ROCZNIK NAUKOWO–DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE

Zeszyt 61 Prace matematyczne VIII Rok 1977

Ewa Lubaś

PROJEKTIONEN, DIE MIT DER QUADRATISCHEN PROJEKTION KONJUGIERT SIND

EINLEITUNG

Im Artikel unter dem Titel "Zur quadratischen Transformation dreidimensionalcn projektiven Raumes auf die Ebene"[1/] gab man die Definition eines Bündels $[W^2]$ der Kegelschnitte an,dessen Basis das Grundsystem $\langle Q_1 Q_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \rangle$ ist /$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - zwei beliebige Ebenen im projektiven Raum, Q_1, Q_2 - beliebige Punkte, die entsprechend zu diesen Ebenen gehören/. Man bewies eine Reihe von seinen Eigenschaften und wei.er, in dem man das angenommene Bündel als Projektionsapparat behandelte, besprach man die Transformation zweiten Grades des projektiven Raumes auf die Ebene.

Das Thema des vorliegenden Artikels ist das Problem der Eindeutigkeit der so definierten quadratischen Projektion. Man löst das Problem mittels der entsprechend angepaßten zentralen bzw. mit der quadratischen Projektion konjugierten Projektionen.

Am Ende der Arbeit gan man Beispiele der Anwendung der quadratischen Projektion zur Lösung bestimmter Aufgaben der ebenen, projektiven Geometrie an.

Das die unten dargestellten Betrachtungen auf den im Artikel "Zur quadratischen Transformation dreidimensionalen projektiven Raumes auf die Ebene", durchgeförten Ergebnissen beruhen, dann ist es notwendig,sich auf die dort angegebenen Sätze zu berufen. Wir werden ihre Nummern anführen /Z.B. 1,1, 1.2,..., 2.1, 2.2,.../ ohne jedes Mal zu erläutern, daß es sich hier gerade um die Sätze in dieser Arbeit handelt.

Hier werden dieselbenn Symbole wie in der vorigen Arbeit verwendet.

1/ [3]

KAPITEL I

Projektionen, die mit der quadratischen Projektion konjugiert sind

Nach 2.2[1/] bildet die quadratische Projektion nicht eindeutig den projektiven Raum P^3 auf die Ebene π ab; Das genügt nicht, daβ man die quadratische Projektion des Punktes kennt, um eindeutig die Lage dieses Punktes im Raum in bezug auf das Grundsystem $\langle Q_1 Q_2\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2 \rangle$ zu bestimmen.
Um die Figur, die auf π die quadratische Projektion ist, eindeutig zu "rekonstruieren", verwenden wir dazu eine der bekannten Arten der Projektion dieser Figur auf die Projektionsebene π.
Wir führen den Begriff der sog. der Paare der konjugierten Projektionen ein.

§ 1. Konjugierte Projektionen der Punkte

Setzen wir voraus, daβ die Projektionsebene π durch den Punkt Q_1 des Grundsystems $\langle Q_1 Q_2\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2 \rangle$ geht. Betrachten wir drei Arten der Projektionen desselben Punktes $P \in P^3$ auf diese Projektionsebene:

1. quadratische Projektion - P^2
2. zentralprojektion aus dem Punkt Q_2 - P^s
3. parallele Projektion in durch die Gerade k bestimmter Richtung auf die Projektionsebenen π - P'

Definition I

Zwei von drei Projektionen der Punkte: die quadratische, zentrale aus dem Punkt Q_1 und die parallele Projektion in Richtung k des Punktes P auf die Projektionsebene π - nennen wir die konjugierten Projektionen dieses Punktes. Betrachtet man alle möglichen Lagen des Punktes P in bezug auf das Grundsystem $\langle Q_1 Q_2\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2 \rangle$ und nimmt man in Betracht die quadratische Projektion, die mit der Zentralprojektion dieses Punktes konjugiert ist, können wir folgenden Satz beweisen:

SATZ I.1.

/I/ Wenn $P \sim\in (\tau \cup \varepsilon_2 \cup \pi)$, dann sind P^s, P^2, Q_1 verschiedene, kolineare Punkte und $P^s \sim\in (t_{\varepsilon_1} \cup t_{\varepsilon_2})$

/II/ Wenn $P \in [(\varepsilon_2 - k_\tau) \cup (\pi - t_{\varepsilon_1})]$, dann $P^2 = P^s$ und $P^s \sim\in t_{\varepsilon_1}$

/III/ Wenn $P \in [l - \{Q_1\} - \{Q_2\}]$, dann $P^2 = P^s = Q_1$

1/ [3]

/IV/ Wenn $P \in [\tau - t\varepsilon_1 - k_\tau - l]$, dann $P^2 = Q_1$ und $P^s \in [t\varepsilon_1 - \{Q_1\}]$

/V/ Wenn $P \in [(t\varepsilon_1 - \{Q_1\}) \cup (k_\tau - \{Q_2\})]$, dann $P^2 = t\varepsilon_1$ " $P^s \in [t\varepsilon_1 - \{Q_1\}]$

Beweis:

1^0 1_1/ Setzen wir voraus, daβ $P \sim \in (\tau \cup \varepsilon_1 \cup \varepsilon_2 \cup \pi)$. /Abb. I.1/

Niech 1.1 1^0 ist die projizierende Linie des Punktes P ein nicht degenerierter Kegelschnitt s_p, der in der Ebene $\alpha(Q_1, Q_2, P)$ enthalten ist; Aus der Definition 2 und dem Satz 2.1 folgt, daβ $P \in t_\alpha(\alpha, \pi)$ und $P^2 \neq Q_1$.

Weil die Gerade (Q_2P) in der Ebene α enthalten ist, dann folgt aus der Definition der Zentralprojektion des Punktes P, daβ auch $P^s \in t_\alpha$ und $P^s \neq Q_1$. Wir beweisen, daβ $P^2 \neq P^s$. Die Punkte Q_1, Q_2, P, P^2 bestimmen das vollständige Viereck $(Q_1PQ_2P^2)$, das in den Kegelschnitt s_p eingeschrieben ist. Dieses Viereck ist als Grenzwall des in diesen Kegelschnitt eingeschriebenen Sechsecks $(Q_1 = \overline{Q}_1PQ_2 = \overline{Q}_2P^2)$ zu betrachten. Seine Scheitelpunkte Q_1, $\overline{Q}_2$ fielen im Punkt Q_1 zusammen, und die Scheitelpunkte Q_2, $\overline{Q}_2$ im Punkt $\overline{Q}_1$. Die Seiten $Q_1\overline{Q}_1 = p_1 = \alpha \cap \varepsilon_1$ und $Q_2\overline{Q}_2 = p_2 = \alpha \cap \varepsilon_2$ dieses Sechsecks berühren den Kegelschnitt s_p entsprechend in den Punkten Q_1 und Q_2.

Aus dem Satz von Pascal folgt, daβ drei Paare der gegenüberliegenden Seiten dieses Sechseckes: p_1 und p_2, (Q_1P) und (Q_2P), (Q_2P) und (Q_1P^2) sich entsprechend in den Punkten V_α, Q; P^s schneiden, die auf einer Geraden p_0 liegen, die als Pascal´sche Gerade genannt ist. Fiele der Punkt P^s mit dem Punkt P^s zusammen, dann würde die Pascal´sche Gerade p_0 durch die Punkte V_α, $P^2 = P^s$ gehen und der Punkt P würde mit dem Punkt $P^s = P^2$ zusammenfallen. Der Punkt P würde also der Projektionsebene π angehören, was der angenommenen Voraussetzung widerspricht. Dann $P^s \neq P^2$.

1_2/ Wenn $P \in (\varepsilon_1 - t\varepsilon_1)$, dann folgt aus dem Satz 2.1 - /I/ 1^0, daβ $P^2 \in (t\varepsilon_2 \cap t_\alpha)$. Weil $t\varepsilon_2 \neq t\varepsilon_1$, dann $P^2 \neq Q_1$. Aus der Definition der Zentralprojektion des Punktes P folgt, daβ auch $P^s \in t_\alpha$. Weil $P \sim \in \varepsilon_2$ und $Q_2 \sim \in \varepsilon_1$, dann $P^s \sim \in (t\varepsilon_2 \cup t\varepsilon_1)$. Daraus folgt, daβ $P^s \neq P^2$ und $P^s \neq Q_1$. Die Punkte P^s, P^2, Q_1 sind also paarweise verschieden und kolinear.

