ROCZNIK NAUKOWO–DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE

Zeszyt 61 Prace matematyczne VIII Rok 1977

Dobiesław Brydak

O NIERÓWNOŚCIACH FUNKCYJNYCH JEDNEJ ZMIENNEJ

Wstęp

W tej pracy będziemy się zajmować nierównościami funkcyjnymi

$$\psi[f(x)] \leq g[x, \psi(x)] \tag{0.1}$$

i

$$\psi[f(x)] \geq g[x, \psi(x)], \tag{0.2}$$

gdzie f i g są funkcjami danymi, a ψ funkcją niewiadomą. W pracy będziemy przyjmować, że równanie funkcyjne

$$\varphi[f(x)] = g[x, \varphi(x)], \tag{0.3}$$

gdzie φ jest funkcją niewiadomą, posiada rozwiązanie. Wtedy obie nierówności (0.1) i (0.2) mają zawsze rozwiązanie.

Większa część pracy dotyczy związków pomiędzy rozwiązaniami nierówności a rozwiązaniami równania. Wiele twierdzeń dotyczy szacowania rozwiązań nierówności przez rozwiązanie równania spełniające odpowiedni warunek początkowy. Taki sposób podejścia do zagadnienia jest podobny, jak w teorii nierówności różniczkowych /patrz [6]/. W szczególności główny rezultat pracy, twierdzenie 4.1, jak kilka innych twierdzeń w tej pracy jest twierdzeniem porównawczym analogicznym do twierdzeń porównawczych, które spotykamy w monografii [6].

Specjalnym przypadkiem nierówności (0.2) są nierówności różnicowe rozważane przez T. Rumaka [5]. Wyniki uzyskane w [5] okazują się być szczególnymi przypadkami twierdzeń dotyczących nierówności (0.2) analogicznych do twierdzeń podanych w punkcie 2 tej pracy dla nierówności (0.1).

Niniejsza publikacja jest streszczeniem pracy [1] oddanej do druku w Rozprawach Matematycznych. Tutaj podajemy w zasadzie tylko wyniki dotyczące nierówności (0.1). Lematy i niektóre wnioski i twierdzenia podajemy bez dowodu. Dowody te, jak również sformułowania wszystkich twierdzeń dla nierówności (0.2), a także pewną ilość przykładów, czytelnik może znaleźć w pracy [1].

1. Założenia

O funkcjach f i g będziemy w dalszym ciągu zakładać, co następuje:

H_1 Funkcja f jest określona i silnie rosnąca w przedziale $I = [\xi, b)$ oraz

(1.1) $f(\xi) = \xi, f(x) < x$ dla $x \in (\xi, b)$.

H_2 Funkcja f jest ciągła w przedziale I.

U w a g a 1. Zarówno ξ, jak b mogą być nieskończone. Funkcję ψ będziemy nazywać ciągłą w $-\infty$, jeśli istnieje skończona granica $\lim_{x \to \infty} \psi(x)$. Granicę tę będziemy oznaczać $\psi(-\infty)$.

U w a g a 2. Założenia H_1 i H_2 implikują, że ξ jest przyciągającym punktem stałym funkcji f, tzn.

(1.2) $$\lim_{n \to \infty} f^n(x) = \xi \qquad \text{dla} \quad x \in I$$

/patrz [4]/, gdzie $f^n(x)$ oznacza n-tą iteratę funkcji f. Z H_1 i H_2 wynika również, że ξ jest jedynym przyciągającym punktem funkcji f w przedziale I.

U w a g a 3. Wyniki przedstawione w tej pracy pozostaną prawdziwe, gdy punkt ξ jest prawym końcem I; w tym przypadku nierówność (1.1) musimy zastąpić nierównością $f(x) > x$, dla $x \in (b, \xi)$ /ξ może być nieskończone/.

H_3 Funkcja g jest określona w zbiorze $\Omega \subset I \times \mathbb{R}$ i przyjmuje wartości w $\mathbb{R}$. Ponadto g jest silnie rosnąca ze względu na drugą zmienną i $\Gamma_x \subset \Omega_{f(x)}$ dla $x \in I$, gdzie $\Omega_x = \{y : (x, y) \in \Omega\}$, a Γ_x jest zbiorem wartości funkcji g dla $y \in \Omega_x$.

U w a g a 4. Skoro równanie (0.3) ma posiadać rozwiązania w I, spełniony musi być warunek

(1.3) $\eta_0 = g(\xi, \eta_0)$,

gdzie η_0 jest wartością rozwiązania φ w punkcie ξ /patrz [4]/.

H_4 1° Funkcja g jest ciągła w Ω

2° Dla każdego $x \in I$, Ω_x jest otwartym przedziałem.

3° $\Gamma_x = \Omega_{f(x)}$ dla $x \in I$.

4° $(\xi, \eta_0) \in \Omega$, gdzie η_0 spełnia (1.3).

W dalszym ciągu rozpatrywać będziemy rozwiązania nierówności (0.1), a także rozwiązania φ równania (0.3) spełniające warunek

(1.4) $\varphi(x), \ \psi(x) \in \Omega_x$ dla $x \in I$.

2. Nieliniowe nierówności

Podamy na wstępie pewne ogólne własności rozwiązań nierówności (0.1).

Twierdzenie 2.1. Niech założenia H_1 i H_3 będą spełnione i niech ψ i φ będą rozwiązaniami (0.1) i (0.3) odpowiednio w I.

1^0 jeśli $x_0 \in (\xi, b)$

oraz

(2.1) $\psi(x_0) < \varphi(x_0)$,

to

(2.2) $\psi[f^n(x_0)] < \varphi[f^n(x_0)]$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$.

2^0 jeśli $x_0 \in I$

oraz

(2.3) $\psi(x_0) \leqslant \varphi(x_0)$,

to

$\psi[f^n(x_0)] \leqslant \varphi[f^n(x_0)]$ dla $n = 0, 1, \ldots$.

Dowód. Dowody obu części twierdzenia 2.1 są podobne, więc udowodnimy tylko pierwszą część. Niech $x_0 \in (\xi, b)$ i niech (2.1) zachodzi. Na podstawie (0.1), (2.1), H_3 i (0.3) otrzymujemy

$$\psi[f(x_0)] \leqslant g[x_0, \psi(x_0)] < g[x_0, \varphi(x_0)] = \varphi[f(x_0)]$$

Nierówność (2.2) zachodzi zatem dla $n = 1$. Załóżmy, że (2.2) zachodzi dla liczby naturalnej $k \geqslant 1$. Wtedy, kładąc $f^k(x_0)$ w miejsce x_0 w nierówności (2.1) widzimy, że (2.2) zachodzi dla $n = k + 1$, a więc twierdzenie zostało udowodnione przez indukcję.

Natychmiastową konsekwencją twierdzenia 2.1 są następujące wnioski:

Wniosek 2.1. Niech założenia $H_1 - H_3$ będą spełnione i niech ψ i φ będą rozwiązaniami nierówności (0.1) i równania (0.3), odpowiednio, w I. Niech ponadto funkcje ψ i φ będą ciągłe w punkcie ξ. Jeśli istnieje taki punkt $x_0 \in (\xi, b)$, że nierówność (2.3) jest spełniona, to

$$\psi(\xi) \leqslant \varphi(\xi)$$

Wniosek 2.2. Niech założenia H_1 i H_3 będą spełnione i niech ψ i φ będą rozwiązaniami nierówności (0.1) i równania (0.3), odpowiednio, w I. Wtedy

1^0 Jeśli $x_0 \in (\xi, b)$

oraz

(2.4) $\psi(x_0) > \varphi(x_0)$,

to

(2.5) $\psi[f^{-n}(x_0)] > \varphi[f^{-n}(x_0)]$ dla $n = 1, 2, \ldots$.

2^0 Jeśli $x_0 \in I$ oraz

(2.6) $\psi(x_0) \geqslant \varphi(x_0)$,

to

(2.7) $\psi[f^{-n}(x_0)] \geqslant \varphi[f^{-n}(x_0)]$ dla $n = 0, 1, \ldots$.

Wniosek 2.3. Niech założenia H_1 i H_3 będą spełnione i niech ψ i φ będą rozwiązaniami nierówności (0.1) i równania (0.3), odpowiednio, w I. Niech ponadto $x_0 \in (\xi, b)$.

(i) Jeśli

$$\psi(x) < \varphi(x) \quad \text{dla} \quad x \in [f(x_0), x_0],$$

to

$$\psi(x) < \varphi(x) \quad \text{dla} \quad x \in (\xi, x_0].$$

(ii) Jeśli

$$\psi(x) \leq \varphi(x) \quad \text{dla} \quad x \in [f(x_0), x_0],$$

to

$$\psi(x) \leq \varphi(x) \quad \text{dla} \quad x \in (\xi, x_0].$$

(iii) Jeśli

$$\psi(x) > \varphi(x) \quad \text{dla} \quad x \in [f(x_0), x_0],$$

to

$$\psi(x) > \varphi(x) \quad \text{dla} \quad x \in [f(x_0), b).$$

(iv) Jeśli

$$\psi(x) \geq \varphi(x) \quad \text{dla} \quad x \in [f(x_0), x_0],$$

to

$$\psi(x) \geq \varphi(x) \quad \text{dla} \quad x \in [f(x_0), b).$$

Niech funkcje ψ_1 i ψ_2 będą określone w przedziale I. Oznaczmy

(2.8) $$\psi_1 \cup \psi_2(x) = \max[\psi_1(x), \psi_2(x)] \quad \text{dla} \quad x \in I$$

(2.9) $$\psi_1 \cap \psi_2(x) = \min[\psi_1(x), \psi_2(x)] \quad \text{dla} \quad x \in I.$$

Twierdzenie 2.2. Niech założenia H_1 i H_3 będą spełnione i niech ψ_1 i ψ_2 będą określone w przedziale I.

1^0 Jeśli ψ_1 i ψ_2 spełniają nierówność (0.1) w I, to również $\psi_1 \cup \psi_2$ oraz $\psi_1 \cap \psi_2$ spełniają tę nierówność w I.

2^0 Jeśli ψ_1 i ψ_2 spełniają równanie (0.3) w I, to również $\psi_1 \cup \psi_2$ oraz $\psi_1 \cap \psi_2$ spełniają to równanie w I.

D o w ó d. Niech ψ_1 i ψ_2 spełniają (0.1) w I i niech $x \in I$. Jeśli

(2.10) $$\psi_1(x) \leq \psi_2(x)$$

i

(2.11) $$\psi_1[f(x)] \leq \psi_2[f(x)],$$

to na podstawie (2.8) mamy

$$\psi_1 \cup \psi_2(x) = \psi_2(x) \quad \text{oraz} \quad \psi \cup \psi_2[f(x)] = \psi_2[f(x)],$$

skąd wynika, że $\psi_1 \cup \psi_2$ spełnia (0.1) w x ponieważ ψ_2 spełnia (0.1) w x. Nierówności (2.10) i (2.11) implikują również, że

$$\psi_1 \cap \psi_2(x) = \psi_1(x) \quad \text{oraz} \quad \psi_1 \cap \psi_2[f(x)] = \psi_1[f(x)],$$

skąd wynika, że $\psi_1 \cap \psi_2$ spełnia (0.1) w x, ponieważ ψ_1 spełnia (0.1) w x. Dowód przebiega analogicznie, jeśli zamiast (2.10) i (2.11) spełnione są przeciwne nierówności. Załóżmy teraz, że zachodzi (2.10) i

(2.12)
$$\psi_1[f(x)] \geqslant \psi_2[f(x)].$$

Z (2.8), (2.10) i (2.12) wynika, że

$$\psi_1 \cup \psi_2[f(x)] = \psi_1[f(x)] \quad \text{i} \quad \psi_1 \cup \psi_2(x) = \psi_2(x).$$

Na podstawie (2.8) i (0.1) otrzymujemy teraz

$$\psi_1 \cup \psi_2[f(x)] = \psi_1[f(x)] \leqslant g[x, \psi_1(x)] \leqslant g[x, \psi_2(x)] = g[x, \psi_1 \cup \psi_2(x)],$$

ponieważ funkcja g jest silnie rosnąca ze względu na drugą zmienną na podstawie założenia H_3. Zatem $\psi_1 \cup \psi_2$ spełnia (0.1) w x.

Na podstawie (2.9), (2.10), (2.12) i H_3 otrzymujemy

$$\psi_1 \cap \psi_2[f(x)] = \psi_2[f(x)] \quad \text{i} \quad \psi_1 \cup \psi_2(x) = \psi_1(x).$$

Stąd, wobec (2.9), (0.1) i H_3 mamy

$$\psi_1 \cap \psi_2[f(x)] = \psi_2[f(x)] \leqslant \psi_1[f(x)] \leqslant g[x, \psi_1(x)] = g[x, \psi_1 \cap \psi_2(x)],$$

a więc $\psi_1 \cap \psi_2$ spełnia nierówność (0.1) w x. Jeśli nierówności (2.10) i (2.12) zastąpimy nierównościami przeciwnymi, dowód będzie analogiczny.

Załóżmy teraz, że i φ_1 i φ_2 spełniają równanie (0.3) w I, $x \in I$ i że

(2.13)
$$\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x).$$

Z twierdzenia 2.1 wynika, że

$$\varphi_1[f(x)] \leqslant \varphi_2[f(x)].$$

Otrzymujemy stąd, na podstawie (2.8), (0.3) i (2.13), że

$$\varphi_1 \cup \varphi_2[f(x)] = \varphi_2[f(x)] = g[x, \varphi_2(x)] = g[x, \varphi_1 \cup \varphi_2(x)].$$

Zatem funkcja $\varphi_1 \cup \varphi_2$ spełnia równanie (0.3) w x, a więc również w całym przedziale I, bo x było dowolnym punktem I. Dowód dla $\varphi_1 \cap \varphi_2$ jest analogiczny. Analogiczny jest również dowód w przypadku, gdy zamiast nierówności (2.13), założymy nierówność przeciwną.

Skoro rodzina funkcji określonych na pewnym zbiorze tworzy kratę dystrybutywną /patrz [7]/ z działaniami (2.8) i (2.9), więc jako natychmiastowy wniosek z twierdzenia 2.2, otrzymujemy następujące

Twierdzenie 2.3. Niech założenia H_1 i H_3 będą spełnione. Wtedy rodzina wszystkich rozwiązań nierówności (0.1) w I, jak również rodzina wszystkich rozwiązań równania (0.3) w I jest kratą dystrybutywną z działaniami $\cup$ i $\cap$.

W dalszym ciągu będziemy zajmować się rozwiązaniami ciągłymi nierówności (0.1) i równania (0.3), dlatego też wprowadzimy w tym miejscu następującą definicję:

Definicja 2.1. Niech założenia $H_1 - H_4$ będą spełnione. Przez L oznaczamy rodzinę wszystkich ciągłych rozwiązań nierówności (0.1) w I, a przez L_0 oznaczamy rodzinę wszystkich ciągłych rozwiązań równania (0.3) w I.

Działania $\cup$ i $\cap$ zachowują ciągłość funkcji, a zatem jak natychmiastowy wniosek z twierdzenia 2.3, otrzymujemy następujące

Twierdzenie 2.4. Jeśli założenia $H_1 - H_4$ są spełnione, to rodziny L i L_0 stanowią kraty dystrybutywne z działaniami $\cup$ i $\cap$.

3. Ciągłe rozwiązania nierówności liniowych jednorodnych

Zajmiemy się tutaj nierównościami liniowymi jednorodnymi

$$\psi[f(x)] \leqslant g(x)\psi(x) \tag{3.1}$$

oraz

$$\psi[f(x)] \geqslant g(x)\psi(x), \tag{3.2}$$

gdzie f i g są funkcjami danymi, a ψ funkcją niewiadomą. O funkcji f będziemy w dalszym ciągu zakładać, że spełnia założenia H_1 i H_2, natomiast o funkcji g zakładamy, że

H_5. Funkcja g jest określona i ciągła w przedziale I oraz $g(x)>0$ dla $x\in I$.

Z założenia H_5 wynika natychmiast następujący

Lemat 3.1. Jeśli założenie H_5 jest spełnione, to funkcja $g(x,y) = g(x)\cdot y$ spełnia założenia H_3 i H_4 w $\Omega = I \times \mathbb{R}$.

