Maciej Klakla

DOSTRZEGANIE PROBLEMÓW A UZDOLNIENIA MATEMATYCZNE UCZNIÓW

(fragment badań)

1. Wstęp

1.1. Niniejszy artykuł jest fragmentem sprawozdania z obszerniejszych badań dotyczących problemów rozpoznawania uzdolnień matematycznych uczniów szkoły średniej, a więc w wieku od piętnastu do osiemnastu lat. Dotyczę one - co należy tu podkreślić - uzdolnień o charakterze twórczym, w przeciwieństwie do rozważanych często uzdolnień w sensie "być zdolnym do nauczenia się czegoś", traktowanych więc jako pewien poziom normalności.

Twórcze uzdolnienia matematyczne - jak pokazują liczne przykłady z życia wielkich matematyków i ich wypowiedzi [1] - bywają często szczególnie ukierunkowane i nie miałoby sensu mówić o takich ogólnych uzdolnieniach. Można by natomiast w pracy matematyka wyróżnić szereg różnorodnych nurtów [2], takich jak np. uogólnianie, specyfikacja, dostrzeganie analogii i struktur, myślenie według pewnej konwencji czy dostrzeganie problemów, itp. W konsekwencji można by więc mówić o uzdolnieniach do różnych typów aktywności.

W całej pracy podejmuję próbę badania uzdolnień do pewnych wybranych rodzajów aktywności matematycznej. Natomiast w prezentowanym fragmencie, zajmę się omówieniem badań próbnych, dotyczących umiejętności dostrzegania i formułowania problemów w pewnej sytuacji otwartej.

2. Cel badań

2.1. Słuchając wypowiedzi nauczycieli - praktyków, chatakteryzujących swoich uczniów, spotykamy się często z określaniami: "zdolny", "pilny, ale niezbyt zdolny", "niezdolny". Mimo, że sądy te nie są oparte na wyraźnie sformułowanych kryteriach, wyróżniają jednak - w opinii tychże nauczycieli - pewne kategorie cech umysłowych uczniów spotykane w szkole, a często są podstawą pewnych prognoz związanych z preorientacją zawodową, czy też dotyczących powodzenia w dalszych studiach. Oczywiście, niesłusznym byłoby mniemanie, że owo niesprecyzowanie kryteriów, którymi kierują się nauczyciele określając ucznia jako np. "pilnego, ale niezbyt zdolnego", oznacza w ogóle ich brak. Nauczyciel wyrabia sobie bowiem taki sąd na podstawie obserwacji reakcji ucznia w różnorodnych sytuacjach, często nie uświadamiając sobie wszystkich istotnych elementów wpływających na taką a nie inną opinię o uczniu. Sąd ten zależy również od wnikliwości czynionych przez nauczyciela obserwacji, od czasu ich trwania, od tego, czy sytuacje, w których nauczyciel ma możność obserwować ucznia są dostatecznie zróżnicowane, itd. Opinia taka zależy więc wyraźnie od nauczyciela, który ją wydaje, i co za tym idzie, może nie być trafna. Może również zmieniać się w czasie, w miarę lepszego poznawania ucznia, oraz w miarę jego umysłowego rozwoju.

Taka orientacja w możliwościach uczniów jest bardzo ważna w procesie nauczania, bowiem uczniowie matematycznie uzdolnieni wymagają odrębnych zabiegów dydaktycznych w celu rozwinięcia ich predyspozycji w tym kierunku.

Praktyka szkolna zna różne formy pracy z uczniem zdolnym; jedne z nich są stosowane z większym, inne z mniejszym powodzeniem. Natomiast sprawa orientacji, z którymi uczniami należy na tym polu pracować, przebiega tak, jak to omó -

wiłem powyżej; jest oparta przede wszystkim na intuicji i doświadczeniu nauczyciela. Nasuwa się więc pytanie, czy nie można by oprzeć - chociażby częściowo - takiej orientacji, na kryteriach wyraźniej sprecyzowanych.

2.2. We wspomnianych na wstępie szerszych badaniach postawiłem sobie za cel:

a/ próbę wyróżnienia pewnych charakterystycznych czynników matematycznej aktywności, które można by ujawnić w formie dostępnej dla naszej obserwacji i oceny,

b/ próbę weryfikacji występowania tychże czynników w matematycznej aktywności uczniów uznanych według opinii szkolnej za zdolnych,

c/ próbę sformułowania - na podstawie wyróżnionych czynników - pewnych kryteriów uzdolnień matematycznych uczniów.

Przyjmuję tu założenie, że uczniowie określani przez swych nauczycieli jako "bardzo zdolni" są tacy w rzeczywistości, być może z pewnymi niewielkimi wyjątkami.

W całej pracy stawiam sobie za cel wyróżnienie z tego punktu widzenia tylko niektórych czynników matematycznej aktywności; zresztą pełne rozeznanie w tej dziedzinie jest niemożliwe ze względu na bogactwo różnorodnych form tej aktywności.

Sformułowane kryteria mogłyby posłużyć jako pewna podstawa do prób nad konstrukcją testów dotyczących rozpoznawania uzdolnień matematycznych uczniów.

2.3. Czynniki wyróżnione w pracy, mają w zamierzeniu autora odpowiadać następującym dwóm warunkom:

1/ Powinny istotnie występować w niebanalny sposób w twórczej pracy matematycznej,

2/ Powinny być na tyle konkretne, aby można było na ich podstawie formułować kryteria uzdolnień matematycznych, możliwe do stosowania w praktyce.