Definition II

Die durch die Punkte P^2, Q_1 gehende Gerade nennen wir Ordnungsgerade des Punktes P. Andere Fälle ergeben sich unmittelbar aus dem Satz 2.1 und der Definition der Zentralprojektion.

Aus dem Satz I.1 folgt:

SATZ I.2.

Wenn P^2 die quadratische Projektion des Punktes $P \in P^3 - \{Q_1 Q_2\}$ auf die Projektionsebene π, P^s - die Zentralprojektion dieses mit der quadratischen Projektion konjugierten Punktes ist, dann können die Punkte P^2 und P^s in bezug auf sich selbst und das Grundsystem $\langle Q_1 Q_2\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2\rangle$ eine der folgenden Lagen annehmen:

/I/ P^s, P^2, Q_1 sind voneinander verschieden, kolinear und $P^s \sim\in (t_{\varepsilon_1} \cup t_{\varepsilon_2})$

/II/ $P^2 = P^s$ und $(P^s \sim\in t_{\varepsilon_1}$ oder $P^s = Q_1)$

/III/ $(P^2 = Q_1$ oder $P^2 = t_{\varepsilon_1})$ und $P^s \in (t_{\varepsilon_1} - \{Q_1\})$

Durch die Kontraposition des Satzes I.2 erhalten wir die Schlußfolgerung, daß nicht jedes Paar $(P^s P^2)$ eindeutig im projektiven Raum solch einen Punkt P bestimmt, daß seine quadratische Projektion der Punkt P^2 bzw. die Menge $s_{p\pi}$ ist und die mit ihm konjugierte zentrale Projektion desselben Punktes der Punkt P^s. Wir beweisen, daß gewisse Punktepaare $(P^s P^2)$ eindeutig den Punkt P im projektiven Raum bestimmen.

SATZ I.3.

Wenn daß Punktepaar $(P^s P^2)$ eine der folgenden Bedingungen einhält:

/I/ P^s, P^2, Q_1 sind voneinander verschieden und kolinear,
$P^s \sim\in (t_{\varepsilon_1} \cup t_{\varepsilon_2})$

/II/ $P^2 = P^s$ und $P^s \sim\in (t_{\varepsilon_1} \cup t_{\varepsilon_2})$

/III/ $P^2 = t_{\varepsilon_1}$ und $P^s \in (t_{\varepsilon_1} - \{Q_1\} - \{V_\tau\})$, wo $V_\tau = \tau \cap k$

dann bestimmt es eindeutig solchen Punkt $P \in P^3 - \{Q_1, Q_2\}$, dessen zentrale Projektion der Punkt P^s ist, und die quadratische Projektion - P^2.

Im Falle /I/ $P \sim\in (\tau \cup \varepsilon_2 \cup \pi)$

Im Falle /II/ $P = P^2 = P^s$

Im Falle /III/ $P = P^s$

Beweis:

1° Setzen wir voraus, daß wir mit /I/ zu tun haben. Wenn dabei $P^2 \sim\in t_{\varepsilon_2}$, dann folgt aus dem Satz 1.1, daß durch P^2 genau ein nicht degenerierter Kegelschnitt s_p des Bündels $[W^2]$ geht. Die Punkte P^s und Q_1 bestimmen eindeutig die in der Ebene α enthaltene Gerade, in der/d.h. in der Ebene α/ auch der Kegelschnitt s_p enthalten ist.Weil $P^s \sim\in t_{\varepsilon_2}$ dann berührt diese Gerade den Kegelschnitt im Punkt Q_2 nicht. Sie schneidet also s_p in zwei verschiedenen Punkten: Q_2 und dem gesuchten Punkt P, dessen konjugierte Projektion das Punktepaar (P^s, P^2) ist.

Aus der Voraussetzung folgt, daß der Punkt $P \sim\in (\tau \cup \varepsilon_1 \cup \varepsilon_2 \cup \pi)$. Wenn $P^2 \in t_{\varepsilon_2}$, dann ist s_p ein zu zwei Geraden (P^2, Q_2) und $(Q_1 V_\alpha)$ degenerierter Kegelschnitt, wo $V_\alpha = (P^2, Q_2) \cap \varepsilon_1$. Die Gerade $(P^s Q_2)$ ist in der Ebene des Kegelschnittes s_p enthalten und schneidet die Gerade $(Q_1 V_\alpha)$ im Punkt $P \neq V_\alpha$, dessen konjugierte Projektionen das Paar (P^s, P^2) sind. Weil $(Q_1 V_\alpha) \subset \varepsilon_1$ und $(Q_1 V_\alpha) \neq t_{\varepsilon_1}$, dann $P \in (\varepsilon_1 - t_{\varepsilon_1})$. Also $P \sim\in (\tau \cup \varepsilon_2 \cup \pi)$.

2° Haben wir mit /II/ zu tun, dann schneidet die Gerade $(P^s Q_2)$ den nicht degenerierten Kegelschnitt s_p in zwei verschiedenen Punkten Q_2 und P^s. Der Punkt P^s ist also eindeutig durch das Punktepaar $(P^s P^2)$ bestimmt.

3° Wenn das Paar (P^s, P^2) die Bedingung /III/ einhält, dann schneidet die Gerade $(P^s Q_2)$ den zu zwei Geraden t_{ε_1} und k_τ degenerierten Kegelschnitt in zwei verschiedenen Punkten Q_2 und P^s. Der Punkt $P^s \in P^3 - \{Q_1, Q_2\}$ und die zentrale Projektion dieses Punktes ist derselbe Punkt P^s und die quadratische Projektion - die Gerade t_{ε_1}.

Auf ähnliche Weise kann man beweisen:

SATZ I.4.

/I/ Wenn $P^2 = P^s$ und $P^s \in t_{\varepsilon_2}$, dann ist das Paar (P^s, P^2) eine konjugierte Projektion unendlich vieler Punkte der Geraden $(P^s Q_2)$

/II/ Wenn $P^2 = P^s = Q_1$, dann ist (P^s, P^2) eine Projektion unendlich vieler Punkte der Geraden l

/III/ Wenn $P^2 = Q_1$ und $P^s \in t_{\varepsilon_1} - \{Q_1\}$, dann ist (P^s, P^2) eine Projektion unendlich vieler Punkte der Geraden $(P^s Q_2)$

/IV/ Wenn $P^2 = t_{\varepsilon_1}$ und $P^s = V_\tau (t_{\varepsilon_1}, k_\tau)$, dann ist (P^s, P^2) eine Projektion unendlich vieler Punkte der Geraden k_τ.

Betrachten wir jetzt die quadratische Projektion, die mit der parallelen Projektion[1] eines gegebenen Punktes auf die Projektionsebene π konjugiert ist. Es sei Q_2 die parallele Projektion des Punktes Q_2 auf die Projektionsebene π, l' - die parallele Projektion der Achse l auf die Projektionsebene π. Wir beweisen:

SATZ I.5.

Wenn P^2 die quadratische Projektion des Punktes $P \in P^3 - \{Q_1, Q_2\}$ ist, P' - die parallele Projektion desselben Punktes auf die Projektion-

[1] Es handelt sich um eine parallele Projektion in der Richtung der Geraden k. Diese Projektion bezeichnen wir als parallele Projektion.

sebene π , dann gehören diese Projektionen zu demselben Kegelschnitt des Einparameterbüschels der Kegelschnitte der Ebene π , die die Gerade t_1 im Punkt Q_1 und die Gerade t_2 im Punkt Q_2' berühren. Das Büschel dieser Kegelschnitte bezeichnen wir mit (π^2).

Beweis:

Bestimmen wir die parallele Projektion s_p' des Kegelschnittes s_p des Bündels $[W^2]$, der den Punkt P auf die Projektionsebene π /Abb. I.2/ projiziert. Unmittelbar aus der Eigenschaft der parallelen Projektion geht hervor, daß s_p' ein Kegelschnitt des Büschels (π^2) ist, $P' \in s_p'$ und $P^2 = P^{2'} \in s_p'$.

SATZ I.6.

