomina /rozdrobnienie wiadomości w tym przypadku ograniczałoby aktywność czytelnika/; przygotowane teksty mają ułatwić nie bezmyślne "wkuwanie", ale aktywne przyswajanie wiedzy połączone z samodzielnym przedzieraniem się przez napotykane trudności; systematyczne podnoszenie poziomu naukowego studentów oraz przygotowanie ich do samodzielnego studiowania tekstu wymaga, aby kadry były obszerniejsze.

Liczba ćwiczeń następujących po kadrze informacyjnym w "Programie" jest dość duża; mają one wystarczyć do aktywnego przyswojenia opracowywanego pojęcia, twierdzenia, dowodu, metody rozwiązywania pewnych problemów oraz wykształcenia pewnych sprawności.

"Program" konstruowano tak, aby systematycznie i stopniowo wprowadzać studentów w samodzielne studiowanie tekstu matematycznego. Zwiększanie samodzielności studentów przy studiowaniu "Programu" wywoływano dwoma sposobami. Jeden związany jest z programowaniem rozwiązywania danego typu zadań; pierwsze kadry odnoszące się do zadań danego typu zawierają niewiele luk i bardzo dużo wskazówek, w każdej następnej ramce liczba luk się zwiększa, wskazówki zanikają. Ostatni kadr - z danej serii - obejmuje już tylko sam temat zadania. Student zmuszony jest więc do coraz bardziej samodzielnego uczenia się.

Drugi sposób odnosi się do zwiększenia samodzielności przy studiowaniu kolejnych części "Programu". Pierwsze części są dość obszerne, zawierają wiele zadań zaprogramowanych szczegółowo, końcowe - na ogół jedno zadanie rozwiązane szczegółowo, a pozostałe kadry obejmują tylko tematy zadań podobnego typu z nikłymi wskazówkami. W kolejnych partiach "Programu" maleje także liczba ćwiczeń do nadobowiązkowego rozwiązania. Czytelnik w sposób systematyczny odsyłany jest coraz częściej do uzupełniającej literatury.

"Program" nie jest w ścisłym znaczeniu podręcznikiem programowanym, gdyż:

1. dla studenta stanowi on tylko rusztowanie, na którym opiera się jego indywidualna praca; korzystając przy tym z lektury student dobiera

materiał uzupełniający i ćwiczenia; podręcznik klasyczny nie zostaje wyeliminowany, ale jest niezbędny przy takim sposobie zdobywania wiedzy,

2. podstawowe informacje zdobywa student na wykładzie, tu one zostają dokładnie opracowane,

3. nauczyciel /prowadzący zajęcia/ służy radą i pomocą, prowadzi dyskusję na zajęciach audytoryjnych.

Od podręcznika konwencjonalnego "Program" różni się tym, że:

1. wiadomości podawane są w formie ułatwionej; porcje informacji rozpracowane, rozdrobnione z licznymi uwagami dydaktycznymi,

2. ćwiczenia i zadania często stanowią wprowadzenie w teorię w przeciwieństwie do zadań w klasycznych podręcznikach, które raczej sprawdzają lub utrwalają poznane już wiadomości teoretyczne,

3. proces uczenia się oparty jest na ustawicznym wzmacnianiu czynności dydaktycznych ucznia. Pracując wg "Programu" uczący stale podlega kontroli,

4. "Program" obejmuje uwagi dydaktyczne ułatwiające przyswajanie treści oraz nabywanie umiejętności analizowania tekstu matematycznego.

Niestety, tak wykład jak i podręcznik, czy to programowany czy konwencjonalny, nie ułatwiają kształcenia umiejętności "wysuwania" nowych zagadnień. Duże walory z tych względów ma metoda dyskusyjna, przy której w grupie pod kierunkiem nauczyciela studenci opracowują różne zagadnienia merytoryczne i dydaktyczne, uczą się dostrzegania i formułowania problemów; w toku dyskusji można omówić wartość poszczególnych rozwiązań ze względu na ekonomię pracy, oryginalność, estetykę, łatwość zapamiętania i przejrzystość toku rozumowania.

Aby zachęcić studentów do swobodnego wypowiadania się na ćwiczeniach audytoryjnych, nie oceniano ich odpowiedzi. Doświadczenie bowiem pokazuje, że rygory oceny wpływają na to, że studenci niechętnie zgłaszają własne problemy do rozwiązywania, bądź propozycje własnych rozwiązań danych problemów. Ten aspekt ćwiczeń audytoryjnych, a więc i badanej metody jest niewątpliwie istotny w początkach nauki na studiach.

Trzecia część eksperymentowanego cyklu zajęć ze studentami poświęcona jest kontroli i ocenie wyników nauczania. Kontrolę uważa się za integralną część tej formy pracy. Stała i wnikliwa kontrola i samokontrola przy studiowaniu matematyki, ze względu na strukturę tej dziedziny wiedzy, jest nieodzownym elementem procesu uczenia się.

Eksperymentowana forma pracy studentów obejmuje kontrolę w toku:

1. ich samodzielnej pracy - jest to samokontrola; umożliwia ją "Program",

2. zajęć audytoryjnych /kontrola bieżąca postępów studentów w toku rozwiązywania przez nich zadań oraz analizę ich pytań i odpowiedzi w dyskusji w grupie/,

3. rozwiązywania zadań kontrolnych przez studentów /kontrola cząstkowa - w ciągu semestru, kontrola końcowa - pod koniec semestru/. W tym przypadku kontrola jest połączona z oceną i obejmuje sprawdziany pisemne rozwiązywane pod koniec opracowanego fragmentu materiału lub opracowanego działu programu oraz egzamin ustny, po drugim semestrze nauki.

W grupie kontrolnej zajęcia prowadzono metodą "zwyczajową" polegającą na:

1. samodzielnym przygotowywaniu się studentów do ćwiczeń przez rozwiązywanie zadań z wykorzystaniem dostępnej literatury /notatki z wykładów, podręczniki, zbiory zadań/,

2. rozwiązywaniu przygotowywanych poprzednio przez studentów zadań w obecności całej grupy i prowadzącego ćwiczenia - przy czym odpowiedzi te były oceniane,

3. okresowej kontroli i ocenie wyników nauczania w zadaniach kontrolnych.

3. Cele eksperymentu

Celem eksperymentu było:

1. wypracowanie metodyki zdefiniowanej wyżej formy organizowania pracy samodzielnej studentów,

2. przygotowania materiałów oraz sformułowanie zasad dydaktycznych budowy materiałów stanowiących podstawę organizowania pracy samodzielnej studentów,

3. weryfikacja tych teoretycznych założeń w toku naturalnego eksperymentu.

W szczególności chodziło o zbadanie, czy eksperymentowana forma organizowania pracy samodzielnej studentów słabszych w ramach ćwiczeń i poza ćwiczeniami pozwala:

1. zmniejszyć trudności związane z pokonywaniem "progu",

2. uzyskać lepsze wyniki od tych, jakie uzyskuje się przy metodzie zwyczajowej,

3. zaktywizować udział w ćwiczeniach każdego studenta, bez względu na jego poziom naukowy, zwiększając przez to stopień jego zainteresowania przedmiotem,

4. usuwać luki w wiadomościach studentów powstałe z przyczyn obiektywnych,

5. podnieść poziom naukowy studenta przez opanowanie większej porcji wiedzy, lepiej wiadomości wiązać i utrwalać,

6. skuteczniej, głębiej przyswajać opracowane pojęcia,

7. uczyć analizowania tekstu matematycznego,

8. uczyć rozwiązywania problemów oraz poprawnego opisu rozwiązywanych zadań precyzyjnym językiem matematycznym,

9. ograniczyć liczbę błędów przy rozwiązywaniu zadań.

Dla obiektywnego określenia rezultatów eksperymentu porównuję wyniki osiągnięte przez dwie równoważne grupy: eksperymentalną /E/ i kontrolną /K/ tego samego I roku i tej samej uczelni. Równoważność grup ustalono dobierając do każdego studenta jednej grupy "równoważnego" mu studenta drugiej grupy według określonych kryteriów poziomu przygotowania opartych na wynikach nauki w szkole średniej i w czasie egzaminu wstępnego. Obie grupy słuchały tego samego wykładowcy: grupę eksperymentalną prowadził autor artykułu, grupę kontrolną - pracownik naukowy uczelni, mający bardzo duże doświadczenie dydaktyczne i w większym stopniu wyspecjalizowany w tematyce ćwiczeń niż autor artykułu. Zakładając równoważność tak utworzonych grup można przyjąć, że ewentualne różnice rezultatów nauczania w tych grupach okażą się konsekwencją różnych metod nauczania.