W dalszym ciągu tego artykułu, organiczając go jedynie do sprawozdania z badań próbnych, zajmę się tylko jednym z wielu czynników twórczej aktywności matematycznej, a mianowicie:

- dostrzeganiem problemów w pewnej sytuacji otwartej /sensibilité aux problèmes [3] /.

Pozwala to na sformułowanie następującego kryterium matematycznych uzdolnień ucznia:

umiejętność dostrzegania i formułowania problemów w sytuacji otwartej.

Powyższe kryterium spełnia wymagania wymienione w punkcie 1.

Historia matematyki zna liczne przykłady sytuacji, w których właściwe postawienie problemu, nawet jeżeli nie doprowadzało szybko do rozwiązania, otwierało nowe drogi i perspektywy myśli matematycznej. Także w codziennej praktyce każdy pracujący twórczo matematyk stawia sobie w związku z rozważanymi zagadnieniami pewne pytania, szuka na nie odpowiedzi, które sprowadza z kolei do odpowiedzi na inne, prostsze pytania, aż do momentu znalezienia poszukiwanego rozwiązania.

Sformułowane powyżej kryterium spełnia także drugi z postawionych warunków. Można bowiem opracować system otwartych sytuacji i w każdej z nich konkretnie badać, czy uczeń dostrzega i jakie dostrzega problemy, czy potrafi je sformułować. Nie badamy tu umiejętności rozwiązywania, ale zdolność do dostrzegania matematycznie sensownych problemów.

2.4. Potrzebne jest jeszcze jedno istotne wyjaśnienie, bez którego cała koncepcja mogłaby być źle zrozumiana. Otóż określone w wyniku moich szerszych badań kryteria mają jedynie pozytywny charakter, tzn. spełnianie któregoś z nich może być podstawą do mocno umotywowanej hipotezy o uzdolnieniach do tego typu aktywności matematycznej. Natomiast jeżeli uczeń w pewnej konkretnej sytuacji nie potrafi dostrzec żadnych interesujących problemów, to ten fakt wcale nie może upoważniać nas do wniosku o braku u niego uzdolnień do dostrzegania i formułowania problemów. Na niepowodzenie mogą bowiem mieć wpływ różne czynniki tkwiące bądź w samym uczniu, otoczeniu, czy wreszcie w proponowanej sytuacji. Wcale nie ma pewności, że w innej sytuacji i innych okolicznościach, znowu próba musi się zakończyć niepowodzeniem. Tymczasem uzyskanie pozytywnego wyniku jest bez wątpienia pewnym świadectwem uzdolnień do tego rodzaju aktywności matematycznej.

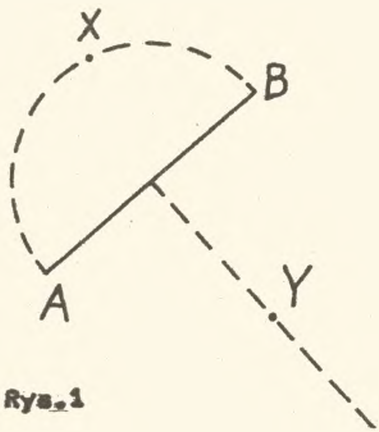
Obecnie nie będę szczegółowo omawiał metody i organizacji szerszych badań, o których wyżej wspomniałem, ograniczę się jedynie do tych uwag, które są niezbędne dla zrozumienia prezentowanego fragmentu.

Badania polegały na obserwacji i analizie reakcji uczniów na pewne sprawdziany weryfikujące występowanie wyróżnionych uprzednio czynników uzdolnień. Poprzedzone zostały badaniami próbnymi, mającymi na celu wypracowanie metody analizy i opisu w odpowiednich kategoriach reakcji uczniów na te sprawdziany.

3. Temat i metoda

3.1. BADANIA PRÓBNE. Dotyczyły one tylko jednego z wyróżnionych czynników, a mianowicie: dostrzegania problemów, w pewnej sytuacji otwartej. Do badań wybrałem dwie sytuacje: geometryczną i algebraiczno-arytmetyczną. Tutaj ograniczę się jedynie do omówienia zagadnień związanych z sytuację geometryczną. A oto pełny tekst przedstawionego uczniom zadania:

"Dane są różne punkty A i B. Punkt X może poruszać się po półokręgu o średnicy $\overline{AB}$, a punkt Y po symetralnej odcinka $\overline{AB}$ tak, że punkty X i Y należą do różnych stron prostej AB /rys.1/.



Rys.1

Jakie zadania, pytania lub ciekawe problemy możesz postawić w związku z przedstawioną sytuacją? Sformułuj te problemy.

Po sformułowaniu wszystkich, które ci się nasuwają, przeczytaj jeszcze raz swoje propozycje i podkreśl te, które uważasz za szczególnie interesujące."

Uczniowie otrzymywali pełny tekst zadania i na tym samym arkuszu udzielali odpowiedzi. Pracowali samodzielnie bez możliwości komunikowania się z kolegami w czasie około 30 minut. Byli poinformowani, że ich odpowiedzi zostaną wykorzystane do celów niniejszego opracowania i wyrazili zgodę na współpracę z autorem. Równocześnie wiedzieli, że zadania rozwiązywane przez nich w trakcie badań nie będą miały wpływu na ocenę szkolną.