Wenn das Punktepaar (P', P^2) folgende Bedingungen einhält:

1. P', P^2 gehören demselben Kegelschnitt des Büschels (π^2) an, der anders ist als die doppelte Gerade l'
2. $P' \neq Q_1$ oder $P^2 \neq Q_2'$
3. $P' \neq Q_2$ oder $P^2 \neq Q_2'$

dann bestimmt es eindeutig solchen Punkt $P \in P^3$, dessen parallele Projektion der Punkt P' ist, und die quadratische Projektion - P^2.

Beweis:

Setzen wir voraus, daß das Punktepaar (P', P^2) zu einem Kegelschnitt s_p' des Büschels (π^2) gehört, der anders ist als die doppelte Gerade l'. Durch jeden Punkt dieses Kegelschnittes führen wir eine zur Geraden k parallele Gerade. Die Menge dieser Geraden ist die Seitenfläche des Zylinders, der die Ebenen ε_1 und ε_2 berührt, oder dieser Menge die Fläche zweiter Ordnung, die zu den zwei Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ degeneriert wird.
Der Kegelschnitt s_p2 des Bündels $[W^2]$ ist in dieser Fläche enthalten.
Aus 2 und 3 folgt, daß die zu k parallele Gerade durch den Punkt P' geht und den Kegelschnitt s_p2 genau in einem Punkt P schneidet. Der Punkt P' ist die parallele Projektion dieses Punktes. P^2 ist die quadratische Projektion dieses Punktes.
Wenn $P' = Q_1$ und $P^2 \neq Q_2'$, dann $P = Q_1$.
Wenn dagegen $P' = Q_2$ und $P^2 \neq Q_2'$, dann $P = Q_2$.
Wir beweisen:

SATZ I.7.

/I/ Wenn $P', P^2 \in l'$, dann ist das Paar (P', P^2) die konjugierte Projektion genau zweier voneinander verschiedener oder im Punkt Q_1 oder Q_2 zusammengefallener Punkte des Raumes

/II/ Wenn $P' = Q_1$ und $P^2 = Q_2'$, dann ist das Paar (P', P^2) die Projektion unendlich vieler Punkte der zu k parallelen Geraden, die durch den Punkt Q_1 geht.

/III/ Wenn $P^2 = P' = Q_2'$, dann ist das Paar (P', P^2) die konjugierte Projektion unendlich vieler Punkte der zu k parallelen, durch den Punkt Q_2 gehenden Geraden.

Für das Paar der konjugierten Projektionen (P', P^s) gelten folgende Sätze:

SATZ I.8.

Wenn P' die parallele Projektion des Punktes $P \in P^3 - \{Q_2\}$, P^s die zentrale Projektion aus dem Punkt Q_2 dieses Punktes auf die Projektionsebene π ist, dann sind die Punkte P', Q_2', P^s kolinear /besonders zwei von ihnen können zusammenfallen / oder $P' = P = Q_2'$.

SATZ 1.9.

Wenn die Punkte P', P^s, Q_2' kolinear sind /besonders zwei von ihnen können zusammenfallen/, dann bestimmt das Punktepaar (P', P^s) eindeutig solchen Punkt P des Raumes, dessen parallele Projektion der Punkt P'ist. Der Punkt P^s ist die zentrale Projektion aus dem Punkt Q_2.Wenn $P' = P^s = Q_2'$ dann ist Paar (P', P^s) die konjugierte Projektion unendlich vieler Punkte der zu k parallelen, durch den Punkt Q_2 gehenden Geraden.
Im nächsten Paragraph beweisen wir, daß es ein beliebiges Paar der konjugierten Punkte eines gegebenen Punktes zu kennen genügt, um die dritte Projektion dieses Punktes zu bestimmen.

§ 2. Konstruktion der quadratischen Projektion des Punktes

Setzen wir voraus, daß ein Paar (P', P^s) der konjugierten Projektionen des Punktes P gegeben ist. Aus dem Satz I.1 ergibt sich die Art und Weise der Bestimmung der quadratischen Projektion eines beliebigen Punktes des Raumes, wenn die parallele und zentrale Projektionen dieses Punktes gegeben sind.
Wenn der Punkt P eine der Bedingungen /II/ - /V/ des Satzes I.1 einhält, ist das Bestimmen der quadratischen Projektion dieses Punktes einfach. Setzen wir voraus, daß $P \sim\in(\tau \cup \varepsilon_2 \cup \pi)$ /Abb. I.1/. Bestimmen wir die zentrale Projektion dieses Punktes aus Q_2 auf die Projektionsebene π - P^s. Die Gerade $t_\alpha(P^sQ_1)$ ist die Schnittlinie der Projektionsebene π durch die Ebene α, die den s_P des Punktes P projizierenden Kegelschnitt enthält. Weil die Gerade $p_o(P^sV_\alpha)$ für das in diesen Kegelschnitt eingeschriebene Sechseck $(Q_1 = \overline{Q}_1PQ_2 = \overline{Q}_2P^2)$ die Pascal'sche Gerade ist

/Beweis des Satzes I.1/, und die Seite (Q_1P) diese Gerade im Punkt Q schneidet, dann geht die gegenüberliegende Seite (P^2Q_2) auch durch den Punkt Q. P^2 ist de gemeinsame Punkt der Geraden t_α und (QQ_2).
Wenn wir die parallele Projektion des ganzen in der Abb. I.1 dargestellten Systems auf die Projektionsebene π bestimmen, dann erhalten wir eine flache Konstruktion der Bestimmung der quadratischen Projektion des Punktes P, der auf der Projektionsebene π mit der parelelen P' und zentralen P^s Projektion bestimmt ist.
In Abb. I.3 bestimmte man zuerst die Gerade $t_\alpha(P^sQ_1)$, die Gerade p_o' für das in den Kegelschnitt s_p eingeschriebene Sechseck ($Q_1 = \overline{Q}_1P'Q_2 = \overline{Q_2'}P^2$), den Punkt $Q' =(Q_1P')\cap p_o$ und den Punkt $P^2 = t_\alpha \cap (Q_2'Q')$.
Ist das Paar der konjugierten Projektionen (P^2, P^s) eines gegebenen Punktes /Abb. I.4/ gegeben, dann verwenden wir zur Bestimmung der Projektion P' dieses Punktes in umgekehrter Reihenfolge die früher beschriebene Konstruktion: wir führen also die Pascal'sche Gerade $p_o(P^sV_\alpha)$ und bestimmen wir den Schnittpunkt Q' dieser Geraden mit der Geraden (P^2Q_2').
Die zentrale Projektion dieses Punktes X aus dem Punkt Q_1 auf die Gerade (P^sQ_2') ist die parallele Projektion P'des Punktes P.
Ist das Paar (P', P^2) der konjugierten Projektionen des Punktes P gegeben /Abb. I.5/, dann erhalten wir P^s als den Schnittpunkt der Geraden (P^2Q_1) und $(P'Q_2')$.

§ 3. Zentrale Projektion, die mit der quadratischen Projektion einer Geraden konjugiert ist

Es sei a^s die zentrale Projektion der Geraden a aus dem Punkt Q_2 auf die Projektionsebene π , a^2 - die quadratische Projektion dieser Geraden. Analogisch zur Definition I sind a^s und a^2 das Paar der konjugierten Punkte der Geraden a.
Nehmen wir an: $A_a = a \cap \varepsilon_1$, $B_a = a \cap \varepsilon_2$, $T_a = a \cap \pi$, $L_a = a \cap \tau$

Wir beweisen:

SATZ I.10.

/I/ Wenn die Gerade a windschief zu l ist und $a \sim\subset(\pi \cup \varepsilon_2)$, dann hat a^s mit a^2 zwei reelle gemeinsame Punkte: $B_a^s \in t_{\varepsilon_2}$ und $T_a^s = T_a$.
Wenn dabei:
1/ a windschief zu t_{ε_1}, k_τ und t_{ε_2} ist, dann $B_a^s = B_a^2 \neq T_a$ i $T_a \sim\in(t_{\varepsilon_1} \cup t_{\varepsilon_2})$,
2/ a windschief zu t_{ε_1}, k_τ ist und t_{ε_2} schneidet, dann $B_a^s = B_a^2 = B_a = T_a \in t_{\varepsilon_2}$ und a^s den Kegelschnitt a^2 im Punkt T_a berührt,

3/ a windschief zu t_{ε_1} ist und k_τ schneidet, dann $T_a \sim \in t_{\varepsilon_2}$ und $B_a^s = V_\tau \in B_a^2 = t_{\varepsilon_1}$

4/ a windschief zu k_τ ist und t_{ε_1} schneidet, dann $T_a \in T_a^2 = t_{\varepsilon_1}$ und $B_a^s = B_a^2$

5/ a die k_τ und t_{ε_1} im Punkt V_τ schneidet, dann $T_a = B_a^s = V_\tau \subset T_a^2 = B_a^2 = t_{\varepsilon_1}$.