W szczególności statystycznie porównuję:

1. liczby studentów grupy E i K, którzy zaliczyli semestr I i II,
2. wyniki zadań kontrolnych,
3. częstotliwość i typy popełnianych błędów.

Na podstawie analizy statystycznej dokładniej porównuję:

1. wpływ dwóch form pracy studentów na pokonanie "progu",
2. umiejętność czytania tekstu matematycznego w grupach E i K,
3. umiejętność rozwiązywania problemów i określonych typów zadań przez studentów grup E i K.

Eksperyment właściwy przeprowadzono w roku akad. 1968/69 na I roku matematyki WSP w Krakowie w ramach ćwiczeń z analizy matematycznej. Zajęcia /3 godziny ćwiczeń tygodniowo w dwóch terminach, 3 godziny wykładu/ w obu badawczych grupach odbywały się w tym samym czasie. Tematykę zajęć prowadzący szczegółowo uzgadniali między sobą tak,że często w obu grupach rozwiązywano te same zadania. Tematy zadań kontrolnych dla obu grup były identyczne, zadania te rozwiązywano w tym samym czasie. Badani byli absolwentami szkoły średniej, w której nauczanie matematyki odbywało się jeszcze według tradycyjnych programów.

4. Analiza "Programów" wypełnionych przez studentów

Przeglądając - nawet pobieżnie - teksty, z którymi pracowali studenci, można zauważyć dość sporą liczbę zupełnie nie wypełnionych kadrów. Ilość tych kadrów zwiększa się stopniowo, począwszy od XII części "Programu". U różnych studentów proces ten się zaczyna w różnych miejscach; przy końcu kursu żaden ze studentów nie wypełnił ostatnich ramek. I tak w częściach od I do IX-X studenci przeważnie nie wypełniali tych kadrów, których nie umieli samodzielnie wypełnić, natomiast w dalszych częściach w większości wykorzystywano tylko te ramki, których wypełnianie wydawało się studentom szczególnie przydatne dla przyswojenia materiału; w pierwszym semestrze nie wypełnione kadry były z reguły zgłaszane do omówienia, w drugim semestrze studenci interesowali się bardziej zadaniami podanymi na końcu zeszytu niż samym "Programem".

Stopniowo w kolejnych częściach "Programu" /"Program" obejmuje dwadzieścia części/ daje się zauważyć, że te ramki, które bezpośrednio formułują nowe zagadnienia, podają schemat rozwiązywania zadań danego typu, wprowadzają charakterystyczne własności pojęć, ćwiczenia pierwsze z danej serii ćwiczeń są szczególnie dokładnie wypełniane, natomiast kadry ćwiczące oraz poświęcone utrwalaniu wprowadzonych treści nie wszyscy studenci uzupełniają.

Dla niektórych studentów rozwiązanie zadania stanowi punkt wyjścia do "przedłużania" problemu; student nie zadowala się podanym rozwiązaniem, szuka innych, a nawet formułuje podobny problem. Czasem właśnie chodziło o to, aby zadanie sprowokowało czytelnika, aby podany problem go zainteresował i aby wtedy samodzielnie - nie prowadzony - zrobił dalszy krok zostawiając na boku "Program". Ten cel został u niektórych studentów osiągnięty.

Przeglądając wypełnione teksty można zauważyć, że dla znacznej części studentów "Program" stanowił tylko schemat organizacji uczenia się; spotyka się na arkuszach "Programu" uzupełnienia, podkreślenia ważniejszych twierdzeń oraz charakterystyczne własności pojęć wyróżnione graficznie. Organizując proces uczenia się student wybiera sam do opracowania te zadania, które są konieczne dla przyswojenia danej partii materiału; niektóre kadry utrwalające opuszcza, natomiast inne uzupełnia bardzo dokładnie. Dla wielu studentów /szczególnie początkowo/ ten subiektywny wybór zadań okazywał się zawodny, o czym przekonywali się rozwiązując ćwiczenia kontrolne zamieszczone na końcu opracowywanego zeszytu "Programu".

W wyniku przeprowadzonej analizy wypełnionych przez studentów "Programów" można sformułować kilka wniosków rzucających pozytywne światło na eksperymentowaną formę prowadzenia zajęć i praktyczną wartość materiałów. Może wydać się to paradoksem, ale właśnie zwiększająca się liczba kadrów nie wypełnionych przemawia za tą formą organizacji procesu uczenia się oraz za wspomnianymi materiałami; studenci stopniowo wykazują coraz większą samodzielność, zaczynają powoli sami kierować procesem uczenia się, "Program" zaczyna wyznaczać jedynie plan pracy i umożliwia jej kontrolę. Po pierwszym semestrze nauki "Program" staje się coraz mniej potrzebny, studenci zaczynają go odrzucać. I właśnie dobrze, że odrzucają, bowiem swą rolę najwidoczniej spełnił: przygotował ich do samodzielnego studiowania.

"Programu" nie starano się skonstruować tak, aby student uzupełniając ramki nie mógł popełnić błędu, ale błąd miał być dla uczącego się sygnałem, że danego pojęcia jeszcze sobie nie przyswoił, że twierdzenia, czy metody jeszcze operatywnie nie opanował, miał być bodźcem do ponownego rozwiązania zadania, do skorygowania, czy uzupełnienia wiadomości. Niemniej przegląd popełnionych - przy wypełnianiu "Programu" - błędów /których jest zresztą niewiele/ pokazuje, które zagadnienia i które kadry wymagają jeszcze bardziej szczegółowego rozpracowania, zilustrowania przykładem lub kontrprzykładem.

5. Wypowiedzi studentów o badanej formie organizowania zajęć

Celem wysondowania opinii studentów o badanej formie organizowania zajęć przeprowadzono dwie anonimowe ankiety.

Wielu studentów uznaje zalety eksperymentowanej formy pracy raczej w pierwszym semestrze nauki. Do najbardziej charakterystycznych zalet zaliczają oni: ułatwienie organizacji czasu i pracy, podkreślając przy tym, że praca z "Programem" skłania ich do systematycznego uczenia się; ułatwienie dobrego zrozumienia i głębszego przyswojenia materiału; uczenie ich korzystania z podręcznika i studiowania lektury matematycznej.

Bardzo wysoko badani oceniają związane z samodzielną pracą z "Programem" ćwiczenia audytoryjne, na których jest "większa możliwość zadawania pytań dotyczących wykładów", "więcej czasu pozostaje na wnikliwą analizę tematu, bo studenci są już do tej analizy przygotowani; stwierdzają, że "ten sposób prowadzenia ćwiczeń jest najkorzystniejszy dla studentów", przy czym odbywa się "bez obciążenia psychicznego".

W wielu ankietach obu grup znajdują się uwagi dotyczące metod prowadzenia zajęć. Studenci opowiadają się za bardziej urozmaiconymi metodami, dostrzegają potrzebę uczenia ich, jak się mają uczyć. Sądzą, że należałoby częściej dyskutować na tematy metodologiczne oraz uczyć ich korzystania z podręcznika. W świetle wypowiedzi respondentów eksperymentowana forma zajęć spełniała tę rolę.

6. Analiza błędów popełnionych przez studentów w zadaniach kontrolnych

Zbadanie stopnia przyswojenia i zrozumienia opracowanego materiału oraz skontrolowanie nabytych przez studentów w toku nauki sprawności - oto cele jakie postawiono przed zadaniami kontrolnymi. Starano się w miarę możliwości przeprowadzić badania obejmujące wszystkie treści podawane na wykładach.

Wszystkie zadania kontrolne podzielono na:

1. Sprawdziany tradycyjne; ćwiczenia te, formułowane w sposób konwencjonalny, dobierano tak, aby dotyczyły spraw pojęciowych, wymagały samodzielności i badały umiejętność rozwiązywania problemów.