3.2. KATEGORIE OPISU WYNIKÓW

3.2.1. Zadania, przed którymi postawiono uczniów w trakcie badań różniły się istotnie od tego, z czym spotykali się w toku nauki w szkole. Tam, zazwyczaj oczekiwano od nich rozwiązania zadania na ogół wyraźnie sformułowanego; tutaj natomiast uczeń miał w opisanej sytuacji sam dostrzec i sformułować pewne związane z tą sytuację problemy, przy czym wcale nie musiał znać ich rozwiązania. Jest więc rzeczą oczywistą, że ocena odpowiedzi badanych uczniów powinna opierać się również na zupełnie innych kryteriach, niż ocena typowych zadań rozwiązywanych w szkole, gdzie miała sens ocena poprawności rozwiązania i obliczeń, lub prostoty znalezionego rozwiązania itp. Tutaj nie ma sensu o tym wszystkim mówić, gdyż w prezentowanych sytuacjach można postawić wiele różnorodnych problemów, a pominięcia pewnych z nich nie można traktowaćć jako błędu popełnionego przez ucznia. Powstał więc problem znalezienia takich sposobów opisu i analizy odpowiedzi uczniów, które by pozwoliły na możliwie wielostronne porównywanie ich prac.

3.2.2. To właśnie było celem badań próbnych z grupą ośmiu uczniów klas trzecich i czwartych liceum. Zostali oni zakodowani symbolami A_{01}, A_{02}...A_{08}. Wszyscy oni, w opinii swych nauczycieli matematyki, byli szczególnie uzdolnieni matematycznie. Można więc było się spodziewać, że ich odpowiedzi dadzą interesujący materiał, pozwalający na wyróżnienie takich kategorii opisu rozwiązań, które będą istotne dla charakterystyki rozwiązań grupy uczniów zdolnych, badanych już po zakończeniu badań próbnych. Pewnym świadectwem trafności wytypowania tych uczniów przez nauczycieli jest fakt, że wszyscy oni podjęli i kontynuują z powodzeniem studia na kierunkach ścisłych lub technicznych, a więc związane z matematyką. Ilustruje to następujące zestawienie:

Uczeń	Obecnie /1976 r/
A_{01}	I rok matematyki UJ
A_{02}	I rok budownictwa lądowego PK
A_{03}	I rok matematyki stosowanej AGH
A_{04}	II rok chemii PK
A_{05}	II rok matematyki UJ
A_{06}	II rok mechaniki PK
A_{07}	II rok elektrotechniki AGH
A_{08}	II rok matematyki UJ

Przeprowadzenie badań próbnych, oprócz możliwości wypracowania metod opisu i analizy odpowiedzi uczniów, pozwoliło także - w wyniku wykonanych analiz - na sformułowanie pewnych wstępnych hipotez.

3.2.3. Analizując wyniki badań próbnych wyróżniłem następujące kategorie opisu:

I. Otwartość problemu /o.p./

II. Abstrakcyjność występujących w nim obiektów /a.o/

III. Poprawność sformułowania /p.s./

IV. Nietrywialność /ntr./

Odnoszą się one do każdego dostrzeżonego i sformułowanego przez ucznia pojedynczego problemu. W trakcie opisywania odpowiedzi poszczególnych uczniów okazało się koniecznym wyróżnienie jeszcze innych kategorii, które omówię później.

Obecnie przejdę do wyjaśnienia na czym polegają wymienione uprzednio cechy proponowanych przez uczniów problemów, precyzując, co przez każdą z nich będę rozumiał, oraz uzasadniając przyjęcie takich właśnie, a nie innych.

3.2.4. Otwartość problemu. /o.p./ Problem jest sformułowany tak, że pozostawia jeszcze swobodę w wyborze danych /np. parametrów/ lub dopuszcza z góry niejednoznaczność rozwiązania. Np. uczeń A_{08} pisze tak:

"Jakie zespoły parametrów charakteryzują jednoznacznie figurę? Jakie są między nimi związki? ".

Z jego rysunku wynika, że chodzi tu o figurę wyznaczoną przez punkty A,X,B,Y, Dowolność wyboru parametrów określających tę figurę pozwala zaliczyć zagadnienie do problemów otwartych. Ten sam uczeń formułuje takie zagadnienie:

"Jak się wyrażają kąty w figurze za pomocą boków?"

Tutaj zarówno dane zadania jak i poszukiwane wielkości są ściśle określone, nie jest to więc problem otwarty; nie chodzi tu bowiem o jakiekolwiek relacje zachodzące między układem miar boków i miar kątów, ale o wyrażenie miar kątów jako funkcji miar boków /przy czym niezależne są tylko dwie z tych miar/.

3.2.5. Abstrakcyjność obiektów. /a.o./ Problem dotyczy obiektów bardziej ogólnych, bardziej abstrakcyjnych, niż proste i elementarne figury geometryczne, czy liczby. Zaliczam tu zadania dotyczące np. zbiorów punktów, czy par punktów określonych pewnymi warunkami, których to zbiorów uczeń a priori nie może zaklasyfikować do znanych mu geometrycznych obiektów ani geometrycznych relacji; problemy dotyczące funkcji lub przekształceń, czy też związków między pewnymi wielkościami określonymi przez dane problemowej sytuacji. Np. zaliczam tutaj następujące problemy sformułowane przez ucznia A_{04}:

"Znaleźć przekształcenie, które przyporządkowuje każdemu z punktów X punkt Y jeden i tylko jeden".