/II/ Wenn $a \subset (\pi \cup \varepsilon_2)$ oder a die Achse l schneidet, dann hat a^s mit a^2 unendlich viele gemeinsame Punkte und $a^s = \bar{a}$, wo $\bar{a}$ eine des degenerierten Kegelschnittes $a^2 = (t_{\varepsilon_1}, \bar{a})$ ist.

Beweis:

Aus dem Satz 2.7 folgt, daß a^2 eine Kegelschnittskurve ist. Aus der Eigenschaft der zentralen Projektion und der angenommenen Voraussetzung ($Q_2 \sim \in a$) folgt, daß a^s eine Gerade ist. Jede in der Ebene π enthaltene Gerade /also auch a^s/ hat mit dem Kegelschnitt a^2 entweder zwei gemeinsame /reelle oder imaginäre, konjugierte/. Punkte oder unendlich viele gemeinsame Punkte. Aus der Definition 2 und der Definition der zentrale Projektion folgt, daß für jeden Punkt $P \in (\varepsilon_2 - k_\tau) \cup (\pi - t_{\varepsilon_1})$, $P^2 = P^s$.

Wenn also:

1° die Gerade a die Bedingung[1] einhält, dann $B_a^2 = B_a^s \in t_{\varepsilon_2}$ und $T_a = T_a^2 = T_a^s \sim \in (t_{\varepsilon_2} \cup t_{\varepsilon_1})$ und nach 2.7 sind das reelle Punkte /Abb. I.6 a,b[1]/.

2° für jede Gerade a, die die Bedingung[2], $T_a = B_a \in t_{\varepsilon_2}$, einhält, dann $T_a^s = T_a^2 = B_a^2 = B_a^s$. Die Ebene $\alpha(a, (T_a Q_2))$ berührt die die Gerade a im Punkt T_a projizierende Quadrik Φ_a^2. Weil a^s die Schnittlinie dieser Ebene durch die Projektionsebene π und der Kegelschnitt a^2 der Durchschnitt der Quadrik Φ_a^2 durch die Projektionsebene π ist, dann berührt die Gerade a^s die a^2 im Punkt T_a[3]. /Abb. I.7 a/.

3° nach 3/ und 4/ aus dem Satz 2.8 /1°/ folgt, daß $a^2 = (t_{\varepsilon_1}, \bar{a})$, wobei $\bar{a} \neq t_{\varepsilon_2}$ und $V_\tau \sim \in \bar{a}$ und $Q_1 \sim \in \bar{a}$.
Wenn also a die k_τ schneidet, dann schneidet a^s die t_{ε_1} im Punkt $B_a^s = V_\tau$, die $\bar{a}$ im Punkt T_a /Abb. I.8 a/. Wenn a die t_{ε_1} schneidet, dann schneidet a^s die t_{ε_1} im Punkt T_a und die Gerade $\bar{a}$ im Punkt $B_a^s = B_a^2$ /Abb. I.9 a,b/.

4° Wenn die Gerade a die Voraussetzung 5/ einhält, dann /nach 2.8 /2°// $a^2 = (t_{\varepsilon_1}, \bar{a})$ und $\bar{a} \neq t_{\varepsilon_2}$ sowie $V_\tau \in \bar{a}$. Auch $V_\tau = B_a = T_a = B_a^s$. Die Gerade a^s geht durch den Punkt V_τ und /nach I.1 /I/ /$a^s \neq t_{\varepsilon_1}$ und $a^s \neq \bar{a}$ /Abb. I.10 a/.

---

[1] Die Konstruktion des Punktes A_a^2 wird in § 4 begründet
[2] [5] S.141
[3] [5] S.141

5^0 Wenn $a \subset (\pi \cup \varepsilon_2)$, dann /nach 2.8 und 2.9/ folgt, daß $a^2 = (t_1, \bar{a})$, wo $\bar{a} = a$, wenn $a \subset \pi$, $\bar{a} = t_2$, wenn $a \subset \varepsilon_2$, und /nach I.1-/II/ /$a^s = \bar{a}$ /Abb. I.11 a,b/.

6^0 Wenn die Gerade a die Achse l schneidet, dann /nach 2.10/ $a^2 = (\bar{a}, \bar{a})$ und $\bar{a}$ ist die Schnittlinie der Ebene $\alpha = (a, l)$ durch die Projektionsebene π. Weil $Q_2 \in \alpha$, dann $a^s = \bar{a}$ /Abb. I.11 c.d/.

Wir beweisen auch, daß das Paar der entsprechend angepaßten Projektionen a^s und a^2 eindeutig eine Gerade des projektiven Raumes bestimmt.

SATZ I.11.

Wenn das Paar der Projektionen (a^s, a^2), wo $a^s \neq t_{\varepsilon_1}$, $a^s \neq t_{\varepsilon_2}$ und $Q_1 \sim \in a^s$, eine dieser Möglichkeiten annimmt:

/I/ a^2 ist ein nicht degenerierter Kegelschnitt der Familie $R_\pi(Q_1 t_{\varepsilon_1})$ und a^s schneidet a^2 in zwei reellen, verschiedenen oder zusammengefallenen Punkten, von denen einer immer einer der zwei mit t_{ε_2} gemeinsamen Punkte a^2 ist;

/II/ a^2 ist ein Paar verschiedener Geraden t_{ε_1} und $\bar{a}$, wo $\bar{a} \neq t_{\varepsilon_2}$ und $Q_1 \sim \in \bar{a}$, a^s dagegen schneidet $\bar{a}$ oder t_{ε_1} auf der t_{ε_2} /im besonderen $a^s = \bar{a}$/;

/III/ a^2 ist ein Paar der Geraden $(t_{\varepsilon_1}, t_{\varepsilon_2})$ und $V_\tau \sim \in a^s$,

dann bestimmt dieses Paar der Projektionen a^s, a^2 eindeutig solche Gerade a des projektiven Raumes, deren zentrale Projektion aus dem Punkt Q_2 die Gerade a^s ist, und die quadratische Projektion - ein Kegelschnitt a^2.

Beweis:

1^0 Setzen wir voraus, daß /I/ gilt. Bezeichnen wir die durch a^s und den Punkt Q_2 bestimmte Ebene mit δ, den gemeinsamen Punkt der t_2, a^2 und a^s mit B, den zweiten von den gemeinsamen Punkten a^s aus a^2 mit T_a. Wenn t_2 eine Sekante des Kegelschnittes a^2 ist /Abb.I.6 a und I.7/a, dann folgt nach 2.11-/1/, daß die Gerade a auf der nicht degenerierten, geradlinigen Quadrik Φ_a^2 der Familie (K^2) liegt, auf der auch der Kegelschnitt a^2 liegt. Die Ebene δ schneidet die Φ_a^2 in der Geraden (BQ_2); sie berührt also diese Quadrik und schneidet die Φ_a^2 in noch einer Geraden a, die durch den Punkt T_a und den Berührungspunkt der Ebene δ mit der Φ_a^2 geht. Der Punkt B_a des Schnittes dieser Geraden durch die Ebene ε_2 ist dieser Berührungspunkt.

Wenn die Gerade t_{ε_2} den Kegelschnitt a^2 im Punkt B /Abb. I.6 b/ berührt, dann ist Φ_a^2 ein Kegel der Familie (K^2) /Satz 2.11-1_2/.

Die Ebene δ ist eine Sekante für diesen Kegel /im besonderen Falle eine Tangente/; sie schneidet ihn also in zwei Erzeugenden. Eine von ihnen ist die Gerade (BQ_2), die zweite ist die durch den Punkt T_a und den Scheitelpunkt B_a des Kegels Φ_a^2 gehende Gerade.

2^o Im Falle /II/ ist Φ_a^2 eine nicht degenerierte, geradlinige Quadrik /Abb. I.8 a, I.11 a/ und die Projektionsebene π eine Tangentialebene an diese Quadrik, oder ein Kegel der Familie (K^2) /Abb. I.10 a, I.11 b/, für den die π eine schneidende Ebene ist /Satz 2.11- 2^o/. Die Ebene $\delta(a^sQ_2)$ schneidet die Quadrik Φ_a^2 entlang der Erzeugenden (BQ_2) und der Erzeugenden a, die durch den Punkt T_a und den Punkt $B_a=(BQ_2)\cap\Phi_a^2$ geht.

Wenn $\bar{a} = a^s$, dann $a = \bar{a} = a^s$.

3^o Im Falle /III/ /Abb. I.9 b/ und auf Grund des Satzes 2.11-3^o ist Φ_a^2 ein Ebenenpaar $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Die Ebene δ schneidet die Quadrik Φ_a^2 in zwei Geraden: (BQ_2) und $a = \delta \cap \varepsilon_1$.

In allen Fällen erhielten wir als Ergebnis des Schnittes der Quadrik Φ_a^2 durch die Ebene δ zwei verschiedene Geraden, von denen eine $-(BQ_2)$ immer in der Ebene ε_2 enthalten war und durch den Punkt Q_2 ging. Weil wir die Voraussetzung angenommen haben, daß wir aus weiteren Betrachtungen alle diese Geraden ausschließen, die durch den Punkt Q_1 bzw. Q_2 gehen. Es besteht also in dem Raum $P^3 - \{Q_1, Q_2\}$ genau eine Gerade a, deren quadratische Projektion ein Kegelschnitt a^2, und die mit ihm konjugierte Zentralprojektion eine Gerade a^s ist.

Wenn für a^2 und a^s solche Voraussetzungen wie auf den Abb. I.11 c, I.11 d, I.11 e gelten, dann bestimmen sie die Gerade a nicht eindeutig. Es bestehen unendlich viele verschiedene Geraden mit bestimmten Projektionen.

Es sei eine nicht degenerierte Quadrik Φ_a^2 der Familie (K^2) bzw. ein Kegel dieser Familie gegeben, die durch einen die $t\varepsilon_2$ in den Punkten T_{p_2}, T_{q_2} /Satz 2.11/ schneidenden Kegelschnitt der Familie $R_\pi(Q_1t_1)$ bestimmt sind. Bezeichnen wir mit p_1, q_1 Geraden, in denen die die Φ_a^2 im Punkt Q_1 berührende Ebene ε_1 die Quadrik Φ_a^2 schneidet, und mit p_2, q_2 Geraden, in denen die die Φ_a^2 im Punkt Q_2 berührende Ebene ε_2 die Quadrik Φ_a^2 schneidet. Wenn wir annehmen, daß die quadratische Projektion jeder dieser Geraden ein Kegelschnitt a^2 ist, und die zentrale Projektion der Geraden p_2, q_2 eine Gerade $t\varepsilon_2$ ist, und die Projektionspaare $a^2p_1^s$, $a^2q_1^s$, $a^2\, t\varepsilon_2\, T_{p_2}$, $a^2\, t\varepsilon_2\, T_{q_2}$ [1/] eindeutig entsprechende Geraden: p_1, q_1, p_2, q_2 bestimmen, dann können wir den folgenden Satz formulieren:

[1/] Der Satz "$t\varepsilon_2(Tp_2)$ ist die zentrale Projektion der Geraden p_2" bedeutet daß die zentrale Projektion jedes Punktes dieser Geraden der anders als Q_2 ist, der Punkt Tp_2 ist, die Projektion des Punktes Q_2 ist die Gerade $t\varepsilon_2$.

SATZ I.12.

Eine notwendige und genügende Bedingung, daß die windschiefen Geraden Erzeugende derselben Familie der Erzeugenden der nicht degenerierten, geradlinigen Quadrik Φ_a^2 sind, oder daß sich in einem Punkt schneidende Geraden Erzeugende desselben Kegels $\bar{\Phi}_a^2$ sind, ist das, daß ihre zentralen Projektionen ein Büschel mit dem Scheitel Tp_2 oder Tq_2 und der Basis π /ohne die Gerade $t\varepsilon_2$/ bilden.

Setzen wir voraus, daß Φ_a^2 eine nicht degenerierte, geradlinige Quadrik der Familie (K^2) ist, die durch einen nicht degenerierten Kegelschnitt der Familie $R_\pi(Q_1\ t\varepsilon_1)$ bestimmt ist und die $t\varepsilon_2$ in zwei verschiedenen Punkten Tp_2, Tq_2 /Abb. I.12 a/ schneidet oder /wie in Abb. I.12 b/ Φ_a^2 durch einen zu den Geraden $t\varepsilon_1$, $\bar{a}$ degenerierten Kegelschnitt bestimmt ist.

Die Geraden p_1, q_2 gehören zu derselben Familie der Erzeugenden, die Geraden q_1, p_2 dagegen zur zweiten Familie der Erzeugenden. Jede der zu derselben Familie Φ_a^2 gehörigen Erzeugenden $a, b, c \ldots$ wie die Erzeugende p_1 schneidet die Erzeugende p_2. Die zentrale Projektion der Punkte B_a, B_b, B_c, ... ist derselbe Schnittpunkt der Geraden p_2 mit der Projektionsebene π. Zentrale Projektionen der Schnittpunkte der Erzeugenden zweiter Familie mit der Erzeugenden q_2 sind der Schnittpunkt der Geraden q_2 mit der Projektionsebene π. Die zentralen Projektionen der Erzeugenden einer Familie: a^s, b^s, c^s, ... bilden also ein Büschel mit dem Scheitel Tp_2, und die zentralen Projektionen der Erzeugenden zweiter Familie: a_1^s, b_1^s, c_1^s ... bilden ein Büschel mit dem Scheitel Tq_2, wo die Punkte Tp_2 und Tq_2 gleichzeitig Schnittpunkte des Kegelschnittes a^2 mit der Geraden $t\varepsilon_2$ sind.

Ähnlich ist es, wenn Φ_a^2 ein durch den nicht degenerierten Kegelschnitt a^2 bestimmter Kegel oder ein zu zwei Geraden: $t\varepsilon_1$ und $\bar{a}$ /Abb. I.13 b/ degenerierter Kegelschnitt ist. Alle Erzeugenden des Kegels gehen durch den Scheitelpunkt $W\epsilon k = \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$. Ihre zentralen Projektionen haben also einen gemeinsamen Punkt, der die zentrale Projektion des Punktes W ist. Weil $W \in \varepsilon_2$, dann $W^s \epsilon\ t\varepsilon_2$ und $W^2 = W^s$, wenn $W \neq V_\tau$. Wenn dagegen $W = V_\tau$, dann $W^2 = t\varepsilon_1$.

Auf diese Weise wurde die notwendige Bedingung des Satzes I.12 bewiesen. Die genügende Bedingung des Gehörens der Geraden zur Quadrik Φ_a^2 ist die Schlußfolgerung aus dem Satz I.11.

Um die Erzeugende a_1 zu konstruieren bestimmte man in der Abb. I.12 den Schnittpunkt P der Geraden a mit der Ebene α, die durch die Gerade q_2 und den Punkt Ta_1 bestimmt wurde. Weil die gesuchte Erzeugende die Gerade a schneidet und in der Ebene α liegt, so geht sie durch die Punkte Ta_1 und P.

Um die Erzeugende a zu konstruieren, bestimmte man in der Abb. I.13 b einen beliebigen Punkt A, der anders ist als V_τ dieser Geraden, indem man eine durch die Punkte: Q_1, A^s, A^2, Q_2 gehende Ebene α, die Pascal´sche Gerade (A^sV_α) für das Sechseck $(Q_1 = Q_1 A A^2 Q_{2_2} = Q_2)$, den Schnittpunkt Q der Geraden von Pascal mit der Geraden (A^2Q_2) bestimmte. Die Gerade (QQ_1) schneidet die (A^sQ_2) im Punkt A.

§ 4. Konstruktion der quadratischen Projektion einer Geraden

Verwendet man einige Male die Konstruktion in der Abb. I.3, kann man die quadratische Projektion einer beliebigen, abenen, algebraischen Kurve bestimmen, wenn ihre zentrale und parallele Projektion auf die Projektionsebene π gegeben ist. Wenn die Kurve eine Gerade ist, werden diese Konstruktionen dank der Anwendung der Sätze: I.10, 2.4, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, I.1 viel einfacher. In den Abb. I.6 - I.11 bestimmte man quadratische Projektionen der Geraden, die sich in verschiedenen, charakteristischen Lagen in bezug auf das System $\langle Q_1Q_2\, \varepsilon_1\, \varepsilon_2\rangle$ befinden. Mit Ausnahme von Abb. I.11 hat man jede Konstruktion in axonometrischer und paralleler Projektionen auf die Projektionsebene π dargestellt.
Wenn man die Abbildungen I.6, I.6 a, I.6 b, I.7 und I.7 a betrachtet, bemerkt man, daß der gemeinsame Punkt B_a^2 der Geraden a^s mit t_{ε_2} die quadratische Projektion des Punktes B_a ist; der gemeinsame Punkt A_a^2 der Geraden (QA_a^s) mit t_{ε_2} ist die quadratische Projektion des Punktes A_a. Die Punkte $Q_1, Q_1, T_a, A_a^{2^2}, B_a^2$ bestimmen eindeutig einen Kegelschnitt, der die quadratische Projektion der Geraden a ist. Um die Gerade $\bar{a}$ zu konstruieren, nutzte man in der Abb. I.8 die Eigenschaften der Erzeugenden der nicht degenerierten, geradlinigen Quadriken aus. Die Gerade $\bar{a}$ gehört zu einer anderen Familie der Erzeugenden der Quadrik Φ_a^2 wie die Gerade a. Weil $\bar{a}$ durch den Punkt A_a^2 geht, so ist sie die Schnittlinie der Ebenen $\alpha = (a, A_a^2)$ und π. In der Abb. I.8 a bestimmte man zuerst A_a^s, dann A_a^2 und endlich $\bar{a} = (A_a^2, T_a)$. Um $\bar{a}$ /Abb. I.9/ zu konstruieren, bestimmte man eine zusätzliche Erzeugende p, die p_1, a und k_τ schneidet. Die Gerade p ist die Schnittlinie der Ebenen $\gamma_1(a, Bp)$ und $\gamma_2(b_1, Bp)$. Die Punkte T_p und $B_a^2 = a^s \cap t_{\varepsilon_2}$ bestimmen die Gerade $\bar{a}$. Um $\bar{a}$ /Abb. I.9 a/ zu bestimmen, konstruierte man die quadratische Projektion eines beliebigen Punktes P der Geraden a. Ähnlich in den Abb. I.10 und I.10a. Die Konstruktionen in der Abb. I.11 sind unmittelbare Anwendung des Satzes I.10. Sind die zentrale und quadratische Projektionen der Geraden gegeben, dann können wir auf ähnliche Weise ihre Projektion bestimmen. Diese Konstruktionen sind reziprok zu den ober beschriebenen.

§ 5. Konjugierte Projektionen zweier Geraden des Raumes P^3

Aus der Definition der zentralen und quadratischen Projektionen sowie aus den Sätzen I.2 und I.3 folgt unmittelbar:

SATZ I.13.

Die notwendige und genügende Bedingung, daß der Punkt A zur Geraden a gehört, ist das, daß seine quadratische Projektion A^2 auf der quadratischen Projektion a^2 dieser Geraden, und die zentrale Projektion A^s auf der zentralen Projektion a^s der Geraden a liegt, und die Punkte A^2, A^s, Q_1 kolinear sind.
Daraus folgt:

SATZ I.14.

Die notwendige und genügende Bedingung, daß zwei verschiedene Geraden a, b den gemeinsamen Punkt haben, ist das, daß der Schnittpunkt ihrer zentralen Projektionen auf derselben Ordnungsgerade einer der von Q_1 verschiedenen Schnittpunkten ihrer quadratischen Projektionen liegt. Der Schnittpunkt der zentralen Projektionen der Geraden a_1, b_1 /sie sind homolog entsprechend mit den Geraden a,b in der zentralen Kollineation K_α der Ebene α, die durch die Geraden a,b bestimmt ist/ muß auf derselben Bezugslinie wie der andere von Q_1 verschiedene Schnittpunkt der quadratischen Projektionen dieser Geraden liegen.
Aus den Sätzen I.13 und I.14 folgt:

SATZ I.15.

Die notwendige und genügende Bedingung, daß zwei verschiedene Geraden a,b zueinander windschief sind, ist das, daß der Schnittpunkt ihrer zentralen Projektionen nicht auf einer Bezugslinie mit einem der von Q_1 verschiedenen, gemeinsamen Punkte der quadratischen Projektionen a^2 und b^2 liegt.

Die quadratischen Projektionen der windschiefen Geraden a und b können zueinander folgende Lagen annehmen:

1^0 Wenn die Geraden a und b Erzeugende derselben Quadrik sind, dann sind die quadratischen Projektionen dieser Geraden ein identischer Kegelschnitt.

2^0 Wenn die Gerade a die Quadrik Φ_b^2 in zwei verschiedenen, reellen Punkten P und R schneidet, dann haben die quadratischen Projektionen der Geraden a und b außer dem Punkt Q_1 und der gemeinsamen Tangente t_{ε_1} in diesem Punkt zwei reelle, verschiedene, gemeinsame Punkte, die die quadratischen Projektionen P und R sind.

3^o Wenn die Gerade a die Quadrik Φ_b^2 im Punkt P berührt, dann haben die Kegelschnitte a^2 und b^2 außer dem Punkt Q und der gemeinsamen Tangente in diesem Punkt den gemeinsamen Punkt P^2 und die gemeinsame Tangente in diesem Punkt.

4^o Wenn die Gerade a zwei gemeinsame imaginäre, konjugierte in bezug auf Φ_b^2 Punkte hat, dann haben a^2 und b^2 einen reellen, gemeinsamen Punkt Q_1 und eine gemeinsame Tangente t_{ε_1}.

KAPITEL II

Projektive Eigenschaften der quadratischen Projektion

Betrachten wir vier beliebige Punkte A, B, C, D, die auf der Geraden $a \sim c\tau$ liegen und von denen keiner zur Geraden t_{ε_1} oder k_τ gehört. Die vier Punkte A^2, B^2, C^2, D^2 des Kegelschnittes a^2, der die quadratische Projektion der Geraden a ist, sind die quadratische Projektion der vier Punkte /nach 2.7 und I.13/. Diese vier Punkte haben auf dem Kegelschnitt a^2 einen bestimmten Wert des Doppelverhältnisses, das dem Doppelverhältnis der Geraden gleich ist, die diese Punkte aus dem beliebigen Punkt des Kegelschnittes a^2 projizieren[1/].

SATZ II.1.

Das Doppelverhältnis beliebiger vier Punkte der Geraden a /von denen keiner zu t_{ε_1} oder k_τ gehört/ ist dem Doppelverhältnis der quadratischen Projektionen dieser Punkte auf dem Kegelschnitt a^2 gleich, der die quadratische Projektion der Geraden a ist. Es ist also die Invariante der quadratischen Projektion.

Beweis:

Die Punkte A, B, C, D liegen auf einer beliebigen Geraden a, die nicht durch die Punkte Q_1, und Q_2 geht, und auf solcher Geraden, wo $a \sim c\tau$ /Abb. II.1/. Wenn keiner der Punkte A, B, C, D zur Geraden t_{ε_1} oder k_τ gehört, dann /nach. I.1/ gehören die Punkte A^2, B^2, C^2, D^2 zu denselben Geraden des Büschels $(Q_1)_\pi$ wie die Punkte A^s, B^s, C^s, D^s. Weil der Scheitelpunkt Q_1 dieses Büschels auf dem Kegelschnitt a^2 liegt und die Zentralprojektion eine projektive Transformation ist, erhalten wir folgende Gleichheiten:

$$(A^2B^2C^2D^2) = ((A^2Q_1)\ (B^2Q_1)\ (C^2Q_1)\ (D^2Q_1)) = (A^sB^sC^sD^s) = (ABCD)$$

Also

$$(A^2B^2C^2D^2) = (ABCD)$$

Wenn die Gerade a in der Ebene τ enthalten ist, dann ist die quadratische Projektion jedes ihrer Punkte /außer den mit t_{ε_1} und k_τ gemeinsamen Punkten/ der Punkt Q_1. Das Doppelverhältnis der quadratischen Projektionen ihrer vier Punkte kann man im Grenzsinn verstehen, ähnlich wie das Doppelverhältnis der Punkte, von denen einer oder zwei ausgedehnte Projektionen sind.

1/ [1] S.183

Betrachten wir jetzt das Geradenbüschel mit dem Scheitelpunkt P und Basis α /Abb. 2.6/.

SATZ II.2.

Wenn der Punkt P nicht zu s_α gehört, dann sind

/I/ das Doppelverhältnis beliebiger vier Berührungspunkte /der anders ist als Q_1/ der Kegelschnitte, die die quadratischen Projektionen der vier gewählten Geraden des Büschels mit dem Kegelschnitt s_α^2 sind

/II/ das Doppelverhältnis der Geraden, die diese Kegelschnitte in gewählten vier Punkten berühren

/III/ das Doppelverhältnis der Tangenten an entsprechende Kegelschnitte im Punkt P^2

dem Doppelverhältnis der entsprechenden Geraden dieses Büschels gleich.

Beweis:

Nach dem Satz von Pappos[1/] ist das Doppelverhältnis der vier Geraden desselben Büschels durch das Doppelverhältnis der vier Punkte bestimmt, die infolge des Schnittes dieser Geraden durch eine beliebige Gerade der nicht durch den Scheitelpunkt des Büschels gehende Ebene α entstanden ist. Weil die Sekante die Gerade s_α ist, und die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Geraden a,b,c,d des Büschels mit A,B,C,D bezeichnet sind, erhalten wir:

$(abcd) = (ABCD)$

Daraus nach II.1 folgt:

$(ABCD) = (A^2B^2C^2D^2)$

Der Punktreihe zweiter Ordnung /d.h. der auf dem Kegelschnitt liegenden Punkte/ entspricht eindeutig nach dem Prinzip des Doppelverhältnisses auf der projektiven Ebene ein Geradenbüschel zweiter Klasse[2/].

Auf Grund des Satzes von Mac-Laurina[3/] ist die Familie der Tangenten an die Kurve zweiter Ordnung ein Geradenbüschel zweiter Klasse. Wenn die Tangenten an den Kegelschnitt s_α^2 in entsprechenden Punkten A^2, B^2, C^2, D^2 mit t_A, t_B, t_C, t_D bezeichnen, dann

$(A^2\ B^2\ C^2\ D^2) = (t_A\ t_B\ t_C\ t_D)$.

Die Geraden t_A, t_B, t_C, t_D sind gleichzeitig Tangenten an die Kegelschnitte a^2, b^2, c^2, d^2 in den Punkten A^2, B^2, C^2, D^2.

1/ [6] S.119
2/ [1] S.184
3/ [1] S.176

Daraus folgt, daß die Tangenten an die Kegelschnitte a^2, b^2, c^2, d^2 in entsprechenden Punkten A^2, B^2, C^2, D^2 zum Büschel zweiter Klasse gehören und das Doppelverhältnis dieser Geraden dem Doppelverhältnis der Geraden a,b,c,d gleich ist. Betrachten wir jetzt das Geradenbüschel die die Kegelschnitte der Familie (S) im Punkt P^2 berühren. Ein beliebiger Kegelschnitt a^2 dieser Familie samt dem Kegelschnitt s^2_α bestimmt das Büschel der Kegelschnitte mit den Fundamentalpunkten Q_1, A^2 und das der geraden Tangenten in diesen Punkten - $t_{\varepsilon 1}$ und t_A /Abb. II.2/. Die Gerade t_I berührt a^2 im Punkt P^2 und schneidet dieses Büschel in der involutorischen Reihe, deren Doppelpunkte der Punkt P^2 und der Schnittpunkt der Tangente t_I mit der Gerade (Q_1A^2)[1/] sind /Abb. II.2 Punkt I/. Ein beliebiges Paar der homologen Punkte A_1 und A_2 dieser Reihe, die auch die gemeinsamen Punkte des Kegelschnittes s^2_α und der Geraden t_I sind, bestimmt samt den Punkten P^2 und I die harmonische Gruppe mit dem Doppelverhältnis $(P^2IA_1A_2) = -1$.

Daraus folgt, daß die Punkte P^2 und I polarartig in bezug auf den Kegelschnitt s^2_α konjugiert sind.

Daraus folgt, daß auch die Punkte P^2 und II, P^2 und III, P^2 und IV, miteinander in bezug auf s^2_α konjugiert sind.

Daraus folgt, daß die Punkte I,II,III,IV,... auf der Polaren p des Punktes P in bezug auf den Kegelschnitt s^2_α liegen.

Hier sind folgende Relationen festzustellen:

$$P^2(t_I, t_{II}, t_{III}, \ldots) \barwedge p(I, II, III, \ldots) \barwedge s^2_\alpha(A^2, B^2, C^2, \ldots) \barwedge P(a, b, c, \ldots)$$

Daraus folgt, daß die Endglieder dieser Kette projektive Gebilde sind: $P^2(t_I, t_{II}, t_{III}, \ldots) \barwedge P(a,b,c,\ldots)$. Das Büschel der Tangenten an die Kegelschnitte a^2, b^2, c^2,... mit dem Scheitelpunkt P^2 projektiv zum Geradenbüschel $P(a,b,c,\ldots)$ ist. Das beweist, daß die Doppelverhältnisse der sich vier einander entsprechenden Geraden gleich sind.

SATZ II.3.

Wenn der Punkt P zu s_α gehört, dann ist das Büschel der Kegelschnitte, das die quadratische Projektion des Geradenbüschels mit dem Scheitelpunkt P und der Basis α ist, zum betrachteten Geradenbüschel projektiv.

Beweis:

Um das Doppelverhältnis der vier beliebigen Kegelschnitte a^2, b^2, c^2, d^2 dieses Büschels zu bestimmen, muß man dieses Büschel durch einen beliebigen Kegelschnitt p^2 schneiden, der durch die Punkte Q_1 und P^2 geht

---

[1/] [4] S.230.

und die Gerade t_{ε_1} im Punkt Q_1 berührt /Abb. 2.7/. Das Doppelverhältnis der vier Kegelschnitte, die zu einem Büschel gehören, ist dem Doppelverhältnis der vier Punkte gleich, die im Durchschnitt dieser Kegelschnitte durch einen beliebigen Kegelschnitt liegen, der durch drei Scheitel des Grundvierecks dieses Büschels geht, die anders sind als diese Scheitel[1/].
Um das Doppelverhältnis der Kegelschnitte a^2, b^2, c^2, d^2 zu bestimmen, soll man das Doppelverhältnis: A,B,C,D betrachten, wo die genannten Punkte vierte Schnittpunkte entsprechender Kegelschnitte a^2, b^2, c^2, d^2 des Büschels mit dem Kegelschnitt p^2 sind. Nach 2.11 und 2.12 ist der Kegelschnitt p^2 die Projektion unendlich vieler Geraden, die die gleiche projizierende Quadrik haben, deren Durchschnitt durch die Projektionsebene π ein Kegelschnitt p^2 ist. Besonders durch den Punkt P gehen zwei Erzeugende dieser Quadrik. Bezeichnen wir eine von ihnen mit p. Weil der Kegelschnitt p^2 keine Tangente an t_p im Punkt P^2 ist, dann $p \sim \subset \alpha$.
Es sei Φ^2_q eine durch die Gerade q des Büschels P(a,b,c,...)/Abb.1.6/ bestimmte Quadrik. Die Gerade p schneidet die Quadrik Φ^2_q in zwei Punkten, von denen einer der Punkt P ist, der andere der gemeinsame Punkt der Geraden p mit der von der Geraden q verschiedenen Erzeugenden der Quadrik Φ^2_q, die in der durch die Geraden p und q bestimmten Ebene γ enthalten ist. Bezeichnen wir diese Erzeugenden der einzelnen Quadriken entsprechend mit a_1, b_1, c_1,..., und die Schnittpunkte dieser Erzeugenden mit der Geraden p entsprechend mit A, B, C, ... Diese Punkte sind homolog zu den Punkten A_1, B_1, C_1, ..., in denen die Erzeugenden a,b,c,... die Quadrik Φ^2_p /außer dem Punkt P/ in bezug auf die Kollineationsachse der einzelnen Ebenen $\alpha(p,a)$, $\beta(p,b)$, $\gamma(p,c)$... des Büschels p schneiden. Daraus folgt, daß der Punkt A zur Ebene α_1 gehört, die durch die Achse l und den Punkt A_1 bestimmt wurde. Der Punkt B gehört zur Ebene $\alpha_2(l,B_1)$... . Weil der Punkt Q_1 zum Kegelschnitt p^2 gehört, folgt daraus:

$$l\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots) \barwedge P(a,b,c,\ldots) \qquad /1/$$

Die Erzeugende a_1 geht durch den Punkt A_2 auf der Kollineationsachse der Ebene α /Abb. 1.6/ und durch Schnittpunkt der Geraden p mit der Ebene α_1.
Die Punkte P und A sind die Schnittpunkte der Quadrik Φ^2_a durch die Gerade p, P und B - gemeinsame Punkte des Geraden p und des Quadrik Φ^2_b, P und C - gemeinsame Punkte der Geraden p und der Quadrik Φ^2_c,...

$$l\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots) \barwedge p(A, B, C, \ldots) \qquad /2/$$

Aus /1/ und /2/ erhalten wir:

$$p(A, B, C, \ldots) \barwedge P(a, b, c, \ldots) \qquad /3/$$

Daraus folgt:

$$p^2(A^2, B^2, C^2, \ldots) \barwedge P(a,b,c,\ldots)$$

1/ [2] S.71

KAPITEL III

Anwendungsbeispiele der quadratischen Projektion zur Lösung bestimmter Aufgaben der ebenen projektiven Geometrie

Aufgabe 1

Es sei ein Kegelschnitt a^2 gegeben, der die Tangente an die Gerade t im Punkt Q_1 ist, und die Punkte A^2 und B^2 /A^2, $B^2 \sim \epsilon t$ liegen außerhalb dieses Kegelschnittes/. Man soll im Einparameterbüschel der Kegelschnitte, die durch die Punkte A^2 und B^2 gehen und die Gerade t im Punkt Q_1 berühren, solche Kegelschnitte bestimmen, die in zwei Punkten mit dem Kegelschnitt a^2 gemeinsame Tangenten haben /einer von diesen Punkten ist Q_1/.

Lösung:

Betrachten wir zwei Ebenen ε_1 und ε_2 anders als die Ebene der Abbildung /die als Projektionsebene π zu betrachten ist/ und solche Ebenen, daβ $t_{\varepsilon_1} = t$ und t_{ε_2} eine beliebige Tangente an a^2 anders als t ist und solche Ebene, daβ $B^2 \epsilon\, t_{\varepsilon_2}$ und $A^2 \sim \epsilon\, t_{\varepsilon_2}$.
Der Kegelschnitt a^2 bestimmt eindeutig den Kegel der Familie (K^2) mit solchem Scheitelpunkt $W \epsilon k = \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$, dessen Zentralprojektion W^2 aus dem Punkt Q_2 /beliebig in ε_2, nur nicht auf π gewählten/ ein Berührungspunkt der Geraden t_{ε_2} mit dem Kegelschnitt a^2 ist. Bestimmen wir eine beliebige Ebene α , die diesen Kegel berührt. In der Abb. III.1 hat man zur Erleichterung der Konstruktion angenommen, daβ $A^2 \epsilon\, h_\alpha$. Die Gerade s_α^2 , die die Berührungspunkte W^s und T_s^α der Geraden t_{ε_2} und h_α mit dem Kegelschnitt a^2 verbindet, ist die Zentralprojektion der involutorischen Kollineationsachse K_α der Ebene α .
Die Zentralprojektion des Kollineationszentrums ist der Punkt Q_1, das Geradenpaar v_α^s, t_{ε_2} ist die Zentralprojektion des Paares der in K_α homologen Geraden.
Bestimmen wir auf der Ebene α solche Punkte A und B, deren quadratische Projektionen A^2 und B^2 sind.
Weil $A^2 \epsilon\, h_\alpha$, dann $A = A^2 = A^s$, dagegen $B^2 = B^s$, weil $B^2 \epsilon\, t_{\varepsilon_2}$.
Wenn wir den mit A in der Kollineation K_α homologen Punkt A_1 und den mit B homologen Punkt B_1 bestimmen, dann schneiden sich die Paare der homologen Geraden a^s und a_1^s, sowie b^s und b_1^s, die durch diese Punkte gehen, auf der Kollineationsachse entsprechend in den Punkten T_1^s und T_2^s. Die quadratischen Projektionen T_1^2 und T_2^2 dieser

Punkte sind die Berührungspunkte zweier Kegelschnitte des Büschels an den Kegelschnitt a^2.

Aufgabe 2

Es seien zwei Kegelschnitte a^2 und b^2 des Einparameterbüschels der Kegelschnitte gegeben, die die Gerade t im Punkt Q_1 berühren und durch zwei festgesetzte Punkte P,R gehen, die nicht zur Geraden t gehören. Man soll den Kegelschnitt betsimmen, der die Gerade t im Punkt Q_1 berührt und gleichzeitig jeden der Kegelschnitte a^2, b^2 im Punkt, der anders ist als Q_1, berührt.

Lösung:

Führen wir zwei Ebenen ε_1 und ε_2, die anders als die Ebene in der Abbildung der Projektionsebene π sind, auf solche Weise, daß z.B. $P \in t_{\varepsilon_2}$ und $R \sim \in t_{\varepsilon_2}$. Die Gerade t_{ε_1} sei die gemeinsame Tangente t der Kegelschnitte a^2 und b^2 im Punkt Q_1. Jeder der Kegelschnitte a^2, b^2 bestimmt genau eine geradlinige Quadrik der Familie (K^2). Bezeichnen wir sie mit Φ_a^2 und Φ_b^2, dann bestimmen wir eine beliebige Ebene α, die in einem Punkt der Durchdringungslinie dieser Quadriken sowohl die eine als auch die andere Quadrik berührt. Führen wir durch den Punkt P eine beliebige Gerade a^s. Das Projektionspaar (a^s, a^2) bestimmt genau eine Erzeugende a der Quadrik Φ_a^2. Die Zentralprojektion A_a^s des Schnittpunktes dieser Geraden mit der Ebene ε_1 finden wir leicht, wenn wir den zweiten Punkt bestimmen, in dem die Gerade t_{ε_2} den Kegelschnitt a^2 schneidet. In der Abb. III.2 ist das der Punkt A_a^2. Bestimmen wir dann solche Erzeugende b der Quadrik Φ_b^2, die die Gerade a schneidet. Die Gerade b^s muß also durch den Punkt $R^s \in a^s$ gehen, der kolinear mit den Punkten Q_1 und R ist, sowie durch den Punkt B_b^2, der anders als P ist und der Schnittpunkt des Kegelschnittes b^2 mit der Geraden t_{ε_2} ist. Das Projektionspaar (b^s, b^2) bestimmt eindeutig die Erzeugende b der Quadrik Φ_b^2, die die Gerade a im Punkt R schneidet. In der Abb.III.2 bezeichnete man die Punkte A_b^s und T_b dieser Geraden. Die Ebene α, die durch die Geraden a,b bestimmt wurde, berührt die beiden Quadriken im Punkt R, und die quadratische Projektion s_α^2 ihrer Kollineationsachse ist ein Kegelschnitt, der die Bedingungen der Aufgabe einhält. Der Kegelschnitt s_α^2 berührt die Gerade t im Punkt Q_1 und außerdem den Kegelschnitt a^2 im Punkt T_1^2, und den Kegelschnitt b^2 im Punkt T_2^2.

L I T E R A T U R V E R Z E I C H N I S

[1] Ч е т в е р у х и н Н. Ф. Проективная геометрия, Москва 1969.
[2] G r o c h o w s k i B., Pojęcie rzutu rozciągłego, Zeszyty Naukowe, Geometria wykreślna, B.II, Warszawa 1961. S.40-90.
[3] L u b a ś E., Zur quadratischen Transformation dreidimensionalen projektiven Raumes auf die Ebene, in jetzigem Bande.
[4] P l a m i t z e r A., Elementy geometrii rzutowej, Lwów 1927.
[5] P l a m i t z e r A., Geometria rzutowa, B.II, Warszawa 1938.
[6] O t t o E., Geometria wykreślna, Warszawa 1966.