Lemat ten pozwala nam wykorzystywać dla nierówności liniowych jednorodnych wszystkie twierdzenia podane dotychczas dla nierówności nieliniowych. Rolę równania (0.3) będzie, dla nierówności (3.1) i (3.2), spełniać równanie

$$\varphi[f(x)] = g(x)\varphi(x). \tag{3.3}$$

Zachowanie się rozwiązań nierówności (3.1) i (3.2), jak również rozwiązań równania (3.3), zależą od zachowania się ciągu

$$G_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1} g[f^i(x)], \quad x\in I,\ n = 1, 2, \ldots \tag{3.4}$$

Łatwo sprawdzić, że

(3.5) $$G_{n+1}(x) = g(x)\, G_n\left[f(x)\right], \quad x \in I, \; n = 1, 2, \ldots$$

W dalszym ciągu będziemy rozważać nierówność (3.1) w następujących przypadkach

1^0 Granica

(3.6) $$G(x) = \lim_{n \to \infty} G_n(x)$$

istnieje w I i jest funkcją ciągłą i różną od zera w I.

2^0 $$\lim_{n \to \infty} G_n(x) = \infty \quad \text{dla} \quad x \in I.$$

3^0 Istnieje przedział $J \subset I$ taki, że

(3.7) $$\lim_{n \to \infty} G_n(x) = 0$$

jednostajnie w J.

Badanie nierówności (3.1) i (3.2) będziemy prowadzić w oparciu o teorię równania liniowego jednorodnego (3.3) i dlatego podstawowe wyniki tej teorii /patrz [4]/, z których będziemy korzystać, przedstawimy tutaj jako

Lemat 3.2. Niech założenia H_1, H_2 i H_5 będą spełnione. W przypadku 1^0 równanie (3.3) posiada jednoparametrową rodzinę ciągłych rozwiązań w I, przyjmujących wartości w E, tzn. dla każdego $\eta_0 \in E$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie φ równania (3.3), ciągłe w I i spełniające warunek

(3.8) $$\varphi(\xi) = \eta_0$$

To rozwiązanie jest dane wzorem

(3.9) $$\varphi(x) = \frac{\eta_0}{G(x)}$$

W przypadku 2^0 funkcja $\varphi(x) = 0$ dla $x \in I$ jest jedynym rozwiązaniem równania (3.3) w I.

W przypadku 3^0 równanie (3.3) posiada w I ciągłe rozwiązanie zależne od dowolnej funkcji. W tym przypadku każde ciągłe rozwiązanie φ równania (3.3) w I spełnia warunek

(3.10) $$\lim_{x \to \xi} \varphi(x) = \varphi(\xi) = 0.$$

Przypadki 1^0 - 3^0 nie wyczerpują wszystkich możliwości. W innych przypadkach funkcja identycznie równa zeru w I jest jedynym rozwiązaniem ciągłym równania (3.3) w I. W tej pracy będziemy rozpatrywać tylko przypadki 1^0 - 3^0.

W dalszym ciągu będziemy korzystać z następującego lematu, który przytaczamy bez dowodu.

Lemat 3.3. Niech założenia H_1, H_2 i H_5 będą spełnione. Jeśli funkcja ψ spełnia nierówność (3.1) w I, to

(3.11) $$\psi\left[f^n(x)\right] \leqslant G_n(x)\,\psi(x) \quad \text{dla} \quad x \in I,\ n = 1, 2, \ldots$$

Jeśli funkcja φ spełnia równanie (3.3) w I, to

(3.12) $$\varphi\left[f^n(x)\right] = G_n(x)\,\varphi(x) \quad \text{dla} \quad x \in I,\ n = 1, 2, \ldots$$

W dalszym ciągu udowodnimy następujące

Twierdzenie 3.1. Niech założenia H_1, H_2 i H_5 będą spełnione i niech zachodzi przypadek 1^0. Jeśli ψ jest ciągłym rozwiązaniem nierówności (3.1) w I, to

(3.13) $$\psi(x) \geqslant \varphi_0(x) \quad \text{dla} \quad x \in I,$$

gdzie φ_0 jest ciągłym rozwiązaniem równania (3.3) w I, danym wzorem

(3.14) $$\varphi_0(x) = \frac{\psi(\xi)}{G(x)} \quad \text{dla} \quad x \in I.$$

Rozwiązanie φ_0 spełnia następujace warunki

(3.15) $$\varphi_0(\xi) = \psi(\xi)$$

oraz jeśli φ jest ciągłym rozwiązaniem (3.3) w I, spełniającym nierówność

(3.16) $$\varphi(x_0) > \varphi_0(x_0)$$

dla pewnego $x_0 \in I$, to

(3.17) $$\varphi(\xi) > \psi(\xi).$$

D o w ó d. Z lematu 3.2 wynika natychmiast, że φ_0 jest ciągłym rozwiązaniem równania (3.3) w I. Warunek (3.15) wynika więc wprost z (3.8) i (3.9). Udowodnimy teraz nierówność (3.13). Niech ψ będzie ciągłym rozwiązaniem nierówności (3.1) w I. Z lematu (3.3) wynika, że

$$\frac{\psi\left[f^n(x)\right]}{G_n(x)} \leqslant \psi(x) \quad \text{dla} \quad x \in I,\quad n = 1, 2, \ldots$$

skąd otrzymujemy na mocy (1.2) i (3.6),

$$\frac{\psi(\xi)}{G(x)} \leqslant \psi(x) \quad \text{dla} \quad x \in I,$$

ponieważ funkcja ψ jest ciągła w I. Nierówność (3.13) została w ten sposób udowodniona.

Załóżmy teraz, że φ jest takim ciągłym rozwiązaniem równania (3.3), dla którego zachodzi nierówność (3.16). Skoro rodzina ciągłych rozwiązań równania (3.3) jest jednoparametrowa, na mocy lematu 3.2, więc z nierówności (3.16) wynika, że $\varphi(x) > \varphi_0(x)$ dla $x \in I$. Ostatnia nierówność wraz z warunkiem (3.15), udowodnionym poprzednio, implikuje (3.17), co kończy dowód twierdzenia.

Warunki twierdzenia 3.1 oznaczają, że φ_0 jest maksymalnym, dla danego ψ_1, ciągłym rozwiązaniem równania (3.3), w I, które spełnia (3.13).

Twierdzenie 3.1 pozwala uzyskać analogon do twierdzeń porównawczych zawartych w teorii nierówności różniczkowych. Natychmiastowym wnioskiem z twierdzenia 3.1 jest mianowicie następujące

<u>Twierdzenie 3.2</u>. Niech założenia H_1, H_2 i H_5 będą spełnione i niech zachodzi przypadek 1^0. Niech ponadto φ będzie ciągłym rozwiązaniem równania (3.3) w I. Jeśli

$$\psi(\xi) \geqslant \varphi(\xi),$$

to

$$\psi(x) \geqslant \varphi(x) \quad \text{dla} \quad x \in I.$$

<u>Definicja 3.1</u>. Niech funkcja ψ będzie określona w I i niech $\psi(x) \in E$ dla $x \in I$. Dla $x \in I$ oznaczamy przez $\eta(x)$ wartość w punkcie ξ tego ciągłego rozwiązania φ równania (3.3) w I, które spełnia warunek

$$\varphi(x) = \psi(x).$$

Z definicji 3.1 wynika natychmiast, że

$$\psi(x) = \frac{\eta(x)}{G(x)} \quad \text{dla} \quad x \in I, \tag{3.18}$$

na mocy lematu 3.2. Wzór (3.18) i lemat 3.2 implikują następujący

<u>Lemat 3.4</u>. Jeśli założenia H_1, H_2 i H_5 są spełnione i zachodzi przypadek 1^0, to funkcja ψ jest ciągła w I wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja η jest ciągła w I.

W dalszym ciągu będzie nam potrzebna następująca

<u>Definicja 3.2</u>. Funkcję η określoną w I nazywamy $\{f\}$ - malejącą w I, jeśli

$$\eta[f(x)] \leq \eta(x) \quad \text{dla} \quad x \in I. \tag{3.19}$$

Funkcję η określoną w I nazywamy $\{f\}$ - rosnącą w I, jeśli

$$\eta[f(x)] \geqslant \eta(x) \quad \text{dla} \quad x \in I.$$

Definicję funkcji $\{f\}$ - monotonicznej podaną tutaj znaleźć można w monografii [4].

Pokażemy teraz, że zachodzi odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna pomiędzy rodziną wszystkich funkcji $\{f\}$ - malejących i ciągłych w I i rodziną wszystkich ciągłych rozwiązań nierówności (3.1) w I w przypadku 1^0. Udowodnimy mianowicie następujące

<u>Twierdzenie 3.3</u>. Niech założenia H_1, H_2 i H_5 będą spełnione i niech zachodzi przypadek 1^0. Jeśli ψ jest funkcją określoną w I, to warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by ψ było ciągłym rozwiąza-

niem (3.1) w I jest, aby funkcja η, określona przez definicję 3.1, była $\{f\}$ - malejącą i ciągłą w I.

D o w ó d. Niech ψ będzie ciągłym rozwiązaniem nierówności (3.1) w I. Z (3.18) i (3.1) otrzymujemy

$$\frac{\eta[f(x)]}{G[f(x)]} = \psi[f(x)] \leqslant g(x)\,\psi(x) = g(x)\frac{\eta(x)}{G(x)} = g(x)\frac{\eta(x)}{g(x)G[f(x)]}$$

dla $x \in I$,
na podstawie (3.5) i (3.6). Stąd wynika (3.19), ponieważ g i G są dodatnie w I.

Załóżmy teraz, że (3.19) zachodzi. Otrzymujemy na podstawie (3.18), (3.19), (3.5) i (3.6), że

$$\psi[f(x)] = \frac{\eta[f(x)]}{G[f(x)]} \leqslant \frac{\eta(x)}{G[f(x)]} = g(x)\frac{\eta(x)}{G(x)} = g(x)\,\psi(x) \quad \text{dla}$$

$x \in I$,
a więc że zachodzi (3.1). Na podstawie lematu 3.4 funkcja ψ jest ciągła w I, wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja η jest ciągła w I, co kończy dowód twierdzenia.

Skoro funkcja η jest określona przez definicję (3.1) jednoznacznie, wzór (3.17) i twierdzenie 3.3 dają odpowiedniość wzajemnie jednoznaczną pomiędzy rodziną wszystkich rozwiązań ciągłych nierówności (3.1) w I a rodziną wszystkich funkcji $\{f\}$ -malejących i ciągłych w I.

Zauważmy, że jeśli ψ jest ciągłym rozwiązaniem (3.1) w I to z twierdzenia 3.2 wynika, że jeśli

(3.20) $$\psi(\xi) > 0$$
to
(3.21) $$\psi(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x \in I,$$
a także, że funkcja

$$\bar{\eta}(x) = \frac{\eta(x)}{\psi(\xi)} \quad \text{dla} \quad x \in I$$

jest określona, ciągła i $\{f\}$ -malejąca w I, na podstawie twierdzenia 3.3. W ten sposób możemy ustalić wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy rodziną wszystkich dodatnich i ciągłych rozwiązań (3.1) w I a rodziną wszystkich $\{f\}$ -malejących i ciągłych w I funkcji spełniających warunek

(3.22) $\bar{\eta}(\xi) = 1.$
Odpowiedniość tę ustala następujący

<u>Wniosek 3.1</u>. Niech założenia H_1, H_2 i H_5 będą spełnione i niech zachodzi przypadek 1°. Jeśli ψ jest ciągłym rozwiązaniem nierówności (3.1) w I, spełniającym warunek (3.21), to istnieje dokładnie jedna funkcja $\bar{\eta}(x)$, określona, $\{f\}$ -malejąca i ciągła w I i spełniająca warunek (3.22) taka, że

(3.23) $$\psi(x) = \frac{\bar{\eta}(x)}{G(x)} \quad \text{dla} \quad x \in I.$$

Jeśli η jest funkcją określoną, $\{f\}$-malejącą i ciągłą w I oraz spełniającą warunek (3.22), to istnieje dokładnie jedno ciągłe rozwiązanie ψ nierówności (3.1) w I spełniające warunek (3.21) i takie, że (3.23) zachodzi.

W przypadku, gdy zamiast (3.20) spełniony jest warunek
(3.24) $\psi(\xi) = 0$ otrzymujemy podobny wynik. Mianowicie prostą konsekwencją twierdzenia 3.3 i (3.18) jest następujący

Wniosek 3.2. Niech założenia H_1, H_2 i H_5 będą spełnione i niech zachodzi przypadek 1^0.

Jeśli ψ jest ciągłym rozwiązaniem nierówności (3.1) w I, spełniającym warunek (3.24), to istnieje dokładnie jedna $\{f\}$-malejąca funkcja η ciągła w I i spełniająca warunek

(3.25) $$\eta(\xi) = 0$$

taka, że zachodzi (3.18).

Jeśli η jest $\{f\}$-malejącą funkcją ciągłą w I i spełniającą (3.25), to istnieje dokładnie jedno ciągłe rozwiązanie ψ nierówności (3.1) w I, spełniające (3.24) takie, że zachodzi (3.18).

Skoro nierówność (3.19) jest szczególnym przypadkiem nierówności (3.1), więc wnioski 3.1 i 3.2 pozwalają nam sprowadzić badanie nierówności (3.1) w przypadku 1^0 do badania nierówności (3.19), ponieważ łatwo sprawdzić, że dla tej ostatniej nierówności zachodzi przypadek 1^0.

Przykład. Niech $f(x) = \frac{x}{2}$, $g(x) = e^{-\frac{x}{2}}$, $\xi = 0$, $b = \infty$. Wtedy nierówność (3.1) przyjmuje postać

$$\psi\left(\frac{x}{2}\right) \leq e^{-\frac{x}{2}}\psi(x) \qquad \text{dla} \quad x \in [0, \infty).$$

Łatwo sprawdzić, że zachodzi przypadek 1^0 i że w myśl (3.9),

$$\psi(x) = \eta(x)e^{x} \qquad \text{dla} \quad x \in [0, \infty),$$

gdzie η jest dowolną $\left\{\frac{x}{2}\right\}$-malejącą funkcją ciągłą w $[0, \infty)$.

W przypadku 2^0 prawdziwe jest również twierdzenie analogiczne do twierdzenia 3.1. Udowodnimy mianowicie, następujące

Twierdzenie 3.4. Niech założenia H_1, H_2 i H_5 będą spełnione i niech zachodzi przypadek 2^0. Jeśli ψ jest ciągłym rozwiązaniem nierówności (3.1) w I, to

$$\psi(x) \geq 0 \qquad \text{dla} \quad x \in I.$$

D o w ó d. Niech ψ będzie ciągłym rozwiązaniem (3.1) w I. Z lematu 3.3 wynika, że

$$\psi(x) \geq \frac{\psi[f^n(x)]}{G_n(x)} \qquad \text{dla} \quad x \in I,$$

skąd otrzymujemy tezę twierdzenia, wobec (1.2), ciągłości ψ oraz założenia, że zachodzi przypadek 2^{0}.

Skoro w przypadku 2^{0} jedynym jedynym rozwiązaniem ciągłym równania (3.3) w I jest funkcja identycznie równa zeru w I /patrz lemat 3.2/, więc twierdzenie 3.4 daje istotnie wynik analogiczny do twierdzenia 3.1. Nie możemy w tym przypadku otrzymać rezultatów analogicznych do wniosków 3.1 i 3.2, bo nie istnieją rozwiązania nietrywialne (3.3).

Przejdźmy teraz do rozważenia ostatniego przypadku 3^{0}. Najpierw podamy kilka lematów.

Lemat 3.5. Niech założenie H_1 będzie spełnione i niech g będzie funkcją określoną i dodatnią w I.

Jeśli ψ spełnia (3.1) w I, to ciąg

$$\frac{\psi[f^{n}(x)]}{G_n(x)} \quad \text{dla} \quad x \in I$$

jest malejący w I.

Lemat 3.6. Niech założenia H_1, H_2 i H_5 będą spełnione i niech zachodzi przypadek 3^{0}. Jeśli ψ spełnia (3.1) w I i jest ciągła w ξ, to

$$\psi(\xi) \leq 0$$

Definicja 3.3. Niech φ_1 będzie dowolnym rozwiązaniem (3.3) w I, ciągłym w ξ. Oznaczmy przez $\bar{\Psi}$ rodzinę ciągłych rozwiązań nierówności (3.1) w I, spełniających warunek (3.24) oraz warunek

$$\psi(x) \geqslant \varphi_1(x) \quad \text{dla} \quad x \in I.$$

Lemat 3.7. Niech założenia H_1, H_2 i H_5 będą spełnione i niech zachodzi przypadek 3^{0}. Jeśli $\psi \in \bar{\Psi}$, to granica

$$\varphi_0(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\psi[f^{n}(x)]}{G_n(x)} \quad \text{dla} \quad x \in I \tag{3.26}$$

istnieje i φ_0 jest rozwiązaniem (3.3) półciągłym z góry w I i ciągłym w ξ. Ponadto

$$\psi(x) \geqslant \varphi_0(x) \quad \text{dla} \quad x \in I. \tag{3.27}$$

Lemat 3.8. Niech założenia lematu 3.7 będą spełnione i niech φ będzie rozwiązaniem (3.3) w I. Jeśli $\psi \in \bar{\Psi}$ oraz x_0 jest takim punktem wewnętrznym I, że

$$\varphi_0(x_0) < \varphi(x_0), \tag{3.28}$$

to istnieje taka liczba naturalna k, że

$$\psi[f^{k}(x_0)] < \varphi[f^{k}(x_0)].$$

Jeśli nierówność (3.28) zachodzi nie tylko w jednym punkcie x_0, ale w całym przedziale

(3.29) $$I_0 = [f(x_0),\, x_0],$$

to dla każdego $x \in I_0$ istnieje liczba naturalna k taka, że zachodzi nierówność

(3.30) $$\psi[f^k(x)] < \varphi[f^k(x)] \qquad \text{dla} \quad x \in I_0,$$

gdzie k zależy na ogół od x. Liczba k będzie niezależna od x dopiero przy dodatkowych założeniach. Udowodnimy mianowicie następujące

<u>Twierdzenie 3.5</u>. Niech założenia H_1, H_2 i H_5 będą spełnione i niech zachodzi przypadek 3^0. Jeśli $\psi \in \tilde{\Psi}$ i φ jest ciągłym rozwiązaniem równania (3.3) w I, takim że

(3.31) $$\varphi(x) > \varphi_0(x) \qquad \text{dla} \quad x \in I_0,$$

gdzie x_0 jest wewnętrznym punktem I, a φ_0 jest dane wzorem (3.26), to istnieje taka liczba naturalna k /niezależna od x/, że zachodzi nierówność (3.30).

D o w ó d. Przypuśćmy, że twierdzenie nie jest prawdziwe. Wtedy istnieje funkcja $\psi \in \tilde{\Psi}$ i ciągłe rozwiązanie φ równania (3.3) w I, a także taki punkt wewnętrzny x_0 przedziału I, że zachodzi nierówność (3.31), ale dla każdej naturalnej liczby n istnieje punkt $x_n \in I$ taki, że

(3.32) $$\varphi[f^n(x_n)] \leqslant [f^n(x_n)].$$

Pokażemy, że

(3.33) $$\varphi[f^k(x_n)] \leqslant \psi[f^k(x_n)] \qquad \text{dla} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Istotnie, jeśli dla pewnego naturalnego $k < n$ zachodzi

$$\varphi[f^k(x_n)] > \psi[f^k(x_n)],$$

to z założenia H_1 i twierdzenia 2.1 otrzymujemy

$$\varphi[f^n(x_n)] > \psi[f^n(x_n)]$$

wbrew (3.32).

Skoro przedział I_0 jest zwarty, więc istnieje ciąg x_{k_n}, wybrany z ciągu x_n, zbieżny do pewnego $\bar{x} \in I_0$. Z ciągłości funkcji φ i z nierówności (3.33) otrzymujemy więc

$$\varphi[f^k(\bar{x})] \leqslant \psi[f^k(\bar{x})] \qquad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Otrzymana nierówność sprzeczna jest z lematem 3.8, co kończy dowód twierdzenia.

W dalszym ciągu ograniczymy nasze rozważania do węższej niż $\bar{\Psi}$ rodziny rozwiązań, aby móc uzyskać twierdzenia o własnościach rozwiązania φ_0, a w szczególności pozwalające rozstrzygnąć, kiedy φ_0 jest funkcją ciągłą.

Definicja 3.4. Oznaczmy przez Φ rodzinę wszystkich rozwiązań ciągłych równania (3.3) w I i spełniających warunek

$$\varphi(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x \in (\xi, b). \tag{3.34}$$

Oznaczmy przez Ψ rodzinę wszystkich rozwiązań ciągłych i nieujemnych nierówności (3.1) w I.

Zauważmy, że jeśli $\psi \in \Psi$, to spełniony jest warunek (3.24), na mocy lematu 3.6, a więc $\Psi \subset \bar{\Psi}$, jeśli w definicji 3.3 przyjmiemy $\varphi_1(x) = 0$ dla $x \in I$. Rodzina Φ może być zbiorem pustym, bowiem równanie (3.3) może nie mieć ciągłych rozwiązań różnych od zera w całym I /patrz [8]/. Aby zapewnić sobie, że $\Phi \neq \emptyset$ wprowadzamy następujące założenie

H_6. Istnieje taki punkt wewnętrzny x_0 przedziału I, że $\lim_{n\to\infty} G_n(x) = 0$ jednostajnie w I_0, gdzie I_0 jest dane wzorem (3.29).

Łatwo sprawdzić, że H_6 zapewnia, że zachodzi przypadek 3^0, ale nie na odwrót /patrz [2]/. Założenie H_6 jest warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby spełniony był warunek $\Phi \neq \emptyset$ /patrz [8]/.

Twierdzenie 3.6. Niech założenia H_1, H_2, H_5 i H_6 będą spełnione i niech ψ będzie ciągłym rozwiązaniem nierówności (3.1) w I. Jeśli $\varphi_0 \in \Phi$, gdzie φ_0 jest dane wzorem (3.26), to ψ spełnia (3.24) i

$$\lim_{x\to\xi} \frac{\psi(x)}{\varphi_0(x)} = 1. \tag{3.35}$$

D o w ó d. Równość (3.24) wynika natychmiast z (3.27) i (3.34), na podstawie lematu 3.6 i definicji 3.4. Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Połóżmy

$$c = 1 + \varepsilon. \tag{3.36}$$

Funkcja $c\varphi_0(x)$ jest ciągła w I, na podstawie założenia, że $\varphi_0 \in \Phi$ i definicji 3.4 i spełnia (3.3), co łatwo sprawdzić. Skoro $\varepsilon > 0$, to

$$\varphi(x) = c\varphi_0(x) \geqslant \varphi_0(x) \quad \text{dla} \quad x \in I, \tag{3.37}$$

na podstawie (3.36) i (3.34).

Niech x będzie punktem wewnętrznym I. Warunek (3.37) pociąga (3.31), zatem istnieje taka liczba naturalna k, że zachodzi również (3.30), na podstawie twierdzenia 3.5. Oznaczmy

$$d_k = f^k(x_0).$$

Nierówność (3.30) implikuje na podstawie wniosku 2.3, że

$$\psi(x) \leqslant \varphi(x) \quad \text{dla} \quad x \in (\xi, d_k). \tag{3.38}$$

Stąd

$$1 \leqslant \frac{\psi(x)}{\varphi_0(x)} \leqslant 1 + \varepsilon \qquad \text{dla} \quad x \in (\xi, d_k),$$

na podstawie (3.27),(3.38), (3.34), (3.37) i (3.36). Ostatni warunek implikuje (3.35), co kończy dowód twierdzenia.

W przypadku 3^0 możemy również otrzymać twierdzenia podobne do twierdzeń 3.2 i 3.4, ale w węższej klasie funkcji, niż funkcje ciągłe.

Definicja 3.5. Niech $\bar{\varphi} \in \Phi$. Rodzinę wszystkich funkcji $\varphi \in \Phi$ takich, że granica

$$\lim_{n \to \xi} \frac{\varphi(x)}{\bar{\varphi}(x)} = a \tag{3.39}$$

istnieje, oznaczmy przez $\Phi(\bar{\varphi})$.

Rodzinę wszystkich takich funkcji $\psi \in \Psi$, że granica

$$\lim_{x \to \xi} \frac{\psi(x)}{\bar{\varphi}(x)} = c \tag{3.40}$$

istnieje dla pewnej funkcji $\bar{\varphi} \in \Phi$, oznaczmy przez Ψ_0.

Własności rodzin $\Phi(\bar{\varphi})$ oraz Ψ_0 podają następujące lematy

Lemat 3.9. Jeśli $\bar{\varphi} \in \Phi$ i $\varphi \in \Phi(\bar{\varphi})$, to

$$\lim_{x \to \xi} \frac{\varphi(x)}{\bar{\varphi}(x)} \neq 0.$$

Lemat 3.10. Jeśli $\bar{\varphi} \in \Phi$ oraz $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi(\bar{\varphi})$, to granica

$$\lim_{x \to \xi} \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}$$

istnieje i jest różna od zera.

Lemat 3.11. Niech $\bar{\varphi} \in \Phi$. Rodzina $\Phi(\bar{\varphi})$ jest jednoparametrową rodziną funkcji φ określonych wzorem

$$\varphi(x) = a\,\bar{\varphi}(x) \qquad \text{dla} \quad x \in I, \tag{3.41}$$

gdzie a jest dane wzorem (3.39).

Twierdzenie 3.7. Niech założenia H_1, H_2, H_5 i H_6 będą spełnione. Jeśli $\psi \in \Psi$ i $\bar{\varphi} \in \Phi$, granica (3.40) istnieje oraz c jest dane wzorem (3.40), to

$$\psi(x) \geqslant c\,\bar{\varphi}\,x \qquad \text{dla} \quad x \in I. \tag{3.42}$$

D o w ó d. Niech $\psi \in \Psi_0$ i $\bar{\varphi} \in \Phi$ i niech granica (3.40) istnieje. Skoro ψ spełnia (3.1), wobec definicji 3.5, to funkcja

$$\bar{\varphi}(x) = \begin{cases} \dfrac{\psi(x)}{\bar{\varphi}(x)} & \text{dla} \quad x \in (\xi, b) \\ c & \text{dla} \quad x = \xi \end{cases} \tag{3.43}$$

jest ciągłym rozwiązaniem nierówności (3.19) w I. Zatem (3.42) wynika z lematu 3.2 i twierdzenia 3.1, na podstawie (3.43), (3.40) oraz (3.34).

Wniosek 3.7. Niech założenia twierdzenia 3.7 będą spełnione. Jeśli granica (3.40) jest różna od zera, to dla każdego $\varphi \in \Phi(\bar{\varphi})$ istnieje granica $\lim_{x \to \xi} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$

Wniosek 3.8. Niech założenia twierdzenia 3.7 będą spełnione. Jeśli $\varphi \in \Phi \setminus \Phi(\bar{\varphi})$ i granica

$$d = \lim_{x \to \xi} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

istnieje, to $d = 0$.

W klasie Ψ_0 prawdziwe jest twierdzenie analogiczne do twierdzenia 3.3.

Twierdzenie 3.8. Niech założenia H_1, H_2, H_5 i H_6 będą spełnione. Jeśli $\psi \in \Psi_0$, wtedy istnieje wyznaczona jednoznacznie funkcja η określona, $\{f\}$-malejąca i ciągła w I taka, że

$$\varphi(x) = \varphi_0(x)\eta(x) \quad \text{dla} \quad x \in I \tag{3.43}$$

oraz

$$\eta(\xi) = 1, \tag{3.44}$$

gdzie φ_0 jest dane wzorem (3.26) i $\varphi_0 \in \Phi$.

D o w ó d. Niech $\psi \in \Psi_0$ i niech $\bar{\varphi} \in \Phi$ będzie taką funkcją, że istnieje różna od zera granica (3.40). Z wniosku 3.7 i lematu 3.11 wynika, że istnieje takie $\varphi \in \Phi(\bar{\varphi})$, że

$$\lim_{x \to \xi} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = 1. \tag{3.45}$$

Funkcja φ jest dana wzorem (3.41), gdzie $a = c$ i c jest dane wzorem (3.40). Połóżmy

$$\eta(x) = \begin{cases} \dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)} & \text{dla} \quad x \in (\xi, b) \\ 0 & \text{dla} \quad x = \xi \end{cases} \tag{3.46}$$

Z ciągłości ψ i φ a także z (3.46) i (3.45) wynika ciągłość η w I oraz że zachodzi (3.44). Skoro $\psi \in \Psi_0$ i $\varphi \in \Phi$, to ψ spełnia (3.1) w I, a φ spełnia (3.3) w I, na podstawie definicji 3.5 a także spełniona jest nierówność (3.34). Stąd wynika, że η jest funkcją $\{f\}$-malejącą w I. Z kolei (3.46) pociąga za sobą

$$\psi(x) = \varphi(x)\,\eta(x) \quad \text{dla} \quad x \in I,$$

skąd

$$\psi[f^n(x)] = \varphi[f^n(x)]\,\eta[f^n(x)] = G_n(x)\varphi(x)\,\eta[f^n(x)]$$

dla $x \in I$, $n = 1, 2, \ldots,$

gdzie G_n jest dane wzorem (3.4). A więc

$$\varphi(x) = \frac{\psi[f^n(x)]}{G_n(x)\eta[f^n(x)]} \qquad \text{dla } x \in I,\ n = 1,2,\dots,$$

ponieważ

$$\eta(x) > 0 \qquad \text{dla } x \in I,$$

na podstawie (3.19), (3.44) i twierdzenia 3.2. Zatem

(3.47) $$\varphi(x) = \varphi_0(x) \text{ dla } x \in I,$$

na podstawie (3.44) i (3.26). Wzór (3.43) został w ten sposób udowodniony. Ponieważ $\bar{\varphi} \in \Phi$, to z (3.47) i definicji 3.5 mamy

$$\varphi_0 = \varphi \in \Phi(\bar{\varphi}) \subset \Phi.$$

Skoro ciągłość funkcji ψ i η w I pociąga za sobą ciągłość funkcji φ_0 w I, dowód twierdzenia został zakończony.

Lemat 3.12. Jeśli φ_0 jest nieujemnym rozwiązaniem (3.3) w I, a η funkcją $\{f\}$-malejącą w I, to funkcja ψ dana wzorem (3.47) spełnia (3.1) w I.

Prostym wnioskiem z twierdzenia 3.8 i lematu 3.12 jest następujące

Twierdzenie 3.9. Niech założenia H_1, H_2, H_5 i H_6 będą spełnione. Następujące warunki są równoważne:

1. $\psi \in \Psi_0$.
2. $\varphi_0 \in \Phi$, gdzie φ_0 jest dane wzorem (3.26)
3. Funkcja η, dana wzorem (3.46), gdzie $\varphi(x) = \varphi_0(x) \in \Phi$ dla $x \in I$, jest $\{f\}$-malejącą i ciągłą w I i spełnia warunek (3.44).

Twierdzenia 3.8 i 3.9 dają ogólne rozwiązanie nierówności (3.1) w klasie Ψ_0. Skoro φ_0 jest jednoznacznie określone wzorem (3.26), z tych dwóch ostatnich twierdzeń wynika natychmiast następujący

Wniosek 3.9. Jeśli założenia H_1, H_2, H_5 i H_6 są spełnione to dla każdej funkcji $\psi \in \Psi_0$ istnieje dokładnie jedna funkcja $\varphi_0 \in \Phi$ i dokładnie jedna funkcja η $\{f\}$-malejąca i ciągła w I, spełniająca (3.44) taka, że zachodzi (3.43).

Podamy teraz warunek dostateczny na to, by φ_0 była trywialnym rozwiązaniem (3.3).

Twierdzenie 3.10. Niech założenia H_1, H_2, H_5 i H_6 będą spełnione i niech ψ będzie ciągłym rozwiązaniem nierówności (3.1) w I spełniającym warunek

(3.48) $$\psi(x) > 0 \qquad \text{dla } x \in (\xi, b).$$

Niech ponadto istnieje granica

(3.49) $$l = \lim_{x \to \xi} \frac{\psi[f(x)]}{\psi(x)}$$

Jeśli

(3.50) $$l < g(\xi)$$

to

(3.51) $$\varphi_0(x) = 0 \qquad \text{dla} \quad x \in I,$$

gdzie φ_0 jest dane wzorem (3.26).

D o w ó d. Skoro funkcja ψ jest ciągła w I, to funkcja

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} \dfrac{\psi[f(x)]}{\psi(x)} & \text{dla} \quad x \in (\xi, b) \\[2ex] \dfrac{l}{g(\xi)} & \text{dla} \quad x = \xi \end{cases}$$

jest funkcją ciągłą w I oraz $g(x) > 0$ dla $x \in (\xi, b)$, na podstawie (3.49) i (3.48). Funkcja $\bar{g}$ spełnia również, na mocy (3.50), warunek $\bar{g}(\xi) < 1$, skąd

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{n-1} \bar{g}[f^i(x)] = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\psi[f^{i+1}(x)]}{g[f^i(x)]\,\psi[f^i(x)]} = \lim_{n\to\infty} \frac{\psi[f^n(x)]}{G_n(x)\,\psi(x)} = 0$$

jednostajnie w $[\xi, c]$, gdzie c jest dowolnym punktem wewnętrznym przedziału I /patrz [4], str.51/. Stąd otrzymujemy (3.51), na podstawie (3.26).

Łatwo sprawdzić, że jeśli $\varphi \in \Phi$, to

$$\lim_{x\to\xi} \frac{\varphi[f(x)]}{\varphi(x)} = g(\xi),$$

ponieważ φ spełnia (3.3) w I. Natychmiastowym wnioskiem z twierdzenia 3.10 jest więc następujący

<u>Wniosek 3.10</u>. Niech założenia H_1, H_2, H_5 i H_6 będą spełnione. Jeśli $\psi \in \Psi_0$ i zachodzi nierówność (3.48), to granica (3.49) istnieje i $l = g(\xi)$.

4. Rozwiązania ciągłe nierówności nieliniowej

Tutaj będziemy się zajmować ciągłymi rozwiązaniami nierówności (0.1). W dalszym ciągu będzie nam potrzebne następujące założenie

H_7. Istnieje takie otoczenie

U : $[\xi, \xi + c) \times (\eta_0 - d, \eta_0 + d)$, $c > 0$, $d > 0$, $U \subset \Omega$,

gdzie η_0 spełnia (1.3) i taka funkcja γ określona, dodatnia i ciągła w $[\xi, \xi + c)$, że

(4.1) $$|g(x,y_1) - g(x,y_2)| \geqslant \gamma(x)|y_1 - y_2|$$
$$\text{dla} \quad (x, y_1), (x, y_2) \subset U.$$

Oznaczmy

(4.2) $$G_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1} \gamma[f^i(x)] \quad \text{dla} \quad x \in [\xi, \xi + c),\ n = 1, 2, \ldots$$

O ciągu (4.2) będziemy zakładać, że

H_8. Ciąg (4.2) ma w $[\xi, \xi + c)$ granicę

(4.3) $$G(x) = \lim_{n\to\infty} G_n(x) \quad \text{dla} \quad x \in [\xi, \xi + c),$$

gdzie $G(x)$ jest funkcją ciągłą i różną od zera w $[\xi, \xi + c)$ lub

(4.4) $$\lim_{n\to\infty} G_n(x) = \infty \quad \text{dla} \quad x \in [\xi, \xi + c).$$

Z założenia H_7, (4.2) i założenia H_8 wynika, że

(4.5) $$G(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x \in [\xi, \xi + c).$$

Założenia $H_1 - H_4$, H_7 i H_8 implikują, że równanie (0.3) ma w I co najwyżej jedno ciągłe rozwiązanie spełniające (3.8) /patrz [3]/. Założenia te nie gwarantują jednak istnienia takiego rozwiązania.

Udowodnimy teraz twierdzenie porównawcze dla nierówności (0.1), analogiczne do twierdzenia 3.2. Najpierw podamy

Lemat 4.1. Niech założenia H_1, H_2 i H_5 będą spełnione i niech zachodzi jeden z przypadków 1^0 lub 2^0. Niech ponadto ψ będzie ciągłym rozwiązaniem nierówności (3.2) w I i niech φ będzie ciągłym rozwiązaniem równania (3.3) w I. Jeśli

$$\psi(\xi) \leq \varphi(\xi),$$

to

$$\psi_1(x) \leq \varphi(x) \quad \text{dla} \quad x \in I.$$

Lemat ten można udowodnić analogicznie, jak odpowiednie twierdzenia dla nierówności (3.1): twierdzenie 3.2 w przypadku 1^0 i twierdzenie 3.3 w przypadku 2^0.

Twierdzenie 4.1. Niech założenia $H_1 - H_4$, H_7 i H_8 będą spełnione, niech ψ będzie ciągłym rozwiązaniem nierówności (0.1) w I i niech φ będzie ciągłym rozwiązaniem równania (0.3) w I. Jeśli $\varphi(\xi) \in (\eta_0 - d, \eta_0 + d)$ oraz

(4.6) $$\psi(\xi) \geq \varphi(\xi),$$

to

(4.7) $$\psi(x) \geq \varphi(x) \quad \text{dla} \quad x \in I.$$

D o w ó d. Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy

(4.8) $$\psi(\xi) = \varphi(\xi).$$

Istnieje wtedy, na mocy H_7, taka liczba dodatnia $c_0 < c$, że $(x, \psi(x))$, $(x, \varphi(x)) \in U$ dla $x \in [\xi, \xi + c_0)$.

Oznaczmy

(4.9) $$\bar{\psi}(x) = \min[\psi(x), \varphi(x)] \quad \text{dla} \quad x \in [\xi, \xi + c_0).$$

Z twierdzenia 2.2 wynika, że $\bar{\psi}$ jest ciągłym rozwiązaniem (0.1) w $[\xi, \xi + c_0)$. Połóżmy z kolei

(4.10) $$\psi_0(x) = \varphi(x) - \bar{\psi}(x) \quad \text{dla} \quad x \in [\xi, \xi + c_0).$$

Z (4.9) mamy

(4.11) $$\psi_0(x) \geqslant 0 \quad \text{dla} \quad x \in [\xi, \xi + c_0).$$

Otrzymujemy teraz, na podstawie (4.10), (4.11), (0.1), (0.3), założenia H_3, (1.1) i (4.1), że

$$\psi_0[f(x)] = \varphi[f(x)] - \bar{\psi}[f(x)]$$
$$\geqslant |g[x, \varphi(x)] - g[x, \bar{\psi}(x)]| \geqslant \gamma(x)|\varphi(x) - \bar{\psi}(x)| = \gamma(x)\ \psi_0(x)$$
$$\text{dla} \quad x \in [\xi, \xi + c_0).$$

Stąd wynika, że funkcja ψ_0 spełnia w $[\xi, \xi + c_0)$ nierówność (3.2). Z (4.10), (4.9) i (4.8) wynika również, że

(4.12) $$\psi_0(\xi) = 0.$$

Z założenia H_8, lematu 4.1, lematu 3.2 oraz warunków (4.12) i (4.11) wynika teraz, że

$$\psi_0(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x \in [\xi, \xi + c_0),$$

skąd na podstawie (4.10),

$$\bar{\psi}(x) = \varphi(x) \quad \text{dla} \quad x \in [\xi, \xi + c_0).$$

Stąd otrzymujemy ostatecznie, na podstawie (4.9), że nierówność (4.7) zachodzi w $[\xi, \xi + c_0)$.

Pokażemy teraz, że nierówność (4.7) zachodzi w całym przedziale I. Istotnie, jeśli istniałby punkt $x_0 \in I$ taki, że

(4.13) $$\psi(x_0) < \varphi(x_0),$$

to na podstawie (1.2), (4.13) i twierdzenia 2,1, istnieje taka liczba naturalna n, że

$$f^n(x_0) \in (\xi, \xi + c_0)$$

oraz

$$\psi[f^n(x_0)] < \varphi[f^n(x_0)].$$

Ta nierówność jest sprzeczna z udowodnioną już nierównością (4.7). Jeśli

$$\psi(\xi) > \varphi(\xi),$$

to założenie, że (4.13) zachodzi dla pewnego $x_0 \in I$ prowadzi do sprzeczności w dokładnie taki sam sposób. Zatem dowód twierdzenia (4.1) został zakończony.

Wniosek 4.1. Niech założenia twierdzenia 4.1 będą spełnione. Warunkiem koniecznym na to, by $\varphi \in L_0$ jest, żeby element $\varphi \in L$ był nierozkładalny przez $\cup$ w kracie L.

Wniosek 4.1 jest więc prostą konsekwencją twierdzenia 4.1 (co do znaczenia symboli L_0 i L - patrz definicja 2.1). Określenie elementu nierozkładalnego w kracie Czytelnik znajdzie na przykład w monografii [7]. Dostateczność warunku możemy udowodnić przy dodatkowym założeniu H_9. Dla każdego punktu $(x, y) \in \Omega$ istnieje ciągłe rozwiązanie φ równania (0.3) w I przechodzące przez ten punkt i takie że wykres φ zawiera się w Ω.

Uwaga 4.1. Założenia H_1 - H_4 i H_7 - H_9 implikują, że przez każdy punkt Ω przechodzi dokładnie jedno ciągłe rozwiązanie (0.3), tzn., że rodzina L_0 jest jednoparametrowa /patrz [4] i [3]/.

Twierdzenie 4.2. Niech założenia H_1 - H_4 i H_7 - H_9 będą spełnione. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby $\varphi \in L_0$ jest, żeby φ było elementem nierozkładalnym przez $\cup$ w L.

Dowód tego twierdzenia jest podany w [1]. Polega on na skonstruowaniu dla każdego ciągłego ψ, które spełnia (0.1) ale nie spełnia (0.3), takich funkcji ciągłych ψ_1 i ψ_2, które spełniają (0.1) oraz

$$\psi_1 \cup \psi_2(x) \geqslant \psi(x) \qquad \text{dla } x \in I,$$

ale nie jest spełniona w I żadna z dwu nierówności

$$\psi_1(x) \geqslant \psi(x) \quad \text{ani} \quad \psi_2(x) \geqslant \psi(x).$$

Zbadamy jeszcze związek pomiędzy rodziną wszystkich ciągłych rozwiązań nierówności (0.1) w I, a rodziną wszystkich ciągłych funkcji $\{f\}$-malejących w I. W tym celu wprowadźmy najpierw następującą definicję:

Definicja 4.1. Niech założenia H_3, H_4 i H_9 będą spełnione. Funkcję $R : \Omega \longrightarrow \Omega_\xi$, gdzie $\Omega_\xi = \{y : (\xi, y) \in \Omega\}$, określamy przez warunek

$$R(x, y) = \varphi(\xi) \qquad \text{dla } (x,y) \in \Omega, \tag{4.14}$$

gdzie φ jest rozwiązaniem (0.3) spełniającym warunek

$$\varphi(x) = y. \tag{4.15}$$

Natychmiastowym wnioskiem z definicji 4.1 jest następujący

Wniosek 4.2. Jeśli założenia H_3 i H_4 oraz H_9 są spełnione, to funkcja R jest różnowartościowa ze względu na drugą zmienną.

Lemat 4.2. Jeśli założenia H_1 - H_4 i H_7 - H_9 są spełnione, to R jest ciągła w Ω.

Definicja 4.2. Niech φ będzie funkcją określoną i ciągłą w I, dla której $(x, \varphi(x)) \in \Omega$ dla $x \in I$. Połóżmy

$$\eta(x) = \varphi(\xi) = R[x, \psi(x)] \qquad \text{dla } x \in I, \tag{4.16}$$

gdzie φ jest ciągłym rozwiązaniem równania (0.3) w I spełniającym warunek (4.15) z $y = \psi(x)$.

Uwaga 4.2. Skoro funkcja R jest ciągła, na mocy lematu 4.2, to ciągłość funkcji η wynika z ciągłości funkcji ψ. Prawdziwe jest również wynikanie w przeciwną stronę.

Lemat 4.5. Niech założenia $H_1 - H_4$ i $H_7 - H_9$ będą spełnione i niech $(x, \psi(x)) \in \Omega$ dla $x \in I$. Jeśli funkcja η, określona przez (4.16), jest ciągła w I, to również funkcja ψ jest ciągła w I.

Uwaga 4.3. Zauważmy, że funkcja R jest całką pierwszą równania (0.3), tzn., że jest stała na każdym rozwiązaniu (0.3).

Udowodnimy teraz twierdzenie analogiczne do twierdzenia 3.3.

Twierdzenie 4.3. Niech założenia $H_1 - H_4$ i $H_7 - H_9$ będą spełnione. Na to, by funkcja ψ określona w I była ciągłym rozwiązaniem nierówności (0.1) w I, potrzeba i wystarcza, aby funkcja η określona wzorem (4.16) była funkcją $\{f\}$-malejącą i ciągłą w I.

D o w ó d. Niech ψ będzie ciągłym rozwiązaniem (0.1) w I i niech x będzie ustalonym punktem I. Oznaczmy przez φ_1 ciągłe rozwiązanie (0.3) w I, spełniające warunek

(4.17) $$\varphi_1[f(x)] = \psi[f(x)],$$

a przez φ_2 ciągłe rozwiązanie (0.3) w I, spełniające warunek

(4.18) $$\varphi_2(x) = \psi(x).$$

Z H_9 wynika, że φ_1, φ_2 istnieją i są jednoznacznie określone. Z (4.17), (0.1), (4.18) i (0.3) wynika, że

$$\varphi_1[f(t)] = \psi[f(t)] \leq g[t, \psi(t)] = g[t, \varphi_2(t)] = \varphi_2[f(t)].$$

Mamy stąd

$$\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \quad \text{dla } x \in I,$$

ponieważ rodzina ciągłych rozwiązań (0.3) w I jest jednoparametrowa /patrz uwaga 4.1/. A zatem

$$\varphi_1(\xi) \leq \varphi_2(\xi),$$

skąd

(4.19) $$\eta[f(x)] = \varphi_1(\xi) \leq \varphi_2(\xi) = \eta(x) = R[x, \psi(x)] \quad \text{dla } x \in I,$$

gdzie η jest określone wzorem (4.16). Funkcja η jest więc $\{f\}$-malejąca w I, a jej ciągłość wynika z uwagi 4.2.

Na odwrót, niech ψ będzie określona w I. Załóżmy, że funkcja η określona wzorem (4.16), jest $\{f\}$-malejąca i ciągła w I. Z (4.16) wynika teraz, że

$$R\{f(x), \psi[f(x)]\} = \eta[f(x)] \leq \eta(x) = R[x, \psi(x)]$$

oraz

(4.20) $$\varphi_1(\xi) = \eta[f(x)] \leq \eta(x) = \varphi_2(\xi),$$

gdzie φ_1 i φ_2 są określone wzorami (4.17) i (4.18), odpowiednio. Z warunków (4.17), (4.20), (0.3), i (4.18) wynika, że

$$\psi[f(x)] = \varphi_1[f(x)] \leq \varphi_2[f(x)] = g[x, \varphi_2(x)] = g[x, \psi(x)]$$

dla $x \in I$,

ponieważ rodzina rozwiązań ciągłych (0.3) w I jest jednoparametrowa. Funkcja ψ spełnia więc (0.1) w I oraz jest ciągła w I, na mocy lematu 4.5, co kończy dowód twierdzenia.

Oznaczmy przez K rodzinę wszystkich funkcji η określonych, $\{f\}$-malejących i ciągłych w I, których wykresy leżą w Ω, a przez K_0 rodzinę funkcji $\eta \in K$ i spełniających równanie

$$\eta[f(x)] = \eta(x) \qquad \text{dla } x \in I.$$

Funkcje ciągłe spełniające ostatnie równanie są stałe w I /patrz [4]/. Oznaczmy dalej przez T odwzorowanie $L \longrightarrow K$, określone warunkiem $T(\psi) = \eta$, gdzie η jest określone przez (4.16). Wnioskiem z twierdzenia 4.9, ustalającym odpowiedniość wzajemnie jednoznaczną pomiędzy rozwiązaniami (0.1) należącymi do L, a funkcjami $\{f\}$-malejącymi należącymi do K, jest następujące

<u>Twierdzenie 4.4</u>. Jeśli założenia $H_1 - H_4$ i $H_7 - H_9$ są spełnione, to odwzorowanie T jest izomorfizmem pomiędzy L i K oraz pomiędzy L_0 i K_0.

Dowód tego twierdzenia znajduje się w [1].

B i b l i o g r a f i a

[1] D. Brydak, On functional inequalities in a single variable, Rozprawy Mat. /w druku/.

[2] B. Choczewski, M. Kuczma, On the "indeterminate case" in the theory of a linear functional equation, Fund. Math. 58 /1966/, s. 163-175.

[3] D. Czaja-Pośpiech, M. Kuczma, Continuous solutions of some functional equations in the indeterminate case, Ann.Polon.Math.24 /1970/, s.9-20.

[4] M. Kuczma, Functional equations in a single variable, Warszawa 1968.

[5] T. Rumak, Some therems about difference inequalities, Prace Mat.XVI 1972/, s.159-164.

[6] J. Szarski, Differential inequalities, Warszawa 1965.

[7] G. Szász, Théorie des treillis, Budapest 1971.

[8] R. Węgrzyk, Continuous solutions of a linear homogeneous functional equation, Ann.Polon.Math. /w druku/.

S u m m a r y

In this paper we shall deal with functional inequality /0.1/. The main results are given in paragraph 2, where the algebraic structure of the family of solutions is given, and in paragraph 4, where a comparison theorem is proved for inequality /0.1/ see theorem 4.1/. In the same paragraph, there is a necessary and sufficient condition given for a function satisfying inequality /0.1/ to be a continuous solution of equation /0.3/..

In paragraph 3, we have studied more exactly the homogeneous inequality /inequality /3.1//.

The last theorem in the paper gives the iseomorphism between the family of continuous solutions of inequality /0.1/ and the family of continuous functions f-decreasing /see definition 3.2/.