"Znaleźć takie przekształcenie wzajemnie jednoznaczne" oraz problem:

"Jaką figurą jest zbiór środków wszystkich odcinków $\overline{XY}$?", podany przez ucznia A_{06}.

3.2.6. Poprawność sformułowania. /p.s./ Dopuszczając otwartość problemu, dopuszczam też niedoprecyzowanie danych, drobne usterki redakcyjne: natomiast nie uznaję za poprawne błędów oczywistych /np. gdy uczeń nazywa funkcję - relację o której z góry nie może wiedzieć, czy jest funkcją, lub np. nie dostrzega, że zdefiniowana przez niego funkcja na danym zbiorze nie jest w pełni określona, czy też w innym kontekście używa błędnie terminów matematycznych albo wreszcie sformułowanie jest szczególnie nieścisłe.

Analizując z tego punktu widzenia odpowiedzi uczniów chciałem stwierdzić, czy stawiając jakieś zagadnienie uczeń wyraźnie dostrzega jego istotę, czy też formułuje je mając jedynie niejasny, intuicyjny pogląd na jego naturę. Istotne dla tego kryterium jest stwierdzenie, czy sformułowanie problemu przez ucznia jest takie, że określa ten problem jednoznacznie, chociażby nawet był on zagadnieniem bardzo ogólnym. Dla ilustracji posłużę się tu kilkoma przykładami.

Uczeń A_{03} forumułuje problem tak:

"Punkt X kreśli łuk, Y porusza się wzdłuż sym. $\overline{AB}$. Pole figury A X BY jako funkcja odległości OY"[1]. Natomiast uczeń A_{07} pisze:

"Znaleźć funkcję pola figury AY BX, gdy X porusza się ze stałą ω [2] od A do B, a Y ze stałą prędkością v $=\omega$CB od C. Prawdopodobnie obaj mówią tu o tym samym problemie, dotyczącym zbadania zmienności pola figury wyznaczonej przez punkty A,X,B,Y, w zależności od położenia punktów X Y. Pierwszy z nich wprawdzie mówi o poruszaniu się punktów, ale nie wskazuje startu i nie mówi nic wyraźnie o prędkościach, co powoduje, że ujęcie pola figury AYBX jako funkcji odległości OY nie jest w pełni określone. Drugi uczeń, mimo że w swoim sformułowaniu tych braków unika, to jednak mówi o funkcji pola, zamist o polu jako funkcji /przejęzyczenie/ oraz nie wskazuje, funkcją czego ma być to pole. W obu tych przykładach sprecyzowanie problemów dostrzeżonych przez uczniów budzi więc zastrzeżenia.

Sformułowanie ucznia A_{02}:

"Dla jakich położeń punktów X,Y punkty A,B,X,Y wyznaczą 2 trójkąty równoramienne" nie pozwala domyśleć się w jakim sensie należy tu rozumieć wyznaczanie tych trójkątów, więc również i ten problem nie jest wyraźnie sprecyzowany. Natomiast jako ilustracja zagadnień dobrze sprecyzowanych mogą posłużyć następujące problemy:

Uczeń A_{03}: "Punkt X nie zmienia pozycji. Y porusza się wzdłuż osi OY, zajmując kolejne położenie Y', Y''... Jaką figurę tworzą środki odcinków $\overline{XX}$, $\overline{XX'}$, $\overline{XX''}$... ?

Uczeń A_{01}: "Znaleźć zależność między położeniem X i Y w przypadku, gdy obwód czworokąta AXBY ma być stały".

---

[1] O oznacza /wg rysunku ucznia/ środek odcinka $\overline{AB}$.

[2] Oczywiście opuszczono słowo "prędkością".

3.2.7. Nietrywialność. /ntr./ Formułując to kryterium, chciałem uzyskać odpowiedź na pytanie, czy uczeń stawia sobie na danym etapie zagadnienia, których rozwiązanie nie jest natychmiastowe, wynikające np. z rysunku, czy łatwe do przewidzenia bez żadnego wysiłku, ale które stanowią istotne dla niego problemy. Jako przykład trywialnego problemu może służyć następujące sformułowanie ucznia A_{04}:

"Czy każdy punkt płaszczyzny należy do którejś z prostych XY ?" Odpowiedź jest chyba tutaj, dla ucznia IV klasy liceum, ewidentna. Podobnie trywialnym problemem jest następujący:

"Czy możliwe jest takie położenie punktów A,B,X,Y, aby leżały one na jednej prostej ?" - Formułuje go uczeń A_{02}. Ten sam uczeń stawia również problem: "Dla jakiego położenia X i Y prosta AB jest osią symetrii przekształcającą punkt X na Y i odwrotnie?". Rozwiązanie tego zadania, pomijając już niepoprawność sformułowań w rodzaju "oś symetrii przekształcająca X na Y" - jest natychmiastowe, nie jest to więc pytanie problemowe.

Ten sam uczeń formułuje również zagadnienie:

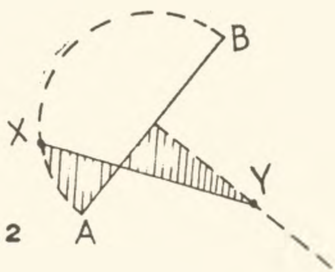
"Znaleźć położenie punktu Y przy założeniu, że AX = BX, dla którego

$$P_{\triangle} AXBY = \frac{\pi /AB/^2}{8} \text{ ".}$$

I tutaj rozwiązanie wynika natychmiast z prostego rachunku, jest to więc zagadnienie banalne.

Do problemów trywialnych zaliczam również następujący:

"Przy jakich położeniach punktów X,Y, pole figur zakreskowanych jest największe /rys.2/" - formułuje go uczeń A_{01}:



Rys.2

Fakt, że takie "największe pole" nie istnieje, powinien na tym poziomie być dla ucznia oczywisty.

Przytoczę również kilka problemów, które bez wątpienia należałoby na tym etapie uznać za niebanalne. I tak np:

Uczeń A_{05} formułuje następujące zadania:

Znaleźć miejsce geometryczne środków odcinków $\overline{XY}$, gdy X,Y poruszają się po odpowiednich krzywych".

"Znaleźć miejsce geometryczne /X,Y/,, dla których ∡ XBY jest prosty".

Uczeń A_{01} formułuje takie problemy:

"Znaleźć położenie punktów takie, aby pola figur zakreskowanych były równe /rys.2/".

"Znaleźć położenia punktów X,Y, przy których pole Δ AXY jest stałe".

"Znaleźć zależność między położeniem X i Y w przypadku, gdy obwód czworokąta AXBY ma być stały".

I jeszcze przykład podany przez ucznia A_{08}:

"Niech X porusza się po półokręgu. Jak powinien poruszać się Y po symetralnej, aby pole[3] pozostało niezmienione".

3.2.8. **Przykłady powyższe ilustrowały, w jakim sensie należy rozumieć trywialność lub nietrywialność problemów stawianych przez uczniów. Te kategorie nie są ostre. Występują również sytuacje skrajne, w których decyzja, do której z nich zaliczyć zadanie jest uwarunkowana całym kontekstem problemów stawianych przez ucznia, czy nawet przez wszystkich badanych.**

Zwracam uwagę na to, że propozycje uczniów miały być spontaniczne, formułowane "na gorąco". Oczywiście, gdyby uczniowie ci mieli rozwiązywać swe zadania na pewno sprecyzowaliby je ściślej. Chodziło jednak właśnie o szkic bezpośrednio im nasuwających się idei.

---

[3] Pole czworokąta A X B Y

Nie podejmuję próby waloryzacji tych odpowiedzi, ograniczając się jedynie do ich charakterystyki, zgodnie z wymienionymi wyżej cechami.

Analizując propozycję uczniów, biorę pod uwagę ograniczoność ich "matematycznego świata", uwarunkowanego programem i stylem nauczanej matematyki elementarnej. Sam temat zadania również w dużej mierze warunkuje to ograniczenie. Dlatego więc wymienione kategorie interpretuję relatywnie, w stosunku do możliwości uczniów. Sens niektórych sformułowań nieprecyzyjnych w oderwaniu od całego kontekstu propozycji ucznia, czasem można ustalić w tym kontekście i to właśnie kilkakrotnie stosuję.

3.2.9. Oto pełna lista proponowanych przez uczniów problemów. Zostały one zgrupowane w następujący zespoły, ujmujące problemy o podobnej tematyce:

I. Problemy związane z przekształceniami,

II. Problemy związane z poszukiwaniem miejsc geometrycznych punktów i ewentualnie własności tych zbiorów.

III. Problemy dotyczące wyznaczania pewnych wielkości jako funkcji innych.

IV. Problemy dotyczące związków między elementami czworokąta AXBY.

V. Problemy związane z wyznaczaniem takich położeń punktów X i Y tak, aby były spełnione pewne warunki.

VI. Problemy inne.

Znak "x" w rubrykach:/o.p./, /a.o./, /p.s./,i /ntr./ oznacza, że problem postawiony przez ucznia zaliczam odpowiednio do otwartych, abstrakcyjnych, poprawnie sformułowanych i nietrywialnych /tab.I/.

Tablica I

Grupa probl.	Lp.	Symb. ucznia	Symb. probl.	Pełne sformułowanie problemu	/o.p/	/a.o/	/p.s./	/ntr./
I. Problemy związane z przekształceniami	1.	A_{04}	P_5	Znaleźć przekształcenie, które przyporządkowuje każdemu z punktów X punkt Y jeden i tylko jeden	x	x	x	x
	2.	A_{04}	P_6	a/ Znaleźć takie przekształcenie wzajemnie jednoznaczne	x	x	x	x
	3.	A_{01}	P_5	Określam odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne zbioru punktów półokręgu na zbiór punktów półprostej: $P/X/=Y \Leftrightarrow OY=OX.tg\frac{\sphericalangle YOX}{2}$ zbadać własności tego przekształcenia	x	x		x
	4.	A_{01}	P_6	Znaleźć inne przekształcenia wzajemnie jednoznaczne między tymi zbiorami	x	x	x	x
II. Problemy związane z poszukiwaniem miejsc geometrycznych punktów i ewentualnie własności tych miejsc	5.	A_{06}	P_1	Jaką figurą jest zbiór środków wszystkich odcinków $\overline{XY}$?		x	x	x
	6.	A_{05}	P_1	Znaleźć miejsce geometryczne środków odcinków $\overline{XY}$, gdy X,Y poruszają się po odpowiednich krzywych		x	x	x
	7.	A_{05}	P_2	Zbadać,czy istnieje pole tego obszaru, czy może:		x	x	x
	8.	A_{05}	P_3	jest zbieżne do nieskończoności, gdy Y oddala się do nieskończoności		x	x	x
	9.	A_{05}	P_4	Znaleźć pole obszaru wyznaczonego przez te punkty /jeżeli takie istnieje/		x	x	x
	10.	A_{04}	P_1	Jaką figurę tworzy zbiór wszystkich środków odcinków $\overline{XY}$,gdy: a/ punkt X jest stały		x	x	x

1	2	3	4	5	6	7	8	9
II. Problemy związane z poszukiwaniem miejsc geometrycznych punktów i ewentualnie własności tych miejsc	11.	A_{04}	P_2	b/ punkt Y jest stały		x	x	x
	12.	A_{04}	P_3	c/ Punkty X i Y mogą się poruszać		x	x	x
	13.	A_{03}	P_3	Punkt X nie zmienia pozycji, Y porusza się wzdłuż osi OY, zajmując kolejno położenie /Y', Y",.../ Jaką figurę tworzą środki odcinków $\overline{XY}$, $\overline{XY'}$, $\overline{XY''}$.		x	x	x
	14.	A_{03}	P_3'	... /ewentualnie przepis funkcji, której jest wykresem/.		x	x	x
	15.	A_{05}	P_6	Jeżeli punkt Y jest dany, leży na p.prostej OY, to znaleźć takie miejsce punktu X, dla którego stosunek pól na które pr.XY dzieli pole w półokręgu jest w danym stosunku K		x	x	x
	16.	A_{02}	P_5	Pole figury ograniczonej łukiem AB jest równe $\frac{\pi /AB/^2}{8}$. Znaleźć położenie punktu Y, dla którego pole utworzonego trójkąta ABY jest równe $\frac{\pi /AB/^2}{8}$.			x	
	17.	A_{02}	P_5'	Przeprowadzić analogiczne konstrukcje w przestrzeni, tzn. dy półokrąg AXB jest przekrojem półkuli, a $\triangle$ AYB przekrojem stożka.			x	
	18.	A_{02}	P_6	Znaleźć położenie punktu Y, przy założeniu, że AX=BX, dla którego $P_2 \square AXBY = \frac{\pi /AB/^2}{8}$			x	

1	2	3	4	5	6	7	8	9
III. Problemy dotyczące wyznaczania pewnych wielkości jako funkcji innych	19.	A_{06}	P_5	Pole czworokąta ABXY jako funkcja odległości XY.		x		x
	20.	A_{03}	P_4	Punkt X kreśli łuk $\overline{AB}$, Y porusza się wzdłuż sym. $\overline{AB}$. Pole figury AXBY jako funkcja odległości OY.		x		x
	21.	A_{07}	P_2	Znaleźć funkcje pola figury AYBX, gdy X porusza się ze stałą ω od A do B, a Y ze stałą prędkością $v = \omega$ CB od C.		x		x
	22.	A_{08}	P_{13}	Jak zmienia się pole w zależności od $\sphericalangle \alpha$ i $\sphericalangle \beta$ tzn. gdy X porusza się po półokręgu a Y po symetralnej ?		x	x	x
	23.	A_{06}	P_6	Pole trójkąta XYO jako funkcja odległości XY		x	x	x
	24.	A_{07}	P_1	Znaleźć funkcję odległości tych dwóch punktów, gdy X porusza się tam i z powrotem po łuku AB, okres tego ruchu wynosi T. Punkt Y porusza się jednostajnie po półprostej CY.		x	x	x
	25.	A_{03}	P_2	Rzędna punktu Y = a, punkt X porusza się od A do B. Odległość XY jest jako funkcja X.		x	x	x
	26.	A_{07}	P_4	Znaleźć funkcję kąta XYB w sytuacjj z 1 problemu.		x	x	x

1	2	3	4	5	6	7	8	9
IV. Problemy dotyczące związku między elementami czworokąta AXBY	27.	A_{08}	P_1	Jakie zespoły parametrów charakteryzują jednoznacznie figurę?	x	x	x	x
	28.	A_{08}	P_2	Jakie są między nimi związki?	x	x	x	x
	29.	A_{08}	P_{17}	Jaką postać ma wzór opisujący figurę w układzie współrzędnych /ew. dwuczęściowy/ ?	x	x	x	x
	30.	A_{08}	P_{10}	Znaleźć związek między bokami i przekątnymi.	x	x	x	x
	31.	A_{08}	P_{11}	Jakie są związki między kątami w figurze?	x	x	x	x
	32.	A_{08}	P_{12}	Jak się wyrażają kąty w figurze za pomocą boków ?		x	x	x
	33.	A_{08}	P_3	Jak wyraża się pole w danym układzie parametrów ?	x	x	x	x
V. Problemy związane z wyznaczaniem położeń punktów X i Y tak, aby były spełnione pewne warunki	34.	A_{01}	P_7	Znaleźć położenia punktów takie, aby pola figur zakreskowanych /rys.2/ były równe.		x	x	X
	35.	A_{01}	P_2	Znaleźć położenie punktów X,Y, przy których pole $\triangle$OXY jest stałe		x	x	x
	36.	A_{05}	P_5	Znaleźć miejsce geometryczne /X,Y/ dla których $\sphericalangle$YBY jest prosty		x	x	x
	37.	A_{08}	P_{14}	Kiedy pole[4] osiąga wartości ekstremalne /przy stałym obwodzie/		x	x	x
	38.	A_{04}	P_7	Kiedy pole trójkąta YAX będzie a/ najmniejsze		x	x	x
	39.	A_{04}	P_8	b/ największe przy danym Y.		x	x	x

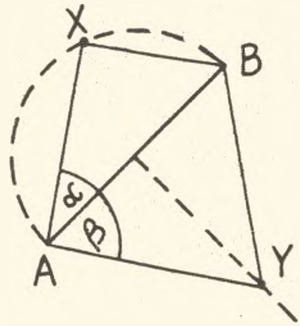
[4] Pole czworokąta AXBY

1	2	3	4	5	6	7	8	9
V. Problemy związane z wyznaczaniem położeń punktów X i Y tak, aby były spełnione pewne warunki	40.	A_{01}	P_8	Przy jakich położeniach punktów X,Y pole figur zakreskowanych jest największe /rys.2/		x	x	
	41.	A_{01}	P_4	Znaleźć zależność między położeniem X i Y w przypadku, gdy obwód czworokąta ma być stały		x	x	x
	42.	A_{01}	P_1	Znaleźć położenie punktów X i Y, przy których $XY = const = a > \frac{1}{2} AB$; przez położenie punktu X rozumiem kąt AOX, przez położenie punktu Y odległość OY. Znaleźć związki między $\sphericalangle AOX$ i OY.		x	x	x
	43.	A_{02}	P_4	Wiadomo, że półokrąg posiada długość $\frac{\pi AB}{2}$ /AB to odległość między punktami A,B/. Znaleźć konstrukcyjnie położenie punktu Y, dla którego $AY = \frac{\pi AB}{2}$ i $OY = \frac{\pi AB}{2}$			x	x
	44.	A_{04}	P_9	Kiedy w czworokąt XAYB można: a/ wpisać koło				x
	45.	A_{04}	P_{10}	b/ opisać koło				x
	46.	A_{01}	P_3	Znaleźć położenie punktów X,Y takie, aby w czworokąt AXBY dało się wpisać okrąg.			x	x
	47.	A_{08}	P_9	Kiedy figura AXBY da się wpisać w okrąg ?			x	x
	48.	A_{03}	P_1	Jakie warunki muszą spełniać punkty X,Y aby X,Y,A,B należały do pewnych figur geometrycznych /np.okrąg, równoległobok/ ?	x	x		x
	49.	A_{08}	P_4	Kiedy figura będzie deltoidem ?		x	x	x

1	2	3	4	5	6	7	8	9
V. Problemy związane z wyznaczaniem położeń punktów X i Y tak, aby były spełnione pewne warunki	50.	A_{08}	P_5	trapezem		x	x	x
	51.	A_{08}	P_6	równoległobokiem		x	x	x
	52.	A_{08}	P_7	prostokątem		x	x	x
	53.	A_{08}	P_8	kwadratem		x	x	x
	54.	A_{07}	P_3	W jakiej sytuacji punkty XAYB utworzą trapez równoramienny		x	x	x
	55.	A_{02}	P_1	Dla jakich położeń punktów X,Y punkty A,B,X,Y wyznaczą 2 trójkąty równoramienne		x		
	56.	A_{02}	P_2	Czy możliwe jest takie położenie punktów A,B,X,Y, aby leżały one na jednej prostej ?			x	
	57.	A_{02}	P_3	Dla jakiego położenia punktów X i Y prosta AB jest osią symetrii, przekształcającą punkt X na Y i odwrotnie		x	x	
	58.	A_{06}	P_2	Czy istnieje: a/ elipsa			x	x
	59	A_{06}	P_3	b/ hiperbola			x	x
	60.	A_{06}	P_4	c/ okrąg - do której należą wszystkie te[5] punkty			x	x
	61.	A_{04}	P_4	Czy kazdy punkt płaszczyzny należy do którejś z prostych XY ?			x	
VI. Problemy inne	62.	A_{08}	P_{15}	Niech X porusza się po półokręgu. Jak powinien poruszać się Y po symetralnej, aby pole pozostało niezmienione		x	x	x
	63.	A_{08}	P_{16}	Czy można przeprowadzić kwadraturę tej figury przy pomocy cyrkla i linijki ?		x	x	x

[5] Tzn. punkty A,X,B,Y

Powyższe wypowiedzi uczniów uzupełnione były rysunkami, w niektórych przypadkach stanowiącymi istotne dopełnienie formułowanych problemów. Np. do problemów 13, 14 i 23 uczeń robi rysunek ilustrujący wprowadzony przez siebie układ współrzędnych, co pozwoliło zaliczyć powyższe zagadnienie do sprecyzowanych. Do problemu 20 uczeń również sporządza rysunek /rys.3/, który wyjaśnia o jakie kąty α i β chodzi.



Rys.3

Rozważana w problemie 25 figura, to - jak wynika z rysunku ucznia - czworokąt AXBY. O niej też mowa w problemach 25-31. Problemy 32 i 40 są również ilustrowane przez ucznia rysunkiem, który objaśnia, o jakie figury chodzi.

Uwzględnienie informacji zawartej w rysunkach uczniów pozwoliło w powyższych przypadkach rozstrzygnąć, czy problemy są właściwie sprecyzowane.

Ilość problemów dostrzeżonych w każdej grupie przez poszczególnych uczniów ilustruje tab.1.

Tabela 1

Uczeń / Grupa probl.	A_{01}	A_{02}	A_{03}	A_{04}	A_{05}	A_{06}	A_{07}	A_{08}	Razem
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	2			2					4
II		3	2	3	5	1			14

c.d. tabeli 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
III			2			2	3	1	8
IV								7	7
V	6	4	1	5	1	3	1	7	28
VI								2	2
Razem	8	7	5	10	6	6	4	17	63

Natomiast ilość problemów otwartych, abstrakcyjnych, poprawnie sformułowanych i nietrywialnycn dla każdej z wyróżnionych grup oraz ogółem, podaje tab.2.

Tabela 2

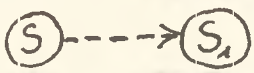
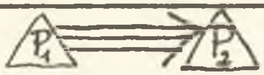
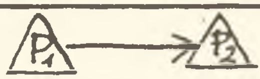
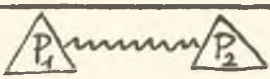
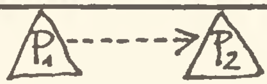
Grupa	Ilość probl.		Ilość probl.		Ilość probl.		Ilość probl.	
	(o.p.)	pozost.	(a.o.)	pozost.	(p.s.)	pozost.	(ntr.)	pozost.
I	4	-	4	-	3	1	4	-
II	-	14	11	3	14	-	11	3
III	-	8	8	-	5	3	8	-
IV	6	1	7	-	7	-	7	-
V	1	27	18	10	24	4	23	5
VI	-	2	2	-	2	-	2	-
Razem	11	52	50	13	55	8	55	8

3.3. METODA OPISU ODPOWIEDZI UZYSKANYCH W BADANIACH PRÓBNYCH

3.3.1. Aby uzyskać pełny obraz problemów dostrzeżonych i sformułowanych przez ucznia, nie wystarczy przeanalizowanie ich kolejno, ze względu na poszczególne kategorie wyróżnione poprzednio. Potrzebna jest możliwość globalnego spojrzenia na całość postawionych zagadnień, które umożliwi dostrzeżenie zarówno tego, co jest dla danego rozwiązania charakterystyczne, co je odróżnia od pozostałych, jak i tego, co jest wspólne dla całej grupy odpowiedzi.

W celu uzyskania takiej możliwości bezpośredniego oglądu wszystkich dostrzeżonych przez ucznia problemów wprowadzę pewien schemat umożliwiający reprezentację graficzną sformułowanych zagadnień. Przyjmę następujące znaki umowne co do znaczenia używanych w schemacie symboli /tab.3/

Tabela 3

Symbol	Znaczenie
	Sytuacja wyjściowa
	Postawienie problemu P_1 w sytuacji S
	Przejście z sytuacji S do sytuacji S_1
	Problem P_2 jest ogólniejszy niż P_1 /uogólnienie/
	Problem P_2 jest szczególnym przypadkiem problemu P_1 /specyfikacja/
	Problemy P_1 i P_2 są tego samego typu
	Problem P_2 sformułowano wychodząc od problemu P_1
	Problem P_1 dotyczy uzasadnienia sformułowanej hipotezy
	Problem P_1 dotyczy istnienia
	Jeżeli hipoteza sformułowana w P_1 jest fałszywa, to stawia się problem P_2

Dla zilustrowania wyników analizy każdego problemu w czterech omawianych poprzednio kategoriach, posłużę się następującą tabelą kartezjańską.

Tabela 4

	/o.p./	/a.o./	/p.s./	/ntr./
P_1	x			
P_2			x	x

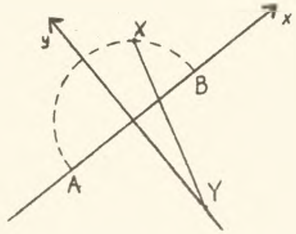
Każdy wiersz oznacza jeden z problemów dostrzeżonych i sformułowanych przez ucznia, natomiast cztery kolumny oznaczone: /o.p./, /a.o./, /p.s./ i /ntr./ oznaczają: otwartość problemu, abstrakcyjność obiektów, poprawność sformułowania i nietrywialność problemu. Znak "x" w danej kratce, wskazuje, że problem jest odpowiednio: otwarty, abstrakcyjny, sprecyzowany w sposób nie budzący zastrzeżeń i nietrywialny.

Objaśnię teraz określenia, które znajdują się w tabeli 3. Przez sytuację wyjściową S rozumiem układ danych zasugerowany sformułowaniem zadania. Przejście do innej sytuacji S_1 może nastąpić przez wyróżnienie pewnej konfiguracji danych lub przez ustalenie pewnych wielkości, bądź przez przejście do innej interpretacji danych, itp. Jest to zawsze wprowadzenie do danych zadania pewnych dodatkowych założeń. Np. uczeń A_{05} przechodzi z sytuacji wyjściowej S do sytuacji S_1, ustalając położenie punktu Y:

" Jeżeli punkt Y jest dany, leży na prostej OY, to znaleźć takie miejsce punktu X, dla którego ...".

W inny sposób postąpił uczeń A_{03}, który przeszedł do nowej sytuacji wprowadzając układ współrzędnych /rys.4/, formułując problem "Rzędna punktu Y = a, punkt X porusza się od A do B. Odległość XY jako funkcja X".

Rys.4



Problemy P_1 i P_2 są tego samego typu, gdy jeden z nich powstaje z drugiego przez zamianę pewnego warunku na analogiczny, bądź przez zamianę pewnych danych na analogiczne. Do problemów tego samego typu zaliczam np. poniższe zagadnienia sformułowane przez ucznia A_{08}, w odniesieniu do rozważanej przez niego figury wyznaczonej przez punkty A,X,B,Y:

"Znaleźć związek między bokami i przekątnymi".

"Jakie są związki między kątami w figurze? Jