ROCZNIK NAUKOWO–DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE

Zeszyt 61 Prace matematyczne VIII Rok 1977

Ewa Lubaś

ZUR QUADRATISCHEN TRANSFORMATION DREIDIMENSIONALEN PROJEKTIVEN RAUMES AUF DIE EBENE

EINLEITUNG

Im vergangenen Jahrzehnt sind zahlreiche Abhandlungen und Arbeiten erschienen, die verschiedene Abbildungsmethoden der n-dimensionalen Räume /$n \geqslant 2$/ auf die Ebene bzw. auf die Fläche behandeln. In fast allen Arbeiten werden prinzipiell die Eigenschaften der geradlinigen Projektionen angegeben, d.h. der Projektionen, die mittels der projizierenden Linienmengen realisiert werden.

K. Bieda gab in seiner Arbeit "Die kurvenlinige Projektion zweiten Grades" die Prinzipien solcher Abbildung des projektiven Raumes P^3 die Ebene an, wo die projizierenden Linien die Kurven zweiten Grades sind. Die Projektion einer Geraden ist in solcher Abbildung eine algebraische Kurve dritten Grades.

B. Ślusarczyk gab in seiner Arbeit "Die kurvenlinige Projektion dritten Grades" die Eigenschaften der Projektion mittels der Kurven dritten Grades des Raumes P^3 auf die Ebene an. Die Projektion einer Geraden ist intsolcher Abbildung eine algebraische Kurve fünften Ordnung.

In der vorliegenden Arbeit wird solch eine Abbildung des reellen projektiven Raumes P^3 auf die Ebene behandelt, wo die projizierenden Linien die Kegelschnitte sind, und der Projektionsapparat so angepaßt ist, daß die Projektion einer beliebigen Geraden auch ein Kegelschnitt ist. Das ist also die Abbildung zweiten Grades[1]. Es wurde im allgemeinen gezeigt, daß die Projektion einer beliebigen algebraischen ebenen Kurve n-ter Ordnung eine algebraische Kurve 2n-ter Ordnung ist.

Der projektive Raum wird in der Arbeit als Erweiterung des euklidischen Raumes mit uneigentlichen Punkten bezeichnet. Diese Definition eignet sich am besten zur graphischen Darstellung des Problems.

[1] E.Otto, B. Grochowski: "O rzutowaniu skośnym przestrzeni n-wymiarowych" /Zum schiefen Projizieren des n-dimensionalen Raumes/, Zeszyty Naukowe: Geometria wykreślna IV, 1966, s.13-22.

Die vorliegende Arbeit besteht aus zwei Teilen.

Im ersten Teil wird die Definition eines Bündels der Kegelschnitte angegeben und einige seiner Eigenschaften bewiesen.

Im zweiten Teil definiert man die quadratische Projektion des Raumes auf die Ebene und gibt ihre Grundeigenschaften an. Es wird die quadratische Projektion eines Punktes, einer Geraden, einer Ebene, eines Kegelschnittes und einer beliebigen algebraischen ebenen Kurve C^n n-ter Ordnung $/n > 2/$ bestimmt.

Die Beweise aller in der Arbeit angeführten Sätze sind mittels der synthetischen Methode durchgeführt.

Verzeichnis der wichtigsten, in der vorliegenden Arbeit auftretenden Symbole und Bezeichnungen

$\cap$	Symbol des gemeinsamen Teiles zweier Mengen /des Produktes/
$\cup$	Symbol der Summe zweier Mengen
$-$	Symbol der Differenz zweier Mengen
$\Rightarrow$	Symbol der Implikation
$\wedge$	Symbol der Konjunktion
$\vee$	Symbol der Alternative
$\sim$	Symbol der Negation
$\{A,B\}$	Menge mit den Elementen A und B
$\in$	Symbol des Gehörens zur Menge
$\subset$	Symbol des Enthaltenseins einer Menge in der anderen
$:=$	Symbol - "ist gleich aus der Definition"
$\overset{=}{\wedge}$	Symbol der Relation der Perspektivität
$\overset{-}{\wedge}$	Symbol der Relation der Projektivität
P^3	dreidimensionaler Projektiver Raum
$A,B,\dots,Q,\dots$	Punkte des Raumes P^3
$\alpha,\beta,\gamma,\dots,\varepsilon,\dots$	Ebenen
$a,a_1,\dots,p,\dots$	Geraden
$l/Q_1Q_2/$	die durch die Punkte Q_1,Q_2 bestimmte Gerade
$\alpha/a_1Q_2/$	die durch die Gerade a_1 und den Punkt Q_2 bestimmte Ebene α
$/Q_1/\ \varepsilon_1$	Geradenbüschel mit dem Scheitelpunkt Q_1 und der Basis ε_1
$/l/$	Ebenenbüschel mit der Achse l
$\langle Q_1Q_2\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2\rangle$	Grundsystem - zwei verschiedene Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ und zwei reelle Punkte Q_1, Q_2, die entsprechend auf diesen Ebenen liegen
$/\alpha^2/$	Einparameterbüschel der Kegelschnitte des Grundsystems mit der Basis α
$[W^2]$	Bündel der Kegelschnitte des Grundsystems /Definition 1, Kapitel 1/
$a^2,b^2,\dots,p^2,\dots$	beliebige Kegelschnitte des Raumes P^3/unendlich zum Bündel $[W^2]$ gehörige/

$/K^2/$ die Familie der Flächen zweiter Ordnung, die die Ebene ε_1 im Punkt Q_1 und die Ebene ε_2 im Punkt Q_2 berührt

S_p Kegelschnitt des Bündels $[W^2]$, der den Punkt P projiziert

P^2 quadratische Projektion des Punktes P

Φ_p^2 Quadrik, die die Gerade p projiziert

p^2 quadratische Projektion der Geraden p

$\Phi_{a^2}^4$ die Fläche vierter Ordnung, die den Kegelschnitt a^2 projiziert

a^4 quadratische Projektion des Kegelschnittes a^2

$\Phi_{C^n}^{2n}$ die Fläche 2n-ter Ordnung, die die ebene Kurve C^n n-ter Ordnung projiziert

$A_a := a \cap \varepsilon_1$

$B_a := a \cap \varepsilon_2$

$T_a := a \cap \pi$

$t_{\varepsilon_1} := \varepsilon_1 \cap \pi$

$t_{\varepsilon_2} := \varepsilon_2 \cap \pi$

$\tau := /t_{\varepsilon_1}, Q_2/$

$k_\tau := \tau \cap \varepsilon_2$

$S_\alpha := l \cap \alpha$

$v_\alpha := \varepsilon_1 \cap \alpha$

$k_\alpha := \varepsilon_2 \cap \alpha$

$k := \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$

$h_\alpha := \alpha \cap \pi$

$V_\alpha := \alpha \cap k$

$X_\alpha := \alpha \cap t_{\varepsilon_1}$

s_α die Polare des Punktes S_α in bezug auf den zu der Geraden v_α und k_α degenerierten Kegelschnitt

K_α zentrale Kollineation der Ebene α mit dem Mittelpunkt S_α und der Achse s_α

$R_\pi/Q_1, t_{\varepsilon_1}/$ Dreiparameterfamilie der Kegelschnitte der Projektionsebene π, die die t_1 in Q_1 berühren und die Gerade t_{ε_2} in reellen Punkten schneiden

Eigenschaften eines Bündels der Kegelschnitte

Betrachten wir zwei verschiedene Ebenen ε_1 und ε_2 wie auch zwei verschiedene Punkte Q_1 und Q_2 im reellen projektiven Raum P^3, die entsprechend auf diesen Ebenen liegen /Abb.1/. Es sei L eine Gerade, die durch die Punkte Q_1 und Q_2 geht. Die Ebenen: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ des Büschels /1/ schneiden die Ebene ε_1 im Geradenbüschel $/Q_1/\varepsilon_1 = /a_1, b_1, c_1, \ldots/$ und die Ebene ε_2 im zu ihm perspektiven Geradenbüschel $/Q_2/\varepsilon_2 = /a_2, b_2, c_2, \ldots/$. Homologe Geraden a_1 und a_2 dieser perspektiven Büschel samt den Punkten Q_1 und Q_2 bestimmen das Einparameterbüschel der Kegelschnitte $/\alpha^2/$, die Geraden b_1 und b_2 sowie die Punkte Q_1 und Q_2 - das Einparameterbüschel der Kegelschnitte $/\beta^2/$, die Geraden c_1 und c_2 sowie die Punkte Q_1 und Q_2 - das Einparameterbüschel der Kegelschnitte $/\gamma^2/, \ldots$

DEFINITION 1

Die Einparameterfamilie der Kegelschnitte: $/\alpha^2/$, $/\beta^2/$, $/\gamma^2/$, die durch die Punkte Q_1 und Q_2 gehen, für welche entsprechende Tangenten in den Punkten Q_1 und Q_2 homologe Geradenbüschel $/Q_1/\varepsilon_1$ und $/Q_2/\varepsilon_2$ sind, wird als Bündel der Kegelschnitte $[W^2]$ mit den F u n d a m e n t a l p u n k t e n Q_1 und Q_2 und den F u n d a m e n t a l e b e n e n $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ bezeichnet. $\langle Q_1, Q_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle$ werden kurz als G r u n d s y s t e m bezeichnet. Homologe Geraden: a_1 und a_2, b_1 und $b_2 \ldots$ in perspektiven Büscheln $/Q_1/\varepsilon_1$ $/Q_2/\varepsilon_2$ sind degenerierte Kegelschnitte des Bündels $[W^2]$. Aus der Definition des Bündels $[W^2]$ folgt:

SATZ 1.1.

Durch jeden Punkt P des Raumes /der anders ist als Q_1 und Q_2/ geht genau nur ein Kegelschnitt des Bündels $[W^2]$.

Wenn:

1^0 $P \sim\in l$, $P \sim\in \varepsilon_1$ und $P \sim\in \varepsilon_2$, dann ist der durch ihn gehende Kegelschnitt des Bündels $[W^2]$ ein nicht degenerierter Kegelschnitt.

2^0 $P \sim\in \varepsilon_1$ und $P \neq Q_1$ bzw. $P \in \varepsilon_2$ und $P \neq Q_2$, dann geht durch ihn ein zu zwei Geraden degenerierter Kegelschnitt des Bündels $[W^2]$:

$a_1 = \alpha/PQ_1Q_2/ \cap \varepsilon_1$ und $a_2 = \alpha/PQ_1Q_2/ \cap \varepsilon_2$ [1/]

[1/] Geraden, Ebenen, algebraische Kurven werden in der vorliegenden Arbeit als Menge behandelt; daher solche Registrierung der Mengenoperationen

3^0 $P \in l$, dann wird der durch ihn gehende Kegelschnitt des Bündels $[W^2]$ ein zur Doppelgeraden l degenerierter Kegelschnitt.

Dem Punkt P, der sich mit den Punkten Q_1 und Q_2 deckt, sind alle Kegelschnitte des Bündels $[W^2]$ zugeordnet. Um die Eindeutigkeit zu erreichen, wird dieser Fall in weiteren Betrachtungen ausgeschlossen werden. Auf Grund des Satzes 1.1 kann man folgendes formulieren:

Schlußfolgerung 1

Jeder Punkt des Raumes P^3 /der anders ist als die Punkte Q_1 und Q_2/ bestimmt eindeutig einen Kegelschnitt des Bündels $[W^2]$. /Der Kegelschnitt des Bündels, der durch den Punkt P des Raumes bestimmt wurde, wird mit s_p bezeichnet/.
Es sei p eine beliebige Gerade des Raumes, die durch keinen der Punkte Q_1 und Q_2 geht. Daraus folgt:

SATZ 1.2.

Die Mengensumme der Kegelschnitte $s_{p_1}, s_{p_2}, s_{p_3}, \ldots$ des Bündels $[W^2]$, die den entsprechenden Punkten $P_1, P_2, P_3, \ldots$ einer beliebigen Geraden p zugeordnet ist, ist die Fläche zweiter Ordnung[1/], die für die gegebene Gerade p mit Φ_p^2 bezeichnet wird.
Wenn:

1^0 die Geraden p, l und $p, k = \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$ windschief sind, $p \not\subset \varepsilon_1$ und $p \not\subset \varepsilon_2$, dann ist Φ_p^2 eine nicht degenerierte geradlinige Quadrik, die Ebenen ε_1 und ε_2 entsprechend in den Punkten Q_1 und Q_2 berühren,

2^0 p, l windschief sind, $p \cap k = \{A\}$, $p \not\subset \varepsilon_1$ und $p \not\subset \varepsilon_2$, dann ist Φ_p^2 ein Kegel mit dem Scheitel im Punkt A. Dieser Kegel berührt die Ebene ε_1 in der Geraden $/A, Q_1/$ und die Ebene ε_2 in der Geraden $/A, Q_2/$.

3^0 $p \cap l = \{B\}$, dann wird Φ_p^2 zur Doppelebene $\pi/p, l/$ degeneriert.

4^0 $p \subset \varepsilon_1$ bzw. $p \subset \varepsilon_2$ und p, l windschief sind, dann ist Φ_p^2 eine zu zwei Ebenen ε_1 und ε_2 degenerierte Quadrik.

Auf Grund dieses Satzes über jede Gerade p des Raumes stellt man fest, daß sie eine Erzeugende der durch sie eindeutig bestimmten Fläche Φ_p^2 zweiter Ordnung ist. Sie berührt die Ebene ε_1 im Punkt Q_1 und die Ebene ε_2 im Punkt Q_2. Sie kann degeneriert oder nicht degeneriert sein, was von der Lage der Geraden p in bezug auf das Grundsystem $\langle Q_1 Q_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \rangle$ abhängig ist.

[1/] [7] S. 171

Es erweist sich , daß man den Satz 1.2 verallgemeinern kann, wenn man eine beliebige algebraische ebene Kurve betrachtet. Es sei eine ebene algebraische Kurve C^n n-ter Ordnung $/n \geq 2/$ gegeben, die durch keinen der Punkte Q_1 und Q_2 geht.

SATZ 1.3.

Die Mengensumme der Kegelschnitte des Bündels $[W^2]$, die durch einzelne Punkte der ebenen algebraischen Kurve C^n n-ter Ordnung $/n \geq 2/$ gehen, ist die algebraische Fläche Φ^{2n}_{Cn} 2n-ter Ordnung mit zwei n-fachen Punkten Q_1 und Q_2.

Beweis:

Man führe eine beliebige Gerade p, die durch keinen der Punkte Q_1, Q_2 geht, und betrachte die auf Grund des Satzes 1.2 durch diese Gerade bestimmte Fläche Φ^2_p zweiter Ordnung. Die Ebene α , in der die Kurve C^n enthalten ist, schneidet die Fläche Φ^2_p im Kegelschnitt p_2, der mit der Kurve genau 2n gemeinsame, reelle oder imaginäre Punkte hat,bzw. beide Kurven unendlich viele gemeinsame Punkte haben.
Daraus folgt, daß die Fläche Φ^2_p 2n mit $\Phi_c n$ gemeinsame Kegelschnitte hat oder es unendlich viele gemeinsame Kegelschnitte gibt. Mit $\Phi_c n$ bezeichnete man die Mengensumme der Kegelschnitte des Bündels $[W^2]$, die durch einzelne Punkte der Kurve C^n gehen. Daraus geht hervor, daß die Gerade p die Fläche $\Phi_c n$ in genau 2n Punkten schneidet. Oder sie hat unendlich viele gemeinsame Punkte mit der betrachteten Menge.

Setzen wir voraus, daß die Gerade p durch den Punkt Q_1 oder Q_2 geht. Wenn die Ebene γ des Büschels /l/, die durch die Gerade p geht, anders als α ist, dann schneidet sie die Kurve C^n in n Punkten. Somit sind n Kegelschnitte der Menge Φ_{Cn} in der Ebene γ enthalten,und deshalb schneidet die Gerade p die Fläche $\Phi_C n$ in 2n Punkten, von denen sich n mit Q_1 dekken, wenn p durch den Punkt Q_1 geht, bzw.mit Q_2, wenn die Gerade p durch den Punkt Q_2 geht. Wenn dagegen $\gamma = \alpha$ dann hat die Gerade p unendlich viele mit $\Phi_C n$ gemeinsame Punkte. Daraus folgt, daß $\Phi_C n$ die Fläche 2n-ter Ordnung mit zwei n-fachen Punkten Q_1 und Q_2 ist. Diese Fläche besteht aus n Schalen, von denen jede die Ebene ε_1 im Punkt Q_1 und die Ebene ε_2 im Punkt Q_2 berührt.

Wenn die Gerade p in dieser Fläche enthalten ist, dann ist jeder der die gerade p schneidenden Kegelschnitte des Bündels sowohl der Kegelschnitt der Fläche Φ^2_p als auch der Fläche Φ^{2n}_{Cn}; er geht also durch n Punkte der Kurve C^n und umgekehrt - durch solche n Punkte, in denen eine Ebene des Büschels /l/ die Kurve C^n schneidet, gehört zum Kegelschnitt der Fläche Φ^2_p. Das beweist, daß die Fläche Φ^{2n}_{Cn} zur Fläche Φ^2_p zweiter Ordnung degeneriert wird, die n-fach gezählt wird.

Analogisch bestimmt die ebene Kurve C^n, die die Punkte Q_1 und Q_2 nicht enthält, eindeutig die un- oder degenerierte Fläche Φ^{2n}_{Cn} 2n-ter Ordnung mit zwei n-fachen Punkten Q_1 und Q_2 und den Ebenen ε_1 und ε_2, die sie in diesen Punkten berühren.

Jetzt folgt ein Beweis der Eigenschaft des Bündels $[W^2]$ der Kegelschnitte.

SATZ 1.4.

Schneidet man das Bündel $[W^2]$ mit einer beliebigen, zum Büschel /l/ nicht gehörigen Ebene α, dann sind mit der Ebene gemeinsame Punktepaare einzelner Kegelschnitte dieses Bündels homologe Punkte in der involutorischen Zentralkollineation der Ebene α mit dem Mittelpunkt $S = l \cap \alpha$ und der Achse s, die eine Polare des Punktes S in bezug auf den degenerierten Kegelschnitt ist, die weiter in zwei Geraden: $v_\alpha = \alpha \cap \varepsilon_1$ und $k_\alpha = \alpha \cap \varepsilon_2$ zerfällt.

Beweis:

Nehmen wir, wie die Abb. 1.2 zeigt, folgende Bezeichnungen an:

$v_\alpha \cap k_\alpha = V_\alpha$, /l/ $= /\alpha_1 \alpha_2 \ldots/$

$\alpha_i \cap \alpha = k\alpha_i$ wo $i = 1,2,3,\ldots$

Die Ebenen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ des Büschels /l/ schneiden die Ebene α im zu ihm perspektiven Geradenbüschel $/S/_\alpha = /k\alpha_1\ k\alpha_2\ k\alpha_3 \ldots/$. Die Kegelschnitte des Bündels $[W^2]$, die in einer beliebigen Ebene α_i enthalten sind, gehören zu einem Büschel der Kegelschnitte α_i^2 $/S_1^2\ S_2^2 \ldots/$. Alle gehen durch die Punkte Q_1 und Q_2 und berühren entsprechende Schnittlinien α_i mit ε_1 und α_i mit ε_2 in diesen Punkten.

Auf Grund des Satzes von Desarques[1] folgt, daß die Gerade $k\alpha_i$ die Kegelschnitte dieses Büschels in homologen Punktepaaren der involutorischen Reihe $/k\alpha_i/$ schneidet.

Die Doppelpunkte dieser Reihe sind: Punkt S und solcher Punkt S_1, wenn sich für ein beliebiges Paar der homologen Punkte A_1, A_1' eine Relation ergibt:

$$/SS_1A_1A_1'/ = -1$$ [2]

Bezeichnen wir mit $V_i = \alpha_i \cap v_\alpha$, $K_i = \alpha_i \cap k_\alpha$ und bemerken wir, daß V_iK_i ein Paar der homologen Punkte in der involutorischen Reihe $/k\alpha_i/$ sind, dann erhalten wir, daß $/SS_iV_iK_i/ = -1$ für jedes $i = 1,2,3, \ldots$.

Die geometrische Stelle der Punkte der Ebene α, die /d.h. diese Stelle/ die-

1/ [11] S. 234.
2/ [11] S. 109.

se Bedingung einhalten, ist die Gerade s, die durch den Punkt V_α geht, und die Polare des Punktes S in bezug auf den zu zwei Geraden: v_α und k_α degenerierten Kegelschnitt ist.
Wenn keiner der Punkte Q_1, Q_2 zur Ebene α gehört, dann $S \sim \epsilon /v_\alpha \cup k_\alpha/$; Daraus folgt, daß auch $S \sim \epsilon\ s$. Wenn dagegen z.B. $Q_1 \epsilon \alpha$, dann $S = Q_1$ und $s = v_\alpha$. Die Abbildung der Ebene α, die jedem Punkt A_i der Ebene solchen Punkt A_i' zuordnet, daß die Punkte S, A_i, A_i' kolinear sind und zu einer Geraden gehören und

$$/SS_i'A_iA_i'/ = -1 \qquad /\text{wo } S_i' = k_{\alpha\, i}\ /SA_i/ \cap s/\ ^{1/},$$

ist die zentrale Kollineation der Ebene mit dem Mittelpunkt S und der Achse s.
Weil das Attribut dieser Kollineation die Zahl -1 ist, dann ist das die involutorische, zentrale Kollineation bzw. harmonische Homologie /wenn $S \epsilon s$ - die sog. parabolische Involution/.
Der Mittelpunkt S und die Achse s sowie das Paar der homologen Geraden v_α und k_α bestimmen auf der festgesetzten Ebene α, die nicht zum Büschel /l/ gehört, eindeutig die involutorische zentrale Kollineation. Aus dem Satz 1.4 folgt, daß auf diese Weise bestimmte Achsen der Kollineation ein zelner Ebenen des Raumes, die nicht zum Büschel /l/ gehören, die Geraden sind, die die Gerade k schneiden, und daß eine beliebige, zu l windschiefe und die Gerade k schneidende Gerade s, die in keiner der Ebenen ε_1, ε_2 enthalten ist, ist die Achse der Kollineation för genau eine Ebene - sie enthält die Gerade s und den Punkt S, der der Pol der Ebene ist, die durch die Geraden s und k geht /in bezug auf die zum Ebenenpaar ε_1, ε_2 degenerierten Quadrik/.
Weil die Geraden l und k polartig konjugiert in bezug auf die degenerierte Quadrik sind, so $S \epsilon l$.
Es gibt zum Satz 1.4 auch einen reziproken Satz:

SATZ 1.5

Wenn man in einer Ebene α, die nicht zum Büschel /l/ gehört, die zentrale Kollineation so bestimmt, daß ihr Mittelpunkt S der gemeinsame Punkt der Geraden l und der Ebene α, die Achse s die Polare dieses Punktes in bezug auf den Kegelschnitt ist, der zu zwei Geraden degeneriert wird:

$$v_\alpha = \varepsilon_1 \cap \alpha \qquad \text{und} \qquad k_\alpha = \varepsilon_2 \cap \alpha$$

und daß v_α und k_α das Paar der homologen Geraden sind, dann bestimmen

1/ [7] S.156.

die homologen Punktepaare /in dieser Kollineation/ der Ebene α denselben Kegelschnitt des Bündels $[W^2]$.

Beweis:

Es seien A und A' ein beliebiges Paar verschiedener homologer Punkte der zentralen Kollineation mit der Fundamentalebene α, a - eine durch die Punkte S, A, A' gehende Gerade /Radius der Kollineation/, S_1 - der gemeinsame Punkt der Achse s und der Geraden a, s_A - der Kegelschnitt des Bündels $[W^2]$, der durch den Punkt A bestimmt ist, $s_{A'}$ - der Kegelschnitt des Bündels $[W^2]$, der durch den Punkt A' bestimmt ist, γ - die Ebene des Büschels /1/, die durch die Gerade a geht.
Wir beweisen, daß die Kegelschnitte s_A und $s_{A'}$ identisch sind. Jeder dieser Kegelschnitte ist in der Ebene γ enthalten und beide gehören zum selben Büschel der Kegelschnitte, die durch die Punkte Q_1, Q_2 gehen und daß sie die Geraden in diesen Punkten berühren:

$$v_\gamma = \gamma \cap \varepsilon_1 \qquad \text{und} \qquad k_\gamma = \gamma \cap \varepsilon_2$$

Die Gerade a schneidet den Kegelschnitt s_A im Punkt A und im Punkt A_1, den Kegelschnitt $s_{A'}$ dagegen im Punkt A' und A_1'. Sowohl A, A_1 als auch A', A_1' sind homologe Punkte in der Involution auf der Geraden a, deren Doppelpunkte S und S_1 sind /in bezug darauf, daß zu dieser Involution auch das Punktepaar gehört, in dem die Geraden v_γ und k_γ die Gerade a schneiden/.
Daraus folgt, daß hier zwei Relationen bestehen:

$$/S, S_1, A, A_1/ = -1 \qquad \text{und} \qquad /S, S_1, A', A_1'/ = -1$$

Aus der Voraussetzung geht hervor, daß auch $/S, S_1, A, A'/ = -1$.
Das beweist, daß $A_1 = A'$ und $A_1' = A$ und der Kegelschnitt s_A mit dem Kegelschnitt $s_{A'}$ identisch ist.

Nehmen wir an, daß S_α immer der Mittelpunkt der Kollineation der Ebene α bezeichnen soll, s_α - die Achse der Kollineation der Ebene α, K_α - die involutorische Kollineation der Ebene α mit dem Mittelpunkt S_α und der Achse s_α.

Aus dem Satz 1.5 und den Eigenschaften der zentralen Kollineation in der Ebene[1/] folgt:

<u>Schlußfolgerung 1</u>

<u>Wenn Φ^2_p eine Fläche zweiter Ordnung, die durch die Gerade p bestimmt ist, bezeichnet, dann schneidet die zum Büschel /1/ nicht gehörige Ebene α die Fläche Φ^2_p im Kegelschnitt, die in der Kollineation K_α in sich selbst geht.</u>

1/ [11] S.103-106.

Besonders wenn α durch die Gerade p geht, dann schneidet sie Φ^2_p in zwei homologen Geraden p und p_1 der involutorischen, zentralen Kollineation K_α .

Schlußfolgerung 1'

Wenn zwei in der Ebene α liegenden Geraden p und p_1 in der involutorischen zentralen Kollineation K_α dieser Ebene homolog sind, dann sind durch diese Geraden bestimmte Quadriken identisch. Die Ebene α berührt die Quadrik Φ^2_p im Punkt $P = p \cap p_1$. Besonders wenn $p = p_1 = s_\alpha$, dann ist die Quadrik Φ^2_p in bezug auf die Lage der Geraden s_α /Satz 1.2, 2^o/ ein Kegel, der die Ebene α entlag der Geraden berührt.

SATZ 1.6.

Wenn die Gerade a, die in der Ebene α enthalten ist, anders als s_α ist und durch den Punkt S_α nicht geht, dann ist der Kegel $\Phi^2_{s_\alpha}$, der durch die Gerade s_α bestimmt ist, in die Quadrik Φ^2_a eingeschrieben, die durch die Gerade a bestimmt ist.

Beweis:

Nehmen wir folgende Zeichen an:

$$W = s_\alpha \cap k \qquad\qquad A = s_\alpha \cap a$$

Die Geraden /WQ_1/, /WQ_2/, /WA/ /Abb. 1.3/ sind in den entsprechenden Ebenen ε_1, ε_2, α enthalten, die die Quadrik Φ^2_a berühren /sie gehen durch die Berührungspunkte Q_1, Q_2, A dieser Ebenen und liegen nicht in der Quadrik/, sie berühren also Φ^2_a .

Daraus folgt, daß die Ebene τ , die durch die Punkte Q_1, Q_2, A geht, die Polarebene des Punktes W in bezug auf die Quadrik Φ^2_a ist und sie im Kegelschnitt s_A schneidet, der durch den Punkt A bestimmt ist. Der Kegelschnitt s_A ist auch ein Schnitt τ durch die $\Phi^2_{s_\alpha}$.
Die Durchdringungslinie der Quadrik Φ^2_a und des Kegels $\Phi^2_{s_\alpha}$ wird zum doppelten Kegelschnitt s_A degeneriert. Der Kegel mit dem Scheitelpunkt W und der Direktrix s_A ist in die Quadrik Φ^2_a eingeschrieben.

Eine beliebige Gerade des Bündels /W/, die im Inneren des Kegels enthalten ist, schneidet die Quadrik Φ^2_a im imaginären konjugierten Punktepaar. Die Gerade, die im Außeren des Kegels enthalten ist, schneidet Φ^2_a in zwei verschiedenen reellen Punkten. Die Erzeugende des Kegels berührt diese Quadrik.
In jeder Ebene δ , die den Kegel $\Phi^2_{s_\alpha}$ berührt, liegt die Erzeugende des Kegels, die die Achse der involutorischen Kollineation dieser Ebene ist. Die Paare der homologen Geraden dieser Kollineation sind Erzeugende der Quadriken, die auf dem Kegel $\Phi^2_{s_\alpha}$ umbeschrieben sind.

Aber:

Wenn die Quadrik $\bar{\Phi}^2_a$ zu den Ebenen ε_1 und ε_2 degeneriert wird, kann man den Kegel $\bar{\Phi}^2_{s_\alpha}$ als in die Quadrik eingeschriebenen Kegel betrachten.

Schlußfolgerung 2

Wenn wir die Quadrikklasse $\bar{\Phi}^2_{P_1}, \Phi^2_{P_2}, \Phi^2_{P_3}, \ldots$, die durch entsprechende, zu einem Büschel mit dem Scheitelpunkt P und der Basis α gehörige Geraden $p_1, p_2, p_3, \ldots$ bestimmt sind, mit der Ebene α schneiden, dann erhalten wir solche Schnitte dieser Quadriken /sie sind degeneriert zu den Geradenpaaren: p_1 und p_1', p_2 und p_2', p_3 und $p_3', \ldots$/, daß die Geraden des gleichen Paares in der involutorischen Kollineation K_α homolog sind. Die Geraden $p_1', p_2', p_3', \ldots$ gehören also zu einem Büschel mit dem Scheitelpunkt P', der mit dem Punkt P in dieser Kollineation homolog ist.

Schlußfolgerung 2´

Wenn zwei perspektive Geradenbüschel der Ebene α dieselbe Eigenschaft haben, daß sich ihre homologen Geraden auf s_α schneiden und die Scheitelpunkte P und P' dieser Büschel homologe Punkte in der involutorischen Kollineation K_α sind, dann bestimmen die Paare der homologen Geraden betrachteter Büschel identische Quadriken. Der Kegel $\Phi^2_{s_\alpha}$ ist in jede dieser Quadriken eingeschrieben. Wenn $P = P' \in s_\alpha$, dann gehören alle betrachteten Quadriken zu einem Büschel, dessen Basis der doppelte Kegelschnitt s_P ist.

Schlußfolgerung 3

Wenn $\Phi^4_{a^2}$ eine Fläche vierter Ordnung bezeichnet, die durch den Kegelschnitt a^2 bestimmt und in der Ebene α enthalten ist, dann ist der Schnitt der Fläche mit der Ebene α eine Kurve vierter Ordnung, die zu zwei Kegelschnitten a^2 und a_1^2, homolog in K_α, degeneriert ist.

Schlußfolgerung 3´

Wenn zwei Kegelschnitte a^2 und a_1^2, die in der Ebene α enthalten sind, in der involutorischen Kollineation K_α dieser Ebene homolog sind, dann bestimmen sie die gleiche Fläche vierter Ordnung /Abb. 1.4/.
Jede der Ebenen ε_1 und ε_2 schneidet diese Fläche in vier Paaren der Geraden, die entsprechend durch die Punkte Q_1 und Q_2 gehen. Sie sind degenerierte Kegelschnitte, die durch die gemeinsamen Punkte der in K_α homologen Kegelschnitten mit der Geraden v_α bzw. k_α bestimmt sind. Die Ebenen ε_1 und ε_2 berühren also die $\Phi^4_{a^2}$ in den Punkten Q_1 und Q_2: sie sind also gemeinsame Tangentialebenen der beiden Schalen derselben Fläche, die durch die Punkte Q_1 und Q_2 gehen.

Die Ebene α schneidet die $\Phi^4_{a^2}$ in der Kurve vierter Ordnung, die zu zwei Kegelschnitten a^2 und a_1^2 degeneriert wird.
Die Ebenen des Büschels /l/, die die Kegelschnitte a^2 und a_1^2 entsprechend in den Punkten A, B berühren, schneiden die Fläche $\Phi^4_{a^2}$ in den zu den doppelten Kegelschnitten s_B und s_A degenerierten Kurven vierter Ordnung. Die Durchdringungslinie des Kegels $\Phi^2_{s_\alpha}$ mit der Fläche $\Phi^4_{a^2}$ ist die Kurve achter Ordnung, die zu der doppelten Kurve vierter Ordnung degeneriert wird, die dann zu zwei Kegelschnitten s_c und s_d degeneriert wird. Diese Kegelschnitte sind durch die gemeinsamen Punkte der Kegelschnitte a^2 und a_1^2 mit der Kollineationsachse s_α bestimmt.

Will man die Lage des Kegels $\Phi^2_{s_\alpha}$ in bezug auf die Fläche $\Phi^4_{a^2}$ prüfen, dann betrachten wir einen beliebigen reellen Punkt P auf der Durchdringungslinie $\Phi^2_{s_\alpha}$ mit $\Phi^4_{a^2}$ /in der Abb. 1.4 ist der Punkt P auf dem Kegelschnitt s_c/.
Die Ebene δ berührt den Kegel in diesem Punkt und geht durch die Erzeugende p_1 /PW/ des Kegels und durch die Gerade p_2, die den Kegelschnitt s_c im Punkt P berührt. Die Gerade p_1 schneidet die Fläche $\Phi^4_{a^2}$ in vier Punkten, von denen je zwei in den Punkten P und $P_1 = p_1 \cap s_D$ zusammenfallen.
Daraus folgt, daß p_1 die Fläche $\Phi^4_{a^2}$ sowohl im Punkt P als auch im Punkt P_1 /das ist die sog. Zweipunktberührung[1/] in diesen beiden Punkten/ berührt.
Im Falle der Geraden p_2 fallen zwei von den vier mit der Fläche $\Phi^4_{a^2}$ gemeinsamen Punkten im Punkt P zusammen. Die Gerade p_2 berührt daher auch die Fläche im Punkt P. Daraus folgt, daß die Ebene δ auch die Fläche $\Phi^4_{a^2}$ berührt. In einem beliebigen Punkt der Durchdringungslinie des Kegels $\Phi^2_{s_\alpha}$ mit der Fläche $\Phi^4_{a^2}$ haben diese Flächen gemeinsame Tangentialebenen..

Wenn die Kollineation K_α der Ebene α einen Kegelschnitt b^2 in sich selbst führt /Abb. 1.5/, dann schneidet jede Ebene des Büschels /l/ die Fläche $\Phi^4_{b^2}$ in zwei identischen Kegelschnitten, die durch die homologen Punkte des Kegelschnittes b^2 gehen.

Die Fläche $\Phi^4_{b^2}$ ist in diesem Fall eine doppelte Quadrik.
Zum Schluß beweisen wir noch folgenden Satz:

SATZ 1.7

Wenn die Ebenen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ zum selben Büschel mit der Achse p, windschief zu der Geraden $l/Q_1Q_2/$ gehören, dann sind die Kollineationsachsen $s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, s_{\alpha_3}, \ldots$ dieser Ebenen Erzeugende einer schiefen Quadrik Φ^2.

1/ [9] S.256.

Beweis:

Betrachten wir ein Ebenenbüschel $p/\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots/$ mit der Achse p, windschief zu l. Die Achse l schneidet dieses Büschel in der Reihe $l/\ S\alpha_1, S\alpha_2, S\alpha_3, \ldots/$.

Dabei:

$$l/\ S\alpha_1, S\alpha_2, S\alpha_3, \ldots/ \ \bar{\wedge}\ \ p/\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots/ \qquad /1/$$

Die polaren Ebenen für einzelne Punkte dieser Reihe in bezug auf die zu den Ebenen ε_1 und ε_2 degenerierten Quadrik, gehören zum Büschel $k/\ \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots/$.

Dabei:

$$k/\ \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots/ \ \bar{\wedge}\ \ l/S\alpha_1, S\alpha_2, S\alpha_3, \ldots/ \qquad /2/$$

Berücksichtigt man /1/ und /2/, dann ergibt sich:

$$p/\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots/ \ \bar{\wedge}\ \ k/\ \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots/ \qquad /3/$$

Die Kollineationsachse ist für eine beliebige Ebene des Büschels /p/ die Schnittlinie dieser Ebene mit der polaren Ebene des gemeinsamen Punktes der Achse l und dieser Ebene.

Wegen /3/[1/] folgt, daß die homologen Ebenen der Büschel /p/ und /k/ die geraden Erzeugenden einer schiefen Quadrik bestimmen, deren Erzeugende auch die Geraden p und k sind.

Wenn dabei die Geraden p und k zueinander windschief sind, dann ist $\bar{\Phi}^2$ eine nicht degenerierte, geradlinige Quadrik. Jede Erzeugende dieser Quadrik, die die Erzeugenden p und k schneidet, ist die Kollineationsachse einer Ebene des Büschels /p/, die Erzeugenden derselben Familie dagegen /wie die Geraden p und k/ sind nicht die Kollineationsachsen einer Ebene.

Wenn die Geraden p und k in der gleichen Ebene liegen, dan ist Φ^2 ein Kegel /ein zu der Geraden k, wenn p = k, degenerierter Kegel/. Betrachten wir die gegenseitige Lage der Quadriken Φ_p^2 und Φ^2.

$$V_p = p \cap \varepsilon_1$$

$$K_p = p \cap \varepsilon_2$$

$$P_1 = /V_pQ_1/ \cap k$$

$$P_2 = /K_pQ_2/ \cap k \qquad /\text{Abb. } 1.6/$$

Die Quadriken Φ_p^2 und Φ^2 haben drei gemeinsame Erzeugende: p, $/K_pQ_2/$

1/ [12] S.192.

und $/V_pQ_1/$. Es wird bewiesen, daß die Gerade p eine Doppelgerade für beide Quadriken ist. Die Ebene ε_1 berührt die Quadrik $\bar{\Phi}_p^2$ im Punkt Q_1 und die Φ^2 im Punkt P_1. Die Ebene ε_2 berührt die $\bar{\Phi}_p^2$ in einem beliebigen Punkt Q_2 und die $\bar{\Phi}^2$ im Punkt P_2. Die Ebene Υ berührt die $\bar{\Phi}_p^2$ in einem beliebigen Punkt P der Geraden p und schneidet $\bar{\Phi}_p^2$ im Geradenpaar. Der Punkt P liegt auf der Kollineationsachse dieser Ebene. Weil die Kollineationsachse s_γ der Ebene Υ und die Gerade p die Erzeugenden der Quadrik Φ^2 sind, dann berührt die Ebene Υ die Quadrik Φ^2 im Punkt P.
Daraus folgt:
Die Quadriken $\bar{\Phi}_p^2$ und $\bar{\Phi}^2$ haben in einem beliebigen Punkt der Geraden p gemeinsame Tangentialebenen. Wenn die Quadriken $\bar{\Phi}_p^2$ und $\bar{\Phi}^2$ durch eine beliebige Ebene δ geschnitten werden, dann sind die entstandenen Durchschnitte zwei Kegelschnitte, die im Punkt $T_p = p \cap \delta$ eine gemeinsame Tangente t haben und sich in zwei Punkten: $R_1 = /V_pQ_1/ \cap \delta$ und $R_2 = /K_pQ_2/ \cap \delta$ schneiden. Setzen wir voraus, daß die Gerade p die Achse l im Punkt P schneidet und $p \sim \subset / \varepsilon_1 \cup \varepsilon_2/$. Die polare Ebene Υ für diesen Punkt in bezug auf die zum Ebenenpaar $/ \varepsilon_1 \varepsilon_2/$ degenerierten Quadrik schneidet das Ebenenbüschel $p/ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots /$ im Geradenbüschel mit dem Scheitelpunkt, der gemeinsam für die Gerade p und die Ebene Υ ist. Die Geraden dieses Büschels sind die Kollineationsachsen einzelner Ebenen des Büschels $/p/$.
Wenn dagenen die Gerade p die l schneidet und auch $p \subset / \varepsilon_1 \cup \varepsilon_2/$, dann ist die Gerade p die Kollineationsachse für jede Ebene des Büschels und umgekehrt: - Jede k schneidende und durch den Punkt Q_1 oder Q_2 gehende Gerade ist die Kollineationsachse unendlich vieler zum Büschel gegöriger Ebenen, dessen Achse eben diese Gerade ist.

KAPITEL 2

Quadratische Projektion des projektiven Raumes P^3 auf die Ebene

§ 1. Definition der quadratischen Projektion der Punkte des Raumes P^3

Schneiden wir das Bündel der Kegelschnitte $[W^2]$ des Grundsystems $<Q_1Q_2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2>$ mit der Ebene π, die durch einen der Fundamentalpunkte geht: in unseren Betrachtungen geht π durch den Punkt Q_1 /dann $Q_2 \sim\in \pi$/ und $\pi \neq \varepsilon_1$ /Abb. 2.1./.

$s_{x_\pi} \overset{df}{=} s_x \cap \pi$, wo s_x ein Kegelschnitt des Bündels $[W^2]$ ist, der durch den Punkt $X \in P^3$ geht.

Aus der Definition des Bündels $[W^2]$ und aus der Art der Wahl der Ebene π geht hervor, daß s_{x_π} eine aus zwei Elementen $\{Q_1, Y\}$ bestehende Menge ist, wo Y ein bestimmter Punkt der Ebene π /Y kann Punkt Q_1 sein/ ist, Y kann außer dem Punkt Q_1 auch unendlich viele Punkte der Ebene π haben /wenn $s_x \supset t_1$/.

Bestimmen wir folgende Transformation F der Punkte $X \in P^3$.

Definition 2:

$$F/x/ := \begin{cases} Y & \text{wenn } s_{x_\pi} = \{Q_1 Y\} \text{ und } Q_1 \neq Y \\ Q_1 & \text{wenn } s_{x_\pi} = \{Q_1 Q_1\} \\ s_{x_\pi} & \text{wenn die Menge unendlich viele Punkte der Ebene } \pi \text{ hat.} \end{cases}$$

Bezeichnen wir die Ebene π als Projektionsebene, die Transformation F als quadratisches Projizieren des Raumes P^3 auf die Projektionsebene π, den Wert der Funktion $F/X/$ für das bestimmte X als quadratische Projektion des Punktes X auf die Projektionsebene π, den Kegelschnitt s_x als Kegelschnitt, der den Punkt X projiziert.

Definition 3:

Bezeichnen wir die quadratische Projektion der Menge Z der Punkte des Raumes als Menge der quadratischen Projektion auf eine gegebene Projektionsebene π einzelner Punkte dieser Menge. Weil die Projektion jedes von den Fundamentalpunkten Q_1, Q_2 die ganze Projektionsebene ist, betrachtet man nur solche Mengen, zu denen die Punkte Q_1 und Q_2 nicht gehören. Nehmen wir folgende Bezeichnungen an:

$$X^2 := F/X/$$

$$t_{\varepsilon_1} := \varepsilon_1 \cap \pi$$

$t\varepsilon_2 := \varepsilon_2 \cap \pi$

$\tau :=$ eine durch die Gerade t_1 und den Punkt Q_2 bestimmte Ebene

$k_\tau := \tau \cap \varepsilon_2$

Wir beweisen folgenden Satz:

SATZ 2.1.

Für einen beliebigen Punkt $X \in P^3$,

/i/ $[X \sim\in \tau \Rightarrow /X^2$ eine Menge ist, die aus einem Element besteht $X^2 \sim\in t\varepsilon_1]$

/ii/ $[X \in /\tau - t\varepsilon_1 - k_\tau / \Rightarrow X^2 = Q_1]$

/iii/ $[X \in /t\varepsilon_1 - \{Q_1\}/ \cup /k_\tau - \{Q_2\}/ \Longrightarrow X^2 = t\varepsilon_1]$ [1/]

Beweis:

Unmittelbar aus dem Satz 1.1 und der Definition 2 ergibt sich, daß jedem Punkt X des projektiven Raums eine eindeutig bestimmte Menge s_{X_π} zugeordnet ist. Betrachtet man verschiedene Lagen des Punktes X in bezug auf das System $\langle Q_1 Q_2\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2 \rangle$, dann folgt daraus:

1^o Wenn der Punkt $X \sim\in t\varepsilon_1$ und $X \sim\in k_\tau$, dann geht durch ihn genau nur ein projektiver, zum Bündel $[W^2]$ gehöriger Kegelschnitt /der degeneriert oder nicht degeneriert sein kann/, der die Projektionsebene π in zwei Punkten Q_1 und X^2 schneidet. Der Punkt X^2 der Projektionsebene ist die quadratische Projektion des Punktes X auf die Projektionsebene π. Wenn $X \in \pi$, dann $X^2 = X$; wenn $X \in /\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2/$, dann $X^2 \in k\varepsilon_2$. Für die Punkte $X \sim\in \tau$ ist die Ebene, in der sich ein den Punkt X projizierender Kegelschnitt s_X befindet, anders als die Ebene τ /sie schneidet τ in der Achse l/. Daher $X^2 \sim\in t\varepsilon_1$. Wenn $X \in \tau$, dann $X^2 = Q_1$.

2^o Wenn $X \in t\varepsilon_1$ und $X \neq Q_1$ oder $X \in k_\tau$ und $X \neq Q_2$, dann ist die den Punkt X projizierende Linie ein zu zwei Geraden $t\varepsilon_1$ und k_τ degenerierter Kegelschnitt. Weil $t\varepsilon_1 \subset \pi$, dann ist X^2 eine ausgedehnte Projektion des Punktes X sowie die Menge der Punkte der Geraden $t\varepsilon_1$.

In der Abbildung 2.1 ist der Punkt P_1^2 die quadratische Projektion des Punktes P_1, der Punkt Q_1 - der Punkt $P_2 \in \tau$, die Gerade $t\varepsilon_1$ - der Punkt $P_3 \in t\varepsilon_1$. Es sei X^2 ein beliebiger Punkt der Projektionsebene anders als der Punkt Q_1. Dann geht aus dem Satz 1.1 hervor, daß durch den Punkt X^2 genau ein degenerierter oder nicht degenerierter Kegelschnitt des Bündels $[W^2]$ geht. Wenn dabei $X^2 \sim\in t\varepsilon_1$, dann ist der Kegel-

[1/] Die Gerade $t\varepsilon_1$ ist die ausgedehnte Projektion des Punktes X /[5] S.40-90/.

schnitt s_{X^2} nicht in der Ebene τ enthalten /er schneidet sie nur in zwei Punkten Q_1 und Q_2/. Wenn dagegen $X^2 \in /t_{\varepsilon_1} - \{Q_1\}/$, dann $s_{X^2} \subset \tau$ und sie ist es für j den Punkt X^2 der zu zwei Geraden t_{ε_1} und k_τ degenerierte Kegelschnitt.

Wenn der Punkt X^2 mit dem Punkt Q_1 zusammenfällt, dann gehen alle Kegelschnitte des Bündels $[W^2]$ durch diesen Punkt. Man beschränkt sich hier auf die durch den Punkt Q_1 gehenden Kegelschnitte, die in der Ebene τ enthalten sind.

Weil jeder beliebige Kegelschnitt des Bündels $[W^2]$ die projizierende Linie jedes auf ihm liegenden Punktes ist, dann geht daraus hervor:

SATZ 2.2.

/i/ Jeder Punkt $X^2 \sim \in /t_{\varepsilon_1} - \{Q_1\}/$ der Projektionsebene π ist die quadratische Projektion unendlich vieler Punkte $X \sim \in /t_{\varepsilon_1} \cap k_\tau/$; besonders wenn $X^2 \sim \in t_{\varepsilon_1}$, dann ist sie die Projektion unendlich vieler Punkte $X \sim \in \tau$, oer Punkt Q_1 ist die Projektion unendlich vieler Punkte X: $X \in /\tau - t_{\varepsilon_1} - k_\tau/$.

/ii/ Die Gerade $t_1 \subset \pi$ ist die Projektion unendlich vieler Punkte $X \in /t_1 \cup k_\tau/$.

Unmittelbar aus den Sätzen 2.1 und 2.2 folgt:

SATZ 2.3.

Die quadratische Projektion bildet den Raum $P^3 - \{Q_1, Q_2\}$ auf die Projektionsebene π ab. Festpunkte in dieser Abbildung sind alle nicht zu der Geraden t_{ε_1} gehörigen Punkte der Projektionsebene π.
In weiteren Paragraphen beschäftigt man sich mit den Eigenschaften der quadratischen Projektion, wobei man die Mengen des Raumes P^3 ausnutzt.

§ 2. Quadratische Projektion der Geraden

Man unterteile die Menge aller Geraden des Raumes /die nicht durch die Punkte Q_1, Q_2 gehen/ in zwei Klassen:

1. Geraden in allgemeiner Lage - windschief zu den Geraden 1, t_{ε_1} und k_τ
2. Geraden in besonderer Lage - Geraden des Raumes, die nicht in allgemeiner Lage sind.

Wie aus dem Satz 1.2 folgt, ist die Menge der die Punkte der Geraden p projizierenden Kegelschnitte due Fläche Φ^2_p zweiter Ordnung. Daraus folgt.

SATZ 2.4.

Die quadratische Projektion der Geraden ist eine Kurve, die ein Kegelschnitt ist.
Bezeichnen wir mit $/K^2/$ die Familie aller geradlinigen Flächen zweiter Ordnung, die die Ebene ε_1 im Punkt Q_1 berührt und die Ebene ε_2 im Punkt Q_2.
Außer den nicht zu $/K^2/$ degenerierten, geradlinigen Quadriken /außer einschaligen Hyperboloiden, hyperbolischen Paraboloiden/ und den Kegeln zählt man auch die zu zwei Ebenen ε_1 und ε_2 degenerierte Quadrik und die doppelten durch die Achse $l/Q_1Q_2/$ gehenden Ebenen.
Unmittelbar aus dem Satz 1.2 und der Definition 4 folgt:

SATZ 2.5.

Durch jede nicht durch die Punkte Q_1, Q_2 gehende Gerade p der projektiven Raumes geht genau eine die Gerade p projizierende Fläche und ist die Fläche der Familie $/K^2/$.

SATZ 2.6.

Jede Fläche der Familie $/K^2/$ ist die Fläche, die unendlich viele auf ihr liegende Geraden projiziert.
Betrachtet man die charakteristischen Lagen der Geraden in bezug auf das System $\langle Q_1Q_2\, \varepsilon_1\, \varepsilon_2 \rangle$, dann muß man genauer derer quadratische Projektionen auf die Projektionsebene π untersuchen.

a. Geraden in allgemeiner Lage

SATZ 2.7.

Wenn sich die Gerade p in allgemeiner Lage befindet, dann ist ihre quadratische Projektion auf die Projektionsebene π ein nicht degenerierter Kegelschnitt, der die Gerade t_{ε_1} im Punkt Q_1 berührt und die Gerade t_{ε_2} in zwei reellen, voneinander verschiedenen oder zusammengefallenen Punkten schneidet.

Beweis:

Setzen wir voraus, daß die Gerade p sich in allgemeiner Lage in bezug auf das System $\langle Q_1Q_2\, \varepsilon_1\, \varepsilon_2 \rangle$ befindet. Auf Grund des Satzes 1.2 $/1^o, 2^o/$ ist die projektive Fläche Φ^2_p der Geraden p eine nicht degenerierte, geradlinige Quadrik oder ein Kegel. Weil die Projektionsebene π durch den Berührungspunkt Q_1 der Ebene ε_1 mit Φ^2_p und $t_{\varepsilon_i} \subset \Phi^2_p$ geht, dann ist der Durchschnitt der Fläche Φ^2_p durch die Projektionsebene π ein nicht degenerierter Kegelschnitt p^2, der die Gerade $t\varepsilon_1$ im Punkt Q_1 berührt. Die Ebene ε_2 berührt die projizierende Fläche Φ^2_p im Punkt Q_1 und schneidet sie im reellen, zu zwei verschiedenen oder zusammengefallenen Geraden degenerierten Kegelschnitt, die durch den Punkt Q_2 gehen. Die mit der Geraden $t\varepsilon_2$ gemeinsamen Punkte dieser Geraden sind gleichzeitig Schnittpunkte des Kegelschnittes des Durchschnitts mit $t\varepsilon_2$; das sind also reelle Punkte.

Bezeichnen wir die Quadrik der Familie $/K^2/$ mit Φ^2_π, die durch die uneigentliche Gerade der Projektionsebene π bestimmt ist. Wir nennen sie die Verschwindquadrik[1/]. Aus dem Satz 2.7 folgt, daß eine beliebige Gerade p die Quadrik Φ^2_π genau in zwei Punkten schneidet. Bezeichnet man diese Punkte mit R_1 und R_2, dann erhält man:

Schlußfolgerung

1° Wenn R_1 und R_2 voneinander verschiedene, reelle Punkte sind, dann ist die quadratische Projektion der Geraden p eine Hyperbel

2° Wenn die Punkte R_1 und R_2 zusammenfallen, dann ist die quadratische Projektion der geraden p eine Parabel

3° Wenn R_1 und R_2 imaginäre, konjugierte sind, dann ist die quadratische Projektion der Geraden p eine Ellipse

Um die Punkte R_1 und R_2 zu konstruieren, ist es genug, durch die Gerade p eine beliebieg Ebene zu führen und den Durchschnitt Φ^2_π durch diese Ebene zu bestimmen. Die gemeinsamen Punkte des erhaltenen Durchschnitts und der Geraden p sind die gesuchten Punkte R_1 und R_2.
In der Abb. 2.2 führte man durch die Gerade p die Ebene α. Weil die Punkte: X_α, 1,2,3 und 4^∞ die gemeinsamen Punkte der Ebene α und der Quadrik Φ^2_π sind, dann bestimmen sie eindeutig den Kegelschnitt des Durchschnittes der Quadrik durch diese Ebene. Die Gerade p schneidet den so bestimmten Kegelschnitt in den Punkten R_1 und R_2.

Einzelne Punkte des Kegelschnittes des Durchschnittes bestimmte man, indem man mehrmals den Satz von Pascal benutzte. Besonders bestimmte man den zweiten uneigentlichen Punkt dieses Kegelschnittes - B^∞; man erhielt ihn, indem man den Kegelschnitt des Durchschnittes durch eine uneigentliche Gerade der Ebene α schnitt und die Asymptoten und das Zentrum der entstandenen Hyperbel bestimmte.

b. Geraden in besonderer Lage

SATZ 2.8.

Wenn die Gerade p in keiner der Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ enthalten ist, windschief zu l ist und die Gerade $t\varepsilon_1$ oder die Gerade k_τ schneidet, dann

[1/] Man verwendete diesen Terminus analogisch zur Verschwindebene in der Zentralprojektion. Die quadratische Projektion dieser Quadrik sind uneigentliche Punkte der Projektionsebene.

ist der zu zwei Geraden $t\varepsilon_1$ und $\overline{p} \neq t\varepsilon_2$ degenerierte Kegelschnitt die quadratische Projektion dieser Geraden. Die Geraden $t\varepsilon_1$ und $\overline{p} \neq t\varepsilon_2$ schneiden sich im Punkt $P \neq Q_1$.

Beweis:

1^o Setzen wir voraus, daß die Gerade p windschief zu $k/\varepsilon_1\varepsilon_2/$ /Abb. 2.3a/ ist. Dann sind die Geraden t_1 und k_τ die Erzeugenden der nicht degenerierten, geradlinigen Quadrik Φ_p^2, die die Gerade p projiziert. Weil die Projektionsebene π durch die Erzeugende $t\varepsilon_1$ geht und anders als ε_1 ist, dann berührt sie die Fläche Φ_p^2 im Punkt P, der auf $t\varepsilon_1$ liegt und anders als Q_1 ist. Daraus folgt, daß π die Quadrik Φ_p^2 in noch einer Geraden $\overline{p}$ schneidet, die durch den Punkt P und den Punkt T_p geht, in dem die Gerade p die Projektionsebene π schneidet /wenn $T_p \sim \in t\varepsilon_1$/ Der Kegelschnitt $p^2/t\varepsilon_1, \overline{p}/$ ist die quadratische Projektion der Geraden p.

2^o Wenn die Gerade p die k schneidet, dann ist der Punkt, wo sie sich schneiden, gleichzeitig ein für die Geraden gemeinsamer Punkt wie auch ein Scheitel des die Gerade p projizierenden Kegels /Abb. 2.3b/. Die Projektionsebene π schneidet diesen Kegel in einer Erzeugenden $t\varepsilon_1$ sowie in einer Erzeugenden $\overline{p}$. Weil die Ebene π diesen Kegel nicht berührt, sie die Gerade $\overline{p}$ anders als $t\varepsilon_1$ und schneidet $t\varepsilon_2$ im selben Punkt wie die Gerade p.

Für die Geraden, die in den Fundamentalebenen enthalten sind, erhalten wir unmittelbar aus dem Satz 1.2 /3^o und 4^o/.

SATZ 2.9.

Die quadratische Projektion einer beliebigen in der Ebene ε_1 oder in der Ebene ε_2 enthaltenen Geraden ist ein zu zwei Geraden $t\varepsilon_1$ und $t\varepsilon_2$ degenerierter Kegelschnitt.

SATZ 2.10.

Wenn die Gerade p einen mit der Geraden l gemeinsamen Punkt hat, dann ist die quadratische Projektion dieser Geraden eine doppelte Gerade $t_\alpha/\alpha,\pi/$, wo $\alpha = /p,l/$.

Bezeichnen wir mit $R_\pi/Q_1, t\varepsilon_1/$ die Dreiparameterfamilie der Kegelschnitte der Projektionsebene π, die durch den Punkt Q_1 gehen und die Gerade $t\varepsilon_1$ im Punkt Q_1 berühren und mit der Geraden $t\varepsilon_2$ gemeinsame, reelle Punkte haben.

Zu dieser Familie, außer den nicht degenerierten Kegelschnitten, rechnet man auch zu zwei verschiedenen Geraden degenerierte Kegelschnitte, von denen eine die Gerade $t\varepsilon_1$ ist. Ihr gemeinsamer Punkt ist anders als der Punkt Q_1.

Zwei zusammengefallene Geraden schneiden $t\,\varepsilon_1$ im Punkt Q_1 wie zwei in $t\,\varepsilon_1$ zusammengefallene Geraden.

SATZ 2.11.

Durch jeden Kegelschnitt der Familie $R_\pi/Q_1, t\,\varepsilon_1/$ geht genau eine Fläche, die eine Gerade des projektiven Raumes P^3 projiziert.

Beweis:

1^o Setzen wir voraus, daß der Kegelschnitt a^2 der Familie $R_\pi/Q_1, t\,\varepsilon_1/$ nicht degeneriert ist und die Gerade $t\,\varepsilon_2$ in den Punkten A_1 und A_2 /Abb. 2.4/ schneidet. Bezeichnen wir mit A_3 den mit der Ebene ε_1 gemeinsamen Punkt der Geraden $/A_2Q_2/$.

1^o 1/ Wenn $A_1 \neq A_2$, dann sind die Geraden $/Q_1A_3/$ und $/Q_2A_1/$ windschief zueinander. Betrachten wir zwei Ebenenbüchel: eines mit der Achse $/Q_1A_3/$ und das zweite mit der Achse $/Q_2A_1/$ und setzen wir in ihnen folgende Zuordnung fest: jeder Ebene ξ_1 eines Büschels ordnet man solch eine Ebene ξ_2 des zweiten Büschels zu, daß ihre Schnittlinie durch einen beliebigen Punkt des Kegelschnittes a^2 geht. Solche Transformation bestimmt die projektive Korelation dieser Büschel. Die Menge der Schnittlinien, in denen sich die homologen Ebenen beider Büschel schneiden, ist die geradlinige Quadrik, die die Ebene ε_1 im Punkt Q_1 und die Ebene ε_2 im Punkt Q_2 berührt[1/].

1^o 2/ Wenn $A_1 = A_2$, dann schneiden sich homologe Ebenen beider Ebenenbüschel in den Geraden des Bündels $/A_3/$, indem sie den Kegel mit dem Scheitelpunkt A_3 und der Direktrix a^2 /den Zylinder, wenn A_3 ein uneigentlicher Punkt ist/ bestimmt. Dieser Kegel berührt die Ebenen ε_1 und ε_2, und die Punkte Q_1, Q_2 gehören dem Mantel dieses Kegels an. Setzen wir voraus, daß:

2^o a^2 ein zu zwei Geraden $/t\,\varepsilon_1, \bar{a}/$ degenerierter Kegelschnitt ist, wo die Gerade $\bar{a}$ die $t\,\varepsilon_1$ im Punkt $A \neq Q_1$ und $\bar{a} \neq t\,\varepsilon_2$ schneidet. Bezeichnen wir die mit der Geraden $t\,\varepsilon_2$ gemeinsamen Punkte des Kegelschnittes a^2 mit $A_1 = A_2$; den mit der Ebene ε_1 gemeinsamen Punkt der Geraden $/A_1Q_2/$ mit A_3; den gemeinsamen Punkt der Geraden t_1 und t_2 mit T. Betrachten wir zwei Ebenenbüschel: Eins mit der Achse $/TQ_2/$ und das zweite mit der Achse $/A_3Q_1/$. Die Gerade $\bar{a}$ ist windschief zu den beiden Achsen. Es sei $\xi_2 = f/\xi_1/$ eine Funktion, die jeder Ebene ξ_1 des Büschels $/TQ_2/$ im Büschel $/A_3Q_1/$ solche Ebene ξ_2 zuordnet, die sich mit ihr in der Geraden $\bar{a}$ schneidet.

Solche Transformation ist projektiv, und die Menge der Geraden, in denen sich die homologen Ebenen beider Büschel schneiden, eine geradli-

---

1/ [7] S.167.

nige Quadrik, die die ε_1 im Punkt Q_1 und die Ebene ε_2 im Punkt Q_2 berührt.

3^0 Wenn a^2 ein zu zwei Geraden t_1 und t_2 degenerierter Kegelschnitt ist, dann geht durch jeden Punkt dieses Kegelschnittes ein zu zwei Geraden degenerierter Kegelschnitt des Bündels $[W^2]$, von denen eine Gerade zum Büschel $/Q_1/\varepsilon_1$ gehört, und die zweite zum Büschel $/Q_2/\varepsilon_2$. Beide Geraden schneiden sich in der Geraden $k/\varepsilon_1\varepsilon_2/$. Die Menge dieser Kegelschnitte bestimmt die Ebene ε_1 und die Ebene ε_2.
Daraus folgt, daß die projektive Fläche einer Geraden a, deren quadratische Projektion ein Kegelschnitt a^2 ist, eine zu zwei Ebenen ε_1 und ε_2 degenerierte Quadrik ist.

4^0 Wenn a^2 eine doppelte, die $t\,\varepsilon_1$ in Punkt Q_1 schneidende Gerade t_α ist, dann bestimmen der Punkt Q_2 und die Gerade t_α genau eine Ebene α, die eine degenerierte jede in ihr enthaltene Gerade projizierende Quadrik ist, wenn diese Ebene doppelt ist.

5^0 Wenn a^2 eine doppelte Gerade $t\,\varepsilon_1$ ist, dann ist die projizierende Quadrik der Geraden des Raumes eine doppelte Ebene τ.

Aus den Sätzen 2.11 und 2.6 folgt:

SATZ 2.12.

Jeder Kegelschnitt der Familie $R_\pi/Q_1 t\,\varepsilon_1/$ ist die Projektion unendlich vieler Geraden des projektiven Raumes P^3.

§ 3. Quadratische Projektionen ebener Figuren

Betrachten wir eine Ebene α, die keine Gerade l enthält. Aus der Definition 2 geht hervor, daß die quadratische Projektion dieser Ebene die ganze Projektionsebene ist.
Jedem Punkt der Ebene α ist eindeutig seine quadratische Projektion auf die Ebene π zugeordnet, und jeder Punkt der Projektionsebene π ist die quadratische Projektion /oder gehört zur ausgedehnten Projektion/ mindestens eines Punktes der Ebene α. Bezeichnen wir die quadratische Projektion der involutorischen, zentralen,Kollineationsachse s_α der Ebene α mit s_α^2.

SATZ 2.13.

/i/ Die quadratischen Projektionen verschiedener, homologer Paare in K_α reeller Punkte der Ebene α sind als äußere Punkte des Kegelschnittes s_α^2 zu betrachten.

/ii/ Die quadratischen Projektionen der Paare der reellen, zusammengefallenen Punkte der Achse s_α sind als Punkte des Kegelschnittes s_α^2 zu betrachten.

/iii/ Die quadratischen Projektionen der imaginären, konjugierten Punktepaare der Ebene α, homolog in der Kollineation K_α, sind als innere Punkte des Kegelschnittes s_α^2 zu betrachten.

SATZ 2.14.

/i/ Jeder äußere Punkt des Kegelschnittes s_α^2 ist die quadratische Projektion /oder gehört zur ausgedehnten Projektion/ zweier verschiedener, reeller, in K_α homologer Punkte der Ebene α.

/ii/ Die Punkte des Kegelschnittes s_α^2 sind die quadratischen Projektionen der in der Kollineation K_α zusammengefallenen Punktepaare der Ebene α.

/iii/ Jeder innere Punkt des Kegelschnittes s_α^2 ist die quadratische Projektion der homologen, imaginären, konjugierten Punktepaare der Ebene α.

Betrachten wir jetzt algebraische Kurven, die in der Ebene α enthalten sind.

a. Quadratische Projektion einer Geraden, die in der Ebene α enthalten ist

Setzen wir voraus, daß die in der Ebene α enthaltene Gerade a anders als die Kollineationsachse s_α dieser Ebene ist und durch keinen der Punkte O_1, O_2, S_α geht. Auf Grund der Schlußfolgerung 1 /Satz 1.5/ schneidet die Ebene α die die Φ_a^2 projizierende Fläche auch in der zweiten Geraden a_1, die mit der Geraden a in der Kollineation K_α homolog ist. Daraus folgt, daß die Ebene α also die Fläche Φ_a^2 im Punkt P berührt, wo sich die Geraden a, a_1 und $P \in s_\alpha$ schneiden. Der Kegel $\bar{\Phi}_{s_\alpha}^2$ /auf Grund des Satzes 1.6/ ist in diese Fläche eingeschrieben. Auf Grund der Sätze 2.4 und 2.13 erhalten wir:

SATZ 2.15.

Die quadratische Projektion einer beliebigen, in der Ebene α enthaltenen, anderen als s_α und durch keinen der Punkte O_1, O_2, S_α gehende Gerade ist ein Kegelschnitt, der den Kegelschnitt s_α^2 im Punkt Q_1 und in einem Punkt P^2 berührt, der die quadratische Projektion des für die Geraden a und s_α gemeinsamen Punktes P ist. Dieser Kegelschnitt ist die quadratische Projektion auch der mit der Geraden a in der Kollineation K_α homologen Geraden a_1.

In der Abb. 2.5,, während man die Ebene π als Bildebene betrachtet, bestimmte man die quadratische Projektion s_α^2 der Kollineationsachse s_α der Ebene α /der Punkt W^2 ist die quadratische Projektion des die Gerade s_α projizierenden Scheitels des Kegels/ und die quadratische Projektion $a^2 = a_1^2$ der homologen Geradenpaare a und a_1 dieser Ebene. P^2 ist die quadratische Projektion des Punktes, wo die Ebene α die Fläche Φ_a^2 berührt, $h_\alpha = \alpha \cap \pi$, $T_a = a \cap \pi$, $T_{a_1} = a_1 \cap \pi$. Die Gerade t berührt die Kegelschnitte s_α^2 und $a^2 = a_1^2$ im Punkt P^2.

b. Quadratische Projektion eines Geradenbüschels der Ebene

Betrachten wir das Geradenbüschel /a, b, c, .../ mit dem Scheitelpunkt P und der Grundebene α und bezeichnen wir mit $A, B, C, \ldots$ die gemeinsamen Punkte einzelner Geraden dieses Büschels mit der Geraden s_α. Aus den 2 und 2′ des Satzes 1.5 sowie aus dem Satz 2.4 folgt:

SATZ 2.16.

Wenn der Scheitelpunkt P des Geradenbüschels mit der Grundebene α nicht zur Geraden s_α gehört, dann ist die Familie der Kegelschnitte, die durch die quadratische Projektion P^2 des Scheitels dieses Büschels gehen und den Kegelschnitt s_α^2 im Punkt Q_1 und in entsprechenden Punkten $A^2, B^2, C^2, \ldots$ /Abb. 2.6/ berühren, die die quadratische Projektion der Punkte $A, B, C, \ldots$ sind, die quadratische Projektion dieses Büschels.

SATZ 2.17.

Wenn der Scheitelpunkt P des Geradenbüschels der Ebene α zu s_α gehört, dann ist das Büschel der Kegelschnitte mit den Fundamentalpunkten Q_1, P^2, die in diesen Punkten die entsprechenden, den Kegelschnitt s_α^2 in erwähnten Punkten /Abb. 2.7/ berührenden Geraden t_{ϱ_1} und t_p berühren, die quadratische Projektion dieses Büschels.

Betrachten wir zwei Geraden a, b der Ebene α, die sich im Punkte $P \sim \in s_\alpha$ schneiden, Es sei a_1 eine homologe, mit der Geraden a in der Kollineation K_α Gerade, b_1 - eine mit der Geraden b homologe Gerade, $P_1 = a_1 \cap b_1$, $R = a \cap b_1$, $R_1 = a_1 \cap b$.

Aus der Schlußfolgerung 2 des Satzes 1.5 sind die Punktepaare P und P_1, R und R_1 homolog in der Kollineation K_α der Ebene α.

Daraus folgt:

SATZ 2.18.

Wenn zwei verschiedene Geraden a und b der Ebene α nicht homolog in der Kollineation K_α sind, dann haben ihre quadratischen Projek-

tionen außer dem Punkt Q_1 und der gemeinsamen Tangente in diesem Punkt zwei reelle, gemeinsame, voneinander verschiedene oder zusammengefallene Punkte, von denen einer - $P^2 = P_1^2$ die quadratische Projektion des gemeinsamen Punktes für die Geraden a und b, a_1 und b_1, und der zweite - $R^2 = R_1^2$, die quadratische Projektion des gemeinsamen Punktes des Geraden a mit der Erzeugenden b_1, die homolog mit der Geraden b in der Kollineation K_α /a_1 und b_1/ ist.
Die Abb. 2.8 stellt zwei Geraden a,b der Ebene α dar, die sich im Punkt P schneiden, und solche, daß Φ_a^2 und Φ_b^2 nicht degenerierte, geradlinige Quadriken sind.

c. Quadratische Projektion eines Kegelschnittes und einer beliebigen, algebraischen, ebenen Kurve C^n n-ter Ordnung /$n > 2$/

Auf Grund 1.3 bestimmen die die Punkte der ebenen Kurve C^n projizierenden Kegelschnitte die Fläche $\Phi_{C^n}^{2n}$ 2n-ter Ordnung. Bezeichnen wir diese Fläche als die die Kurve C^n projizierende Fläche. Die Ebene π schneidet diese Fläche in der algebraischen Kurve C^{2n} 2n-ter Ordnung.

SATZ 2.19.

Die quadratische Projektion der algebraischen, ebenen Kurve C^n n-ter Ordnung auf die Projektionsebene π ist eine algebraische Kurve C^{2n} 2n-ter Ordnung.

Betrachten wir genauer die quadratische Projektion des Kegelschnittes. Die projizierende Fläche des Kegelschnittes ist die Fläche Φ^4 vierter Ordnung, deren Eigenschaften im Kapitel 1.
Abb. 1.4 und 1.5 beschrieben wurden. Setzen wir voraus, daß der in der Ebene α enthaltene Kegelschnitt a^2 sich nicht auf sich selbst in der Kollineation K_α /Abb. 1.4/ abbildet. Bezeichnen wir mit A^2 den Punkt, in dem der Kegelschnitt s_A dieser Fläche die Projektionsebene π schneidet, mit B^2 den gemeinsamen Punkt des Kegelschnittes s_B mit der Projektionsebene π /anders als Q_1/. Die Ebene π schneidet die Fläche $\Phi_{a^2}^4$ in der Kurve C^4 vierter Ordnung, die durch die Punkte Q_1, A^2 und B^2, die Ebene ε_1 in der Geraden t_{ε_1} geht. Die Gerade t_{ε_1} berührt die C^4 im Punkt Q_1. Die Ebene π schneidet die Ebenen Υ_1 und Υ_2, die die Kegelschnitte s_A und s_B in den Geraden t_1 und t_2 enthalten. Diese Geraden berühren die Kurve C^4 entsprechend in den Punkten A^2 und B^2. Die Ebene ε_1 berührt beide Schalen der Fläche $\Phi_{a^2}^4$. Durch den Punkt Q_1 gehen zwei Bogen dieser Kurve, beide berühren die Gerade t_{ε_1}. Q_1 ist also ein Doppelpunkt der Kurve C^4 und die Kurve hat in ihm ihre Spitze. Der Kegelschnitt s_α^2 ist ein Durchschnitt des Kegels $\Phi_{s_\alpha}^2$ durch die Projektionsebene π und hat acht mit der Kurve C^4 gemeinsame Punkte.

Vier von ihnen fallen im Punkt Q_1 zusammen, die anderen je zwei sind Schnittpunkte, die für den Kegel und die Fläche $\Phi^4_{a^2}$ der Kegelschnitte c^2 und d^2 gemeinsam sind.
Daraus folgt:

SATZ 2.20.

Die quadratische Projektion des Kegelschnittes a^2, der sich nicht in der Kollineation K_α auf sich selbst abbildet, ist eine algebraische Kurve a^4 vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt Q_1. Wenn die Ebene α die Projektionsebene π ist, dann ist ihre quadratische Projektion die Kurve vierter Ordnung, die zu zwei Kegelschnitten a^2 und a_1^2 homolog mit sich in der Kollineation K_π degeneriert wird. Dabei wird a_1^2 zum doppelten Punkt Q_1 degeneriert.
Der zweite Teil des Satzes folgt aus der Tatsache, daß die Projektionsebene π durch den Punkt Q_1 geht. Dann ist jeder Punkt des Kegelschnittes a^2 homolog mit Q_1, der Kegelschnitt a_1^2 wird also zum doppelten Punkt Q_1 degeneriert.

Die uneigentliche Gerade der Projektionsebene π schneidet die Kurve a^4 in vier Punkten, von denen alle reell, zwei reel und zwei imaginär konjugiert, oder auch beide Paare imaginär konjugiert sein können. Diese uneigentlichen Punkte der Kurve a^4 sind die quadratische Projektion der gemeinsamen Punkte des Kegelschnittes a^2 mit der Verschwindquadrik. Der Doppelpunkt Q_1 der Kurve a^4 ist die quadratische Projektion der reellen /voneinander verschiedenen oder zusammengefallenen/ oder auch der imaginären, konjugierten, gemeinsamen Punkte des Kegelschnittes a^2 mit der Ebene τ. Im anderen Fall ist Q_1 ein isolierter Doppelpunkt der Kurve a^4. Wenn zwei reelle, verschiedene, vom Punkt S_α an den Kegelschnitt a^2 geführte Tangenten bestehen, dann sind A^2 und B^2 zwei Punkte der Kurve a^4. Sie fallen zusammen, wenn auch beide Tangenten zusammenfallen.

Wenn beide Tangenten imaginär und konjugiert sind, dann sind A^2 und B^2 imaginäre Punkte der Kurve a^2.

In der Abb. 2.9 bestimmte man die quadratische Projektion des Kegelschnittes a^2 der Ebene α, der die Gerade s_α im Punkt T_{s_α} berührt und die Ebene τ schneidet. Schneidet auch die Verschwindquadrik in imaginären, konjugierten Punktepaaren. Diese Projektion ist eine nicht degenerierte Kurve a^4 vierter Ordnung ohne reelle, uneigentliche Punkte mit dem isolierten Doppelpunkt Q_1.

Der Kegelschnitt s_α^2 hat mit a^4 acht gemeinsame Punkte, von denen vier im Punkt Q und vier im Punkt T^2 zusammenfallen. T^2 ist die quadratische Projektion des Berührungspunktes des Kegelschnittes a^2 mit der Geraden s_α. Die in der Abb. 2.10 dargestellte Kurve vierter Ordnung ist die quadratische Projektion des Kegelschnittes a^2, der sich nicht auf sich selbst in der Kollineation K_α abbildet, die die Verschwindquadrik, die Ebene τ und die Gerade s in Paaren verschiedener reeller Punkte schneidet, der zwei reelle verschiedene an ihn vom Punkt S_α geführte Tangenten hat. Die bestimmte Kurve a^4 hat den Doppelpunkt Q_1, zwei voneinander verschiedene reelle, uneigentliche Punkte. In drei vonenander verschiedenen Punkten Q_1, I^2 und J^2 berührt sie den Kegelschnitt s_α^2, wobei der Berührungspunkt Q_1 ein doppelter Punkt ist.

Wenn der Kegelschnitt a^2 sich auf sich selbst in der Kollineation K_α /Abb. 1.5 und 2.11/ abbildet, dann wird die projizierende Fläche $\Phi^4_{a^2}$ dieses Kegelschnittes zur doppelten Quadrik degeneriert. Der Durchschnitt dieser Fläche durch die Projektionsebene π ist also die zum doppelten Kegelschnitt degenerierte Kurve a^4. Jeder Punkt des erhaltenen Kegelschnittes ist die quadratische Projektion der homologen Punktepaare des projizierten Kegelschnittes a^2. Die in der Abb. 2.11 dargestellte Kurve a^4 hat keine reellen, uneigentlichen Punkte und schneidet den Kegelschnitt s_α^2 in den Doppelpunkten A^2, B^2 und in vier zusammengefallenen Punkten Q_1. Mit einer unterbrochenen Linie kennzeichnete man den Teil der Kurve, die die Projektion der imaginären, konjugierten Punktepaare des Kegelschnittes a^2 ist.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] B i e d a K., Wiązka stożkowych jako aparat rzutujący, Zeszyty Naukowe, Geometria wykreślna, VIII Poznań 1973 /S.51-62/.

[2] B o r s u k K., S z m i e l e w W., Podstawy geometrii, Warszawa 1970.

[3] E n r i q u e s, Wykłady geometrii rzutowej, Warszawa 1917.

[4] G r o c h o w s k i B., Geometria wykreślna, Bd.2, Warszawa 1970.

[5] G r o c h o w s k i B., Pojęcie rzutu rozciągłego, Zeszyty Naukowe, Geometria wykreślna, II Warszawa 1961/S.40-90/.

[6] К о м м и с с а р у к А., Проективная геометрия в задачах, Минск 1971.

[7] O t t o E., Geometria wykreślna, Warszawa 1966.

[8] O t t o E., G r o c h o w s k i B., O rzutowaniu skośnym przestrzeni n-wymiarowych, Zeszyty Naukowe - Geometria wykreślna, IV, 1966.

[9] P a s c a l E., Repetytorium matematyki wyższej, Bd.2 - Geometria, Warszawa 1901.

[10] P e s c h k a G.AD.V., Darstellende und projektive Geometrie, Bd.2, Wien 1884.

[11] P l a m i t z e r A., Elementy geometrii rzutowej, Lwów 1927.

[12] P l a m i t z e r A., Geometria rzutowa, Bd.2, Warszawa 1938.

[13] R a c h w a ł T., Geometria wykreślna, Bd.2, Warszawa 1969.

[14] Ś l u s a r c z y k B., Rzut krzywoliniowy stopnia trzeciego, Zeszyty Naukowe - Geometria wykreślna, III, Warszawa 1964 /S.35-53/.