2. Sprawdziany testowe; miały one sprawdzić rozumienie i stopień przyswojenia pojęć i twierdzeń z pewnego dystansu, w krótkich zadaniach.

3. Sprawdziany poświęcone czytaniu matematycznego tekstu; celem ich było zbadanie stopnia rozumienia i orientacji w nowym tekście, umiejętności formułowania i rozwiązywania prostych zadań związanych bezpośrednio z materiałem poznanym przez lekturę tekstu.

4. Sprawdzian ustny; obejmował on teorię przedstawioną w toku wykładów; badał jej znajomość i rozumienie, przy czym dużą wagę przywiązywano do referowania odpowiedzi ścisłym językiem matematycznym.

Błędy popełnione przez studentów obu grup w sprawdzianach tradycyjnych można podzielic na sześć typów:

I - błędy dotyczące znajomości i rozumienia opracowywanych pojęć,

II - błędy dotyczące znajomości i umiejętności stosowania poznanych twierdzeń,

III - błędy związane z "oszacowywaniem" wyrażeń[1],

IV - błędy dotyczące języka oraz błędy logiczne,

V - błędy rachunkowe; są to przede wszystkim pomyłki powstałe najprawdopodobniej w wyniku nieuwagi,

VI - błędy szkolne; tj. błędy, których geneza tkwi w materiale szkolnym /matematyce "szkolnej"/ i tam nie zostały wyeliminowane.

W tabeli nr 1 podano częstotliwości występowania poszczególnych typów błędów.

Z pojęciami: zbiór, iloczyn kartezjański zbiorów, relacja, funkcja, student miał okazję spotkać się na egzaminie wstępnym, na zajęciach z algebry lub na repetytorium matematyki elementarnej. Trudno więc jedno-

---

[1] Typ ten celowo wyróżniono, ponieważ sposób rozumowania związany z "oszacowywaniem" wyrażeń nie był dokładniej opracowywany w "Programie". Jest nowym sposobem rozumowania rzadko spotykanym w dotychczasowym doświadczeniu studentów.

znacznie wyjaśnić przyczyny powstawania błędów związanych z tymi pojęciami; natomiast te błędy, które dotyczą znajomości i rozumienia pozostałych opracowywanych pojęć są charakterystyczne dla badanych form organizacji nauki.

Tabela 1

Lp.	Typ błędu	Liczba błędów					
		Grupa E			Grupa K		
		I sem.	II sem.	Razem	I sem.	II sem.	Razem
1	I	123	37	160	137	67	204
2	II	67	45	112	91	78	169
3	III	15	0	15	4	0	4
4	IV	95	12	107	138	17	155
5	V	25	23	48	30	14	44
6	VI	69	3	72	56	13	69
7	Razem	394	120	514	456	189	645

W tabeli 2 zestawiono dwa rodzaje błędów typu I /błędy Ia dotyczą wyżej omówionych pojęć mnogościowych/ oraz częstotliwości ich występowania.

Tabela 2

Typ błędu	Błędy dotyczące	Liczba błędów					
		Grupa E			Grupa K		
		I sem.	II sem.	Razem	I sem.	II sem.	Razem
I	pojęć mnogościowych /Ia/	83	18	101	76	25	101
	pozostałych pojęć	40	19	59	61	42	103
R a z e m		123	37	160	137	67	204

Bezpośrednio z tabel 1, 2 odczytujemy, że liczby błędów typów V, VI, Ia w obu grupach /przede wszystkim w semestrze I/ są prawie takie same. Liczby te "potwierdzają" równoważność grup badawczych ze względu na przygotowanie naukowe studentów.

Można przypuszczać, że błędy typów II, IV, oraz błędy powstałe w wyniku nieznajomości i nierozumienia opracowywanych pojęć /wyłączając typ Ia/

mają pewien związek z metodą prowadzenia zajęć w danej grupie. W ilości tych błędów zaznacza się wyraźna różnica na korzyść grupy E.

Eksperymentowana forma organizowania zajęć okazuje się bardziej skuteczna przy eliminowaniu błędów typów I, II, VI; natomiast w przypadku błędów rachunkowych - metoda "zwyczajowa" /o ile można mówić o eliminowaniu pomyłek/. Ogólnie obserwujemy także większy względny spadek liczby błędów w grupie E. Otrzymane rezultaty potwierdzają średnie liczby błędów przypadających na jednego studenta w danym semestrze /tabela 3/.

Tabela 3

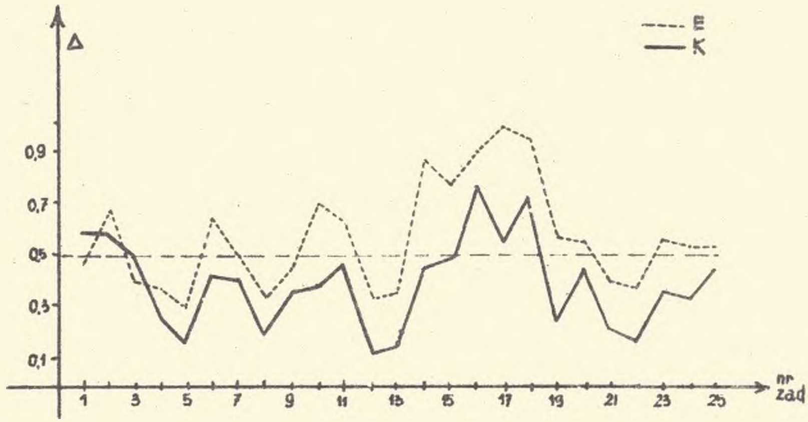
Grupa	E		K	
Semestr	I	II	I	II
Liczba błędów przypadających średnio na studenta	19	6	22	13

Zupełnie analogiczne rezultaty otrzymano w sprawdzianach testowych. Szczególnie wyraźne różnice między grupami uwidoczniły się w sprawdzianach dotyczących czytania tekstu matematycznego. Błędów związanych bezpośrednio z nowym tekstem /logicznych, dotyczących nierozumienia definicji, twierdzeń/ studenci grupy kontrolnej popełnili ponad dwukrotnie więcej niż studenci grupy eksperymentalnej. Świadczyłoby to o tym, że studenci grupy eksperymentalnej lepiej radzą sobie z nowym tekstem; szybciej czytają tekst; w związku z tym mimo że w tym samym czasie przeciętnie rozwiązali więcej zadań niż studenci grupy K, to popełnili o wiele mniej błędów.

7. Analiza ilościowa wyników zadań kontrolnych

Dla zbadania różnicy między grupami zastosowano test istotności t Studenta dla różnicy dwóch średnich. Przeprowadzone badania pokazały, że hipotezę zerową o braku różnic między średnimi należy odrzucić w każdym z badanych okresów /I semestr, II semestr, cały rok/ na poziomie 0,05; tym samym można uważać, że różnica między grupami zależy od formy pracy w grupach. Warto zaznaczyć, że student grupy eksperymentalnej okazał się "lepszy" przeciętnie co najmniej o 1 punkt /co stanowiło około 25% średniej liczby punktów uzyskanych przez studenta grupy kontrolnej/.

Przypisując każdemu z zadań kontrolnych jego współczynnik trudności Δ /liczbę Δ definiuję jako iloraz liczby uzyskanych punktów przez wszystkich studentów danej grupy, do liczby możliwych do uzyskania w danym zadaniu /można zbadać, o ile łatwiejsze było przeciętnie zadanie kontrolne w grupie E od takiego zadania w grupie K. Uzyskane wyniki przedstawiono na poniższym wykresie.



Przeprowadzone badania pokazują, że i w tym także przypadku różnica między grupami /na korzyść grupy E/ jest wyraźna i istotna.

Porównując liczby studentów rozpoczynających studia z liczbami studentów, którzy zaliczyli semestr I i semestr II można zauważyć, że większe szanse zaliczenia semestru I /semestru II/, a więc także i pokonania "progu", ma student grupy eksperymentalnej /ok. 15%/. Potwierdzenie tej tezy znajdujemy także w badaniach wstępnych, wówczas w grupie E skreślono 15%, a w grupie K aż 35% ogółu studentów w grupie.

Powstaje pytanie, jakie czynniki miały wpływ na powstanie różnicy między grupami.

Okazuje się, że największa różnica między grupami uwidoczniła się przy zadaniach dotyczących rozumienia pojęć i związków między nimi oraz w sprawdzianach związanych ze studiowaniem nowego tekstu matematycznego. Dokładniejsze badania pokazały, że eksperymentowana forma organizowania pracy samodzielnej studentów uczy ich w większym stopniu rozwiązywania problemów niż forma zwyczajowa. W szczególności okazało się, że zadań łatwiejszych /o współczynniku trudności większym niż 0,50/ w grupie E jest przeszło trzy razy więcej niż w grupie K.

Sprawdzian ustny nie wykazał istotnej przewagi żadnej z grup, chociaż lepsze ilościowo rezultaty osiągnęła grupa E.

8. Podsumowanie wyników - wnioski

Wydaje się, że dłuższy czas trwania eksperymentu wyeliminował w sposób naturalny wpływ "nowości", to znaczy zainteresowanie, jakim cieszą się te zagadnienia i środki, z którymi uczący nie spotkali się dotychczas i które kształtują dodatnie motywy uczenia się. Mimo to stosowana metoda w dalszym ciągu funkcjonowała pozytywnie.

Uzyskane rezultaty są obiecujące, jednak sformułowane wnioski nie mogą być mechanicznie uogólniane, należy bowiem pamiętać, że chociaż uzyskano je na obszernym materiale, to porównywane zbiorowości były bardzo nieliczne.

Wnioski poniższe dotyczą możliwości pomocy studentom "słabszym", którzy nie mogą się wciągnąć w samodzielne studiowanie bez pokierowania i szczególnej opieki, ale którzy mają intelektualne zadatki, aby przy tej opiece trudności pokonać.

Wnioski

1. Na podstawie przeprowadzonej analizy ilościowej i jakościowej można sformułować następujące obserwacje.

Eksperymentowana forma organizowania zajęć:

a/ ułatwiała przystosowanie się studentów I roku matematyki do systemu nauki w szkole wyższej oraz skuteczniej wpływała na zmniejszenie odsiewu na roku pierwszym niż "zwyczajowa" metoda prowadzenia zajęć;

b/ dawała wyniki, które w istotny sposób różnią się na poziomie 0,05 od wyników uzyskanych przy "zwyczajowej" metodzie pracy;

c/ umożliwiała głębsze rozumienie i trwalsze przyswojenie przez studentów opracowywanych treści;

d/ wyraźniej wpływała na zmniejszenie liczby błędów dotyczących pojęć i twierdzeń oraz błędów szkolnych;

e/ wykazała wyższość nad metodą "zwyczajową" w uczeniu rozumnego czytania tekstu matematycznego;

f/ pozwalała organizować pracę studenta we właściwym dlań tempie;

g/ zwiększyła samodzielność oraz zaktywizowała udział studenta w procesie nauczania usuwając obciążenia psychiczne; eliminowała różnice w zdolnościach stwarzając możliwość indywidualnych sukcesów;

h/ usuwała luki w wiadomościach,powstałe z przyczyn obiektywnych;

i/ uczyła metod rozwiązywania problemów;

j/ pozwalała gromadzić doświadczenie dydaktyczne, które student w przyszłości jako nauczyciel może wykorzystać.

2. Na podstawie przeprowadzonych badań można sformułować następujące postulaty w stosunku do ewentualnego stosowania tej metody w ulepszonej postaci:

a/ należy szczególną uwagę zwrócić na analizowanie tekstu matematycznego;

b/ szczegółowo programować wstępne partie analizy matematycznej, bowiem szczegółowy program na tym etapie wyraźnie ułatwia opanowanie i przyswojenie jej pojęć;

c/ w miarę upływu czasu stopniowo należałoby zmniejszać programowanie treści i przechodzić do tradycyjnej formy zapisu; zadań rachunkowych nie programować;

d/ trudniejsze partie materiału bardziej eksponować na ćwiczeniach audytoryjnych;

e/ na ćwiczeniach audytoryjnych w II semestrze stopniowo przechodzić do oceniania odpowiedzi ustnych studentów.

9. Kierunki dalszych badań

Oczywiście nie wszystkie z powyżej sformułowanych wniosków mogą być uogólnione. Bardziej wyczerpującą charakterystykę eksperymentowanej formy organizowania zajęć można będzie przedstawić dopiero po przeprowadzeniu możliwie szerokich badań empirycznych i to na różnych poziomach nauczania matematyki.

W toku tych badań należałoby zwrócić uwagę na następujące zagadnienia:

1. ustalić rzeczywistą przydatność opisywanej formy pracy w procesie uczenia się na różnych szczeblach nauki szkolnej;

2. zbadać, czy proponowana forma pracy lub mutacja tej formy może być wykorzystana do walki z opóźnieniem w nauce;

3. ustalić szczegółowe proporcje między nauką własną, dyskusją i kontrolą wyników na różnych szczeblach nauki szkolnej;

4. wypróbować różne sposoby kontroli procesu uczenia się przy opisywanej formie organizowania zajęć;

5. skonstruować oprócz konwencjonalnego podręcznika materiały obejmujące programy ważniejszych z punktu widzenia metodologicznego i trudniejszych partii materiału, w postaciach dostosowanej do różnych poziomów nauczania matematyki.

10. Wybrane przykłady zadań kontrolnych

a/ Sprawdziany tradycyjne

1. Czy można dobrać zbiór A tak, aby zbiór $D_6 \times A$ /D_6 - zbiór podzielników liczby 6/ był funkcją? Odpowiedź uzasadnij.

2. Zapas ciągu $\{a_n\}$ ma obydwa kresy, czy ciąg $\{a_n\}$ musi być zbieżny? Odpowiedź zilustruj przykładami.

3. Dany jest ciąg $\{a_n\}$ zbieżny do zera. Czy ciąg b_n: $1, 2, 3, a_1, a_2, a_3, \dots$ jest zbieżny? Odpowiedź udowodnij w oparciu o definicję granicy ciągu.
4. Wykazać, że funkcja $f(x) = |x - a|\varphi(x)$, gdzie $\varphi(x)$ jest funkcją ciągłą, nie ma pochodnej w punkcie a, gdy $\varphi(a) \neq 0$.
5. Funkcja $f(x)$ jest ciągła w R oraz $f(0) = 1$. Niech $\varphi(x) = (1 - x)f(x)$. Udowodnić, że istnieje takie x_0, że $\varphi(x_0) = x_0$.
6. Podać przykład funkcji dwóch zmiennych, która ma nieskończenie wiele ekstremów lokalnych.

b/ Sprawdziany testowe

1. Ciąg $\{a_n\}$ spełnia warunek $\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{m \in N} \bigwedge_{n \geqslant m} (a_n < \varepsilon)$. Podaj przykład ciągu $\{a_n\}$, który spełnia ten warunek, ale nie ma granicy.
   Odpowiedz: a_n = ...
2. Wiadomo, że $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Dla jakich a ciąg $\{a_n\}$ spełnia warunek $\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{m \in N} \bigwedge_{n \geqslant m} (a_n < \varepsilon)$?
   Odpowiedz: a = ...
3. Skreśl jak najwięcej warunków wymienionych jako możliwe założenia twierdzenia tak, aby otrzymane twierdzenie było prawdziwe.

Z: $\bigvee_{k \in R} \bigwedge_{n \in N} |a_n| < k$,

$\bigvee_{\{a_{n_i}\}} \lim_{n_i \to \infty} a_{n_i} = g$,

$\bigwedge_{n \in N} |a_n| < |a_{n-1}|$,

$\bigwedge_{\{a_{n_i}\}} \lim_{n_i \to \infty} a_{n_i} = g$,

$\bigwedge_{n \in N} a_n > a_{n+1}$

T: $\lim_{n\to\infty} a_n = g$.

4. Przy jakim dodatkowym założeniu funkcja ciągła w przedziale otwartym ograniczonym jest jednostajnie ciągła /podkreśl/?

   a/ różnowartościowa,
   b/ ma wartość Darboux,
   c/ posiada granice jednostronne skończone na końcach przedziału.

5. Podać przykład funkcji, która nie jest całką nieoznaczoną żadnej funkcji.
6. Podać trzy przykłady takiej operacji Ω, określonej na pewnym zbiorze funkcji zamkniętym ze względu na dodawanie funkcji, która spełnia warunek:

$$\Omega[g(x) + f(x)] = \Omega[g(x)] + \Omega[f(x)].$$

11. Przykłady tekstów do samodzielnej pracy studentów /fragmenty "Programu"/

Konstruując "Program" kierowano się między innymi zasadą stopniowego wprowadzania studentów w samodzielne studiowanie tekstu matematycznego. W szczególności zwiększenie samodzielności starano się osiągnąć przez:

1. stopniowe zmniejszenie liczby wskazówek naprowadzających, zwiększenie liczby luk w danej serii zadań,
2. mniej ukierunkowane sterowanie procesem przyswojenia materiału w kolejnych partiach "Programu".

Sterowanie procesem uczenia się następuje przez dobór takich sytuacji problemowych, których badanie zmusza studenta do:

a/ korzystania z informacji,
b/ przetwarzania informacji,
c/ tworzenia nowych treści.

Stopniowe wyrabianie tych umiejętności następuje w toku rozwiązywania zadań związanych z definiowaniem, dowodzeniem, korzystaniem z definicji i twierdzeń oraz z zastosowaniem poznanych wiadomości teoretycznych. Szczególnie zwraca się uwagę na wyrobienie dwu pierwszych umiejętności, bowiem z nowym materiałem student zapoznał się na wykładzie, a ćwiczenia w zasadzie poświęcone były utrwalaniu i pogłębieniu nowych wiadomości.

Proces uczenia studentów korzystania z informacji i ich przetwarzania jest procesem kierowanym i obejmuje m. in. mocno w "Programie" wyeksponowane procesy; przyswojenia treści definicji, treści twierdzeń i dowodów twierdzeń.

Pierwszy z niżej przytoczonych fragmentów "Programu" dotyczy wstępu do analizy; tak szczegółowe zaprogramowanie pierwszych partii "Programu" okazało się niezbędne przede wszystkim dla studentów "słabszych", którzy nie umieją czytać tekstu matematycznego; podkreślić tu trzeba, że studenci ci z pojęciami mnogościowymi w szkole nie spotkali się; poza tym większość z nich nie była przyzwyczajona do bardziej formalnego traktowania definicji matematycznych pojęć i do elementarnych wymogów ścisłości.

A. FRAGMENT DOTYCZĄCY WPROWADZENIA POJĘCIA FUNKCJI

2. Iloczyn kartezjański

2.1 Wśród podanych przykładów podkreśl jedną kreską te, które są parami; obwiedź kółkiem pary równe.
$(1,2)$, $\{2,1\}$, $(2,1)$, $\{1,4\}$, $(4,2)$, $\{5\}$, $(2^2,2)$, $(\sqrt{4},\log 10)$, (a,b), $(0,6)$, $(\log 2,6)$, $(2,-3)$, $(0,1)$, $(0,3)$, $(3,0)$, $(1,0)$.

---

pary równe:
$(2,1) - (\sqrt{4},\log 10)$,
$(4,2) - (2^2,2)$

2.2 Zapamiętaj
$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow \ldots = c\ \boxed{i}\ b = \ldots$

---

a,d

2.3 Wiemy, że $(a,b) \neq (c,d)$. Co można powiedzieć o elementach a,b,c,d? .... $\square$ ....
Jaki spójnik postawisz w wyróżnionej kratce? ...

$a \neq c$ lub
$b \neq d$

2.4 Wiemy, że $(x,2) = (-3,y)$. Wyznacz x oraz y.
$x = \ldots\ldots\ldots$, $y = \ldots\ldots\ldots$

-3, 2

2.5 Co można powiedzieć o x i y, jeżeli
a/ $(x,5) = (y,5)$ ....
b/ $(x,2) \neq (x,y)$ ....

$x = y$, $y \neq 2$

2.6 Wymień pary, które należą do rozwiązania równania $x = y + 1$; $U = \{1,2,3,0\}$ i $x,y \in U$.
....

$(1,0)$, $(2,1)$,
$(3,2)$

2.7 $Z = \{(0,0), (0,4), (-5,-10), (3,3), (5,4), (-8,2)\}$,
$T = \{(4,0), (3,3), (4,5), (-8,2), (0,0), (0,4), (-1,-2), (-5,4)\}$.

Znajdź: a/ $T \cap Z =$
b/ $T \cup Z =$

---

a/ $\{(0,0), (0,4), (3,3), (-8,2)\}$,
b/ $\{(0,0), (0,4), (-5,-10), (3,3), (5,4), (-8,2), (4,0), (4,5), (-1,-2), (-5,4)\}$.

2.8 W poniższych dwóch rzędach znajdź pary równe. Odpowiedź zapisz jako parę. Np. para 1 z rzędu 1 jest równa parze 4 z rzędu 2; para $(1,4)$ jest więc jedną z par odpowiedzi.

Rząd 1	Rząd 2
1. $(3,2)$	1. $(1^2,-2^2)$
2. $(-8,8)$	2. $(a-a,\ b-b)$
3. $(2,-7)$	3. $(5,3^2)$
4. $(5,9)$	4. $(\sqrt{9},\ \sqrt{4})$
5. $(1,-4)$	5. $(-4.2,\ 2.4)$
6. $(0,0)$	6. $(2\cdot x^0,\ -49^{0,5})$

Odp. ....

2.9 $A = \{2,3\}$, $B = \{-1,2,5\}$. Wypisz pary, które należą do zbioru

$S = \{(x,y):\ x \in A \ \text{i}\ y \in B\}$.

$S = \{(3,2),$ ....$\}$

$S = A \ \ldots\ B$.

(2,-1), (2,2), (2,5), (3,-1), (3,2), (3,5),

$S = A \times B$

2.10 Definicja. Zbiór wszystkich par (x,y) takich, że x jest elementem zbioru A i y elementem zbioru B nazywamy .... i zapisujemy ....

---

iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B,

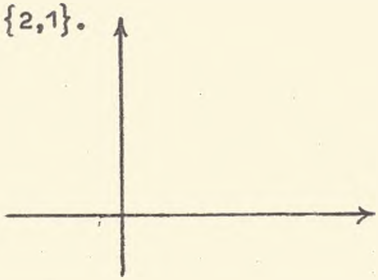
$A \times B$

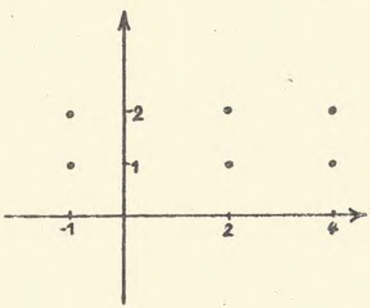
2.11 Dane są zbiory $M = \{a,1,7\}$ i $N = \{n,s,3\}$. Podkreśl te pary, które należą do $M \times N$.

(a,n), (1,1), (7,1), (a,s), (3,a), (a,3), (7,3), (1,2), (s,1), (s,s), (5,2), (m,n), (n,3), (a,1).

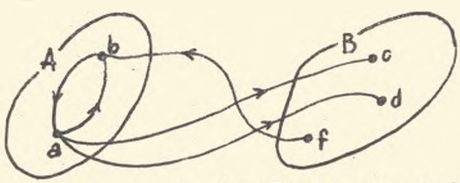
(a,n), (a,s), (a,3), (7,3)

2.12 W danym układzie współrzędnych zaznacz te punkty, których współrzędne należą do $A \times B$, gdzie $A = \{-1,2,4\}$, $B = \{2,1\}$.





2.13



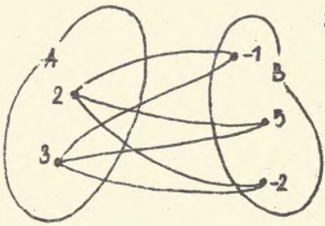
Które z połączonych strzałkami par punktów, reprezentujących elementy zbiorów A i B, należą do A x B?

....

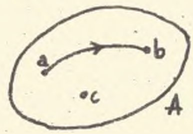
(b,c), (b,d)
Dlaczego $(a,b) \notin A \times B$?

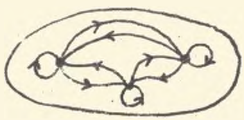
2.14

Połącz strzałkami punkty reprezentujące te elementy, których pary należą do $A \times B$.



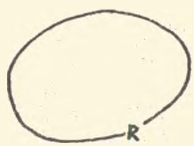
2.15 $A = \{a,b,c\}$.
$A \times A = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$.
Uzupełnij graf $A \times A$.



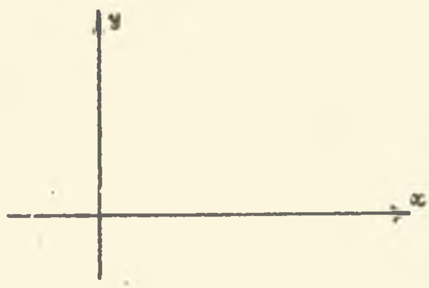


2.16 <u>Definicja</u>. Każdy podzbiór iloczynu kartezjańskiego nazywamy relacją.

2.17 Niech relacja $S = \{(x,y) : x \leq y\} \subset R \times R$.
a/ Wymień cztery pary należące do S
....
b/ Na grafie zaznacz kilka par punktów reprezentujących elementy należące do S



c/ W układzie współrzędnych zilustruj ten zbiór punktów, których współrzędne należą do S /wykres relacji S/

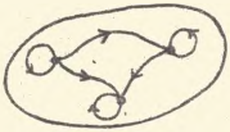


2.18 Czy relacja S z ćwiczenia 2.17 jest funkcją? Odpowiedź uzasadnij w oparciu o definicję funkcji.

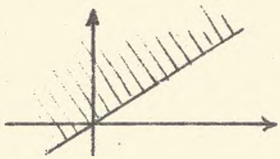
Rozwiązanie. Ponieważ funkcją o polu A i zbiorze wartości /zapasie/ w B nazywamy podzbiór iloczynu A x B /zbiór ..../ taki, że każdy element zbioru A jest ... . dokładnie jednej pary, a do S należą pary (2,), (2,) wobec tego S ....

a/

b/



c/



par, pierwszym elementem, 3,5, nie jest funkcją

2.19 Podaj przykład funkcji o polu $\{7,2\}$ i zapasie w $\{-1,0,1\}$.

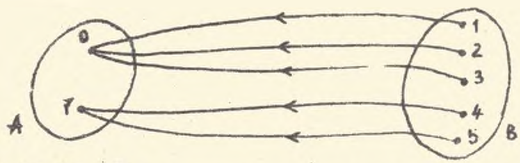
Zgodnie z definicją .... wystarczy utworzyć ...., w których to parach pierwsze elementy ...., drugie zaś ....

Np. ....

Ile takich funkcji można utworzyć? Wypisz je......................................

funkcji, zbiór par, są różne i należą do zbioru $\{7,2\}$, należą do zbioru $\{-1,0,1\}$. Np. $\{(7,-1), (2,-1)\}$. Takich funkcji można utworzyć sześć.

2.20 Czy relacja P zadana grafem jest funkcją.



Relacja P = ...

....

....

$P = \{(1,0), (2,0), (3,0), (4,7), (5,7)\}$.

W zbiorze P nie ma dwóch różnych par mających ten sam pierwszy element. P jest funkcją.

2.21 Dane są funkcje F i G. Czy zbiór $F \cap G$ jest funkcją?

Ponieważ $F \cap G \subset F$ i zbiór F jest .... tzn. ....

....

funkcją, w F nie istnieją różne pary o identycznych pierwszych elementach, a więc i w $F \cap G$ takie

2.22 Dane są funkcje F i G. Czy $F \cup G$ jest funkcją?

Wskazówka: rozważ dwa przypadki

1/ część wspólna pola F i pola G jest zbiorem pustym, pary nie istnieją, czyli $F \cap G$ jest funkcją.

2/ część wspólna pola F i pola G nie jest zbiorem pustym.

Ad. 1. ....
....
....

Ad. 2. Np. niech $F = \{(2,1),(3,5)\}$,
$G =$ ....
$F \cup G =$ ....
....
....

1/ $F \cup G$ jest funkcją,
2/ $F \cup G$ nie musi być funkcją

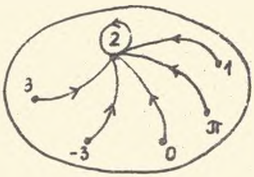
2.23 Czy zbiór $F = \{(x,y): y = 2\}$ jest funkcją, gdy $F \subset R \times R$? Narysuj częściowy graf tej relacji.
/Jeżeli nie potrafisz rozwiązać zadania, rozwiąż wcześniej ćw. 2.24, a potem wróć do tego zadania/.

F .... funkcją.

Po rozwiązaniu czytaj ćw. 2.25.

---

np.



jest

2.24 "Skreśl" te pary, które nie należą do F.
$(0,2)$, $(3,1)$, $(2,2)$, $(-1,2)$, $(2,1)$, $(\pi,2)$, $(3,2)$, $(4,0)$, $(7,3)$, $(-2,10)$.

Pozostaną tylko pary: $(0,2)$, $(2,2)$, $(-1,2)$, $(\pi,2)$, $(3,2)$

2.25 Jeżeli $U = R \times R$, to który z jego podzbiorów a/, b/ jest funkcją?
a/ $\{(x,y): 2y = 2\}$,
b/ $\{(x,y): x = -2\}$.

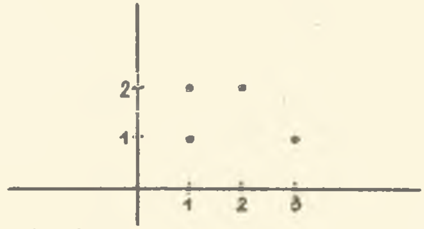
W przypadku, gdy zbiór nie jest funkcją, udowodnij swoją odpowiedź w oparciu o definicję funkcji.

a/ ....
b/ ....

---

a/ zbiór jest funkcją,
b/ do zbioru należą np. pary $(-2,0)$, $(-2,1)$ – zbiór nie jest funkcją.

2.26 Niech $R = U \times U$, gdzie $U = \{1,2,3\}$. Czy relacja R zadana poniższym wykresem jest funkcją o polu $\{1,2,3\}$?



I sposób /w oparciu o definicję funkcji/..
....

II sposób /geometrycznie/ R ....
funkcją, ponieważ ....
prosta równoległa do osi ....
która ma dwa ....
z wykresem ....

I. Do R należą np. pary $(1,1)$, $(1,2)$, są one różne, wobec tego R nie jest funkcją.

II. nie; istnieje; y; punkty wspólne; relacji R.

B. FRAGMENT DOTYCZĄCY OPRACOWANIA DEFINICJI POJĘCIA

9. Granica funkcji

9.1 <u>Definicja</u> /wg Heinego/. Mówimy, że funkcja $x \to f(x)$ określona w zbiorze D mającym punkt skupienia x_0, ma w punkcie x_0 granicę równą g $\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = g\right)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla .... ciągu $\{x_n\}$ o wyrazach .... do D, ... od x_0, zbieżnego do ...... odpowiadający ciąg $\{f(x_n)\}$ wartości funkcji jest .... do .... /granica g jak i punkt x_0 mogą być właściwe lub niewłaściwe/.

---

każdego, należących, różnych, x_0, zbieżny, g

9.2 Jakie czynności wystarczy wykonać, aby udowodnić, że funkcja $x \to f(x)$ określona w zbiorze E ma granicę równą a w punkcie t, będącym punktem skupienia zbioru E.

Wystarczy:

1° założyć, że pewien ciąg $\{x_n\}$ ma następujące własności:

a/ $x_n \in$ ...., dla $n \in N$,

b/ $x_n \neq$ ......, dla $n \in N$,

c/ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =$ .....

2° Udowodnić, że $\lim\limits_{n\to\infty}\ldots = a$.

Skąd wiadomo, że taki ciąg istnieje?

....

E, t, t, $f(x_n)$. Punkt t jest punktem skupienia zbioru E, więc ciąg $\{x_n\}$ istnieje

9.3 Wiemy, że funkcja $t \to f(t)$ ma granicę w punkcie t_o równą g oraz $t_1, t_2, \ldots\ldots$ jest ciągiem o wartościach należących do pola funkcji i różnych od t_o. Czy ciąg $f(t_1)$, $f(t_2)$, ... jest zbieżny do g? Wybierz poprawną odpowiedź.

a/ tak /czytaj ćw. 9.4/,

b/ to zależy /czytaj ćw. 9.5/,

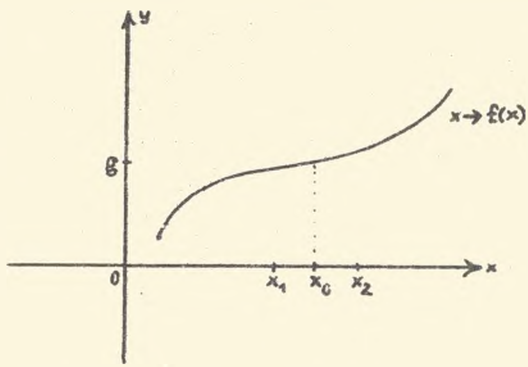
c/ jest zbieżny do t /czytaj ćw. 9.4/.

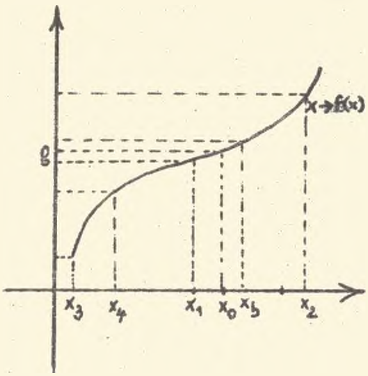
9.4 Twoja odpowiedź jest błędna. Przestudiuj ponownie kolejno ćw. 9.1, 9.2, 9.3. Zastanów się na czym polega błąd, a następnie wybierz poprawną odpowiedź.

9.5 Tak oczywiście, zależy od tego, czy ciąg $\{\ldots\}$ jest zbieżny do .... Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}\ldots = \ldots$, to $\lim\limits_{n\to\infty}\ldots = \ldots$

$t_n, t_o, t_n, t_o, f(t_n)$, g

9.6 Podaj ilustrację graficzną definicji 9.1.





9.7 Dana jest funkcja $x \to f(x)$ o polu P oraz ciągi $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ mające następujące własności:

$a_n \to x_0$ i $\bigwedge_n (a_n \neq x_0$ i $a_n \in P)$,

$b_n \to x_0$ i $\bigwedge_n (b_n \neq x_0$ i $b_n \in P)$.

Czy $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$? Podkreśl poprawną odpowiedź.

a/ tak - dla każdej funkcji /→ ćw. 9,8/,

b/ nie istnieje funkcja, która spełnia te warunki /→ ćw. 9.9/,

c/ to zależy od tego, czy w punkcie x_0 funkcja ma granicę / → ćw. 9.10/.

9.8 Twoja odpowiedź jest błędna. Czy nawet w tym przypadku, gdy w punkcie x_0 funkcja nie ma granicy? Przestudiuj ponownie ćw. od 9.1 do 9.7 i wybierz poprawną odpowiedź.

9.9 Twoja odpowiedź jest błędna. Czy nawet w tym przypadku, gdy w punkcie x_0 funkcja ma granicę? Przestudiuj ponownie ćw. od 9.1 do 9.7 i wybierz poprawną odpowiedź.

9.10 Poprawnie! Jeżeli w punkcie x_0 funkcja $x \to f(x)$ ma granicę, to $\lim\limits_{n\to\infty}$ ...... Jeżeli w punkcie x_0 funkcja $x \to f(x)$ nie ma granicy, to ...... takie ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ spełniające warunki podane w ćw. 9.7, że $\lim\limits_{n\to\infty}$ .... $\lim\limits_{n\to\infty}$ .... /→ ćw. 9.11/.

$\lim\limits_{n\to\infty} f\ a_n = \lim\limits_{n\to\infty} f\ b_n$

istnieją,

$\lim\limits_{n\to\infty} f\ a_n \neq \lim\limits_{n\to\infty} f\ b_n$

9.11 Uzupełnij zapis: Niech funkcja $x \to f(x)$ będzie określona w zbiorze E, niech x_0 będzie punktem skupienia zbioru E -

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow$$

$$\underset{\{x_n\}}{\ldots}\Big\{\Big[\lim_{n\to\infty} x_n = \ldots \text{ i } \bigwedge_{n\in N}(x_n \in \ldots \text{ i } x_n \ldots x_0)\Big] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \ldots = g\Big\}.$$

$\bigwedge$, x_0, E, $\neq$, $f(x_n)$

9.12 Dana jest funkcja $x \to \frac{x}{|x|} = g(x)$.
Zauważmy, że

$\lim_{n\to\infty} 1/n = \ldots$ i $\bigwedge_n 1/n \neq 0$, $g(1/n) = \frac{1/n}{1/n} = 1$

i $\lim_{n\to\infty} g(1/n) = \ldots$

$\lim_{n\to\infty} 1/n^2 = \ldots$ i $\bigwedge_n 1/n^2 \neq 0$, $g(1/n^2) =$
$= \ldots$ i $\lim_{n\to\infty} g(1/n^2) = \ldots$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{5n-3} = \ldots$ i $\bigwedge_n \frac{1}{5n-3} \neq 0$, $g\left(\frac{1}{5n-3}\right) =$

i $\lim_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{5n-3}\right) = \ldots$

Czy można twierdzić, że $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|} = 1$?

1/ tak /ćw. 9.13/,

2/ nie /ćw. 9.14/. Odpowiedź podkreśl.

0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1

9.13 Czy dobrze zastanowiłeś się wybierając tę odpowiedź? Zapomniałeś o tym, że w definicji żąda się, aby dla <u>każdego</u> ciągu zbieżnego do x_0 odpowiadający mu ciąg wartości funkcji był zbieżny do g. Czy rozważyliśmy każdy ciąg? /→ ćw. 9. 14/.

9.14 Poprawnie, bo np. ciąg $-1/n \to 0$ i $\bigwedge_n \ldots \neq 0$, ale $g(\ldots) = \ldots$ i $\lim_{n\to\infty} g(\ldots) = -1$.

$-1/n$, $-1/n$, -1, $-1/n$

9.15 Udowodnij, że funkcja $x \to -x^3 + 2x^2 - 5$ ma w punkcie $x = 2$ granicę równą -5.

1^0 Niech $\{x_n\}$ będzie .... ciągiem i $x_n \to$ ...... o wyrazach różnych od ....

---

jakimkolwiek, 2,2

2^0 Znajdujemy odpowiadający mu ciąg wartości funkcji: $-x_n^3 + 2 \ldots -5$

---

x_n^2

3^0 Obliczamy $\lim_{n\to\infty}(-x_n^3 + 2 \ldots -5)$:

$\lim_{n\to\infty}(-x_n^3 + 2 \ldots -5) =$

$=$ .... $=$

$=$ ....

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-x_n^3\right) + 2\lim\limits_{n\to\infty}x_n^2 - \lim\limits_{n\to\infty}5 = -8 + 8 - 5 = -5.$

4° Z definicji .... wnioskujemy, że $\lim\limits_{x\to 2}\left(-x^3 + 2x^2 - 5\right) = -5.$

9.16 Znaleźć $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2 - 4}{x - 2}$.

1° Niech $x_n \to$ ..... /przez wartości różne od ..../.

2° Odpowiadający mu ciąg wartości funkcji to: ....

3° Ponieważ $x_n \to$ ......, więc 3..... $-4 \to$ .... Oraz $(x_n-2) \to$ .... zatem $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2 - 4}{x - 2}$ = ...

1, 1, $(3x_n^2-4) : (x_n-2)$, 1, x_n^2, -1, -1, 1

9.17 Oblicz w punkcie $\sqrt{3}$, granicę funkcji $x \to f(x) = 1$ określonej w zbiorze liczb wymiernych.

1° Niech $x_n \to$ .... przez wartości wymierne /Każdy wyraz ciągu jest różny od ...., ponieważ $\sqrt{3}$ nie jest liczbą ..../.

2° $f(x_n)$ = ... /def. funkcji/.

3° $\lim\limits_{n\to\infty}$ .... = ...

4° $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} f(x)$ = ...

Zauważmy, że funkcja ta nie jest określona w punkcie $\sqrt{3}$, a jednak ma w tym punkcie granicę.

$\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, wymierną, 1, x_n, 1, 1

9.18 Oblicz granicę funkcji $x \to f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ w punkcie $x = -1$.

1° ....

2° $f(x_n) = \frac{\quad}{x_n + 1} = \frac{(\quad+1)\ (\quad-1)}{x_n + 1}$ =

= ...... − ......, bo $x_n+1 \neq 0$ /z.1°/

3° $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2 - 1}{x + 1}$ = ...

Niech $x_n \to -1$ przez wartości różne od -1, $x_n^2 - 1$, x_n, x_n, x_n, 1, -2

9.19 Oblicz:

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}.$$

Odpowiedź: 6

C. FRAGMENT DOTYCZĄCY PROGRAMOWANIA ROZWIĄZANIA ZADANIA

11.65 Wykazać, że przy ciągłym odwzorowaniu $x \to f(x)$ przedziału domkniętego w siebie istnieje taki punkt x_0, że

$$f(x_0) = x_0$$

Uzupełnij:

Z: .... i $f([a,b]) =$ ......

T: .... $f(x_0) = x_0$

$x \to f(x) \in C([a,b])$, $[a,b]$, istnieje x_0

11.66 c.d. ćw. 11.65

Dowód

Aby wykazać, że istnieje punkt x_0 taki, że $f(x_0) = x_0$ wystarczy udowodnić, że równanie .... = 0 ma pierwiastek należący do przedziału ....

i.......... i .... z zał. tw. 11.59

$\bigwedge_{x \in [a,b]}$ .... $\leqslant f(x) \leqslant$ ....

$\swarrow \qquad \searrow$

$f(a) \ldots a \qquad f(b) \ldots b$

$\Updownarrow \qquad \Updownarrow$

$f(a) - a \ldots \qquad f(b) - b \ldots$

$f(a) - a =$ lub $f(b) - b =$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$x_0 = \qquad x_0 =$

lub $f(a) - a >$ .... i $f(b) - b <$ ... tw. ...

$\vee$

$x_0 \qquad f(x_0) - x_0 = \ldots$

$f(x)-x$, $[a,b]$,
$x \to f(x) \in C([a,b])$,
$f([a,b]) = [a,b]$, a,b
$>, \leqslant, \geqslant 0, \leqslant 0, 0, 0,$
$0, 0, a, b,$ 59b, 0

11.67 Twierdzenie

Funkcja $x \to f(x)$ jest ciągła i ograniczona w zbiorze R. Udowodnić, że istnieje taki punkt x_0, że $f(x_0) = x_0$.

Dowód

Jeżeli podałeś dowód /→ ćw. 11.72/.
Jeżeli nie wiesz, jak udowodnić /→ ćw. 11.70/.

11.70 Co wiesz o funkcji $x \to f(x)$ – przeanalizuj założenia.
Co masz udowodnić – przeanalizuj tezę.
Czy nie znasz twierdzenia, w którym byłaby taka sama teza? ....
Czy nie potrafisz sprowadzić rozwiązania tego zadania do zad. 11.65?
Jak to zrobisz? ....
Wróć do ćwiczenia 11.67 i spróbuj podać dowód wykorzystując te wskazówki.
Jeżeli w dalszym ciągu nie potrafisz udowodnić tego twierdzenia, przejdź do ćw. 11.71.

11.71 Wiemy, że funkcja $x \to f(x)$ jest ograniczona tzn. .... takie liczby a, b, że dla .... x jest ...... $f(x)$ .... Jaki przedział w polu funkcji $x \to f(x)$ wystarczy rozważyć, aby móc już wykorzystać ćw. 11.65.
Wróć do ćw. 11.67 i podaj dowód uwzględniając wszystkie założenia.

---

istnieją, każdego,
$a \leqslant b$,

11.72 Dowód twierdzenia 11.67.

$x \to f(x) \in C(R)$ i $x \to f(x)$ ogran. w R

$x - f(x) \in C(R)$ $\quad \bigvee_{a,b} \bigwedge_{x} a \leqslant f(x) \leqslant \ldots$

$\Downarrow$

$a \leqslant f(a)$ i $f(b) \leqslant \ldots$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$f(a)-a \geqslant \ldots \quad f(b)- \ldots$

$\Downarrow$

$\boxed{f(a)-a=0 \text{ lub } f(b)-\ldots=0 \;\Rightarrow\; x_0 = a \quad x_0 = b}$

lub

$\boxed{f(a)-a>0 \text{ i } f(b)-\ldots}$

$\Downarrow$

$$\bigvee_{x_0} f(x_0) = x_0$$

/→ ćw. 11.68/.

---

b, b, 0, $b \geqslant 0$, b, $b < 0$

Gustaw Treliński

PROGRAMING SELF-DEPENDENT WORK OF FIRST YEAR STUDENTS OF MATHEMATICAL FACULTY ON THE EXAMPLE OF A CLASS IN ANALYSIS

The article presents a report on investigation carried out by the author in the years 1967-1969. The purpose of the investigation was to elaborate a sort of work with the students of the first course of the mathematical faculty that would ease their adaptation in the uniwersity, and would help reduce the number of throw-outs through enabling them to overcome encountered difficulties.

The form of organizing self-dependent work of students characterised in detail in the article consists in combining programmed instruction /a guiding text called "Programme" was distributed/ explanatory teaching /a lecture/, problem-solving method, work with a textbook and discussion.

The elaborated project was verified experimentally and its usefulness for practice was evaluated.

In order to determine objectively effects of the experiment, the results of two groups, equivalent in view of some accepted criteria, were compared both in qualitative and in quantitative analysis.

On the grounds of the analysis reinforced hipoteses were formulated concerning the form of organizing work subjected to the experiment. It was establisched that the said form

a/ makes easier to the first-course students to get accustomed to the university system of learning and helps to reduce the number of throw-outs in the first year more effectively than the forms of classes traditionally used in the mathematical faculty of the Higher Pedagogical School in Kraków,

b/ produces results that show a difference /essential on the 0,05 level/ against results reached through traditional forms of classes,

c/ makes possible a more profound understanding and faster acquisition of the taken contents by the students,

d/ its influence on reduction of the number of mistakes concerning concepts and theorems is more evident,

e/ shows a superiority over the traditional method of acquiring the technique of reading mathematical text by the students.

Густав Трелинский

ПРОГРАММИРОВАНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ I-ГО КУРСА ОТДЕЛЕНИЯ МАТЕМАТИКИ НА ПРИМЕРЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Статья представляет собой отчет об исследованиях, проведённых автором в годы 1967, 1968 и 1969 с целью создать формы работы со студентами I-го курса математики, способные облегчить им акклиматизацию в вузе, снизить отсев и создать возможность преодоления трудностей, с какими встречаются математики-первокурсники.

В статье подробно описана форма организации самостоятельной работы студентов, заключающаяся в объединении программированного обучения /студенты получали направляющий текст, именуемый "Программой"/ лекционной подачи материала, проблемного обучения, работы с учебником и дискуссионного метода.

Практическая пригодность такой организации обучения была подвергнута проверке экспериментальным путем.

Для объективного установления результатов эксперимента автор подверг сопоставительному количественному и качественному анализу успехи, достигнутые двумя равносильными по ряду критериев группами I-го курса.

На основании анализа были сформулированы гипотезы, касающиеся экспериментальной формы организации работы студентов. Оказалось, что форма эта

а/ способствует адаптации студентов I-го курса математики к системе обучения в высшей школе и уменьшению отсева, выгодно отличаясь в этом отношении от традиционных форм работы.

б/ обеспечивает успехи, существенно отличающиеся /на уровне 0,05/ от успехов, получаемых при традиционных формах работы

в/ способствует более глубокому пониманию и усвоению студентами учебного материала

г/ существенно влияет на снижение количества ошибок, касающихся понятий и формул

е/ способствует более быстрому, чем при традиционных методах, усвоению студентами техники чтения математического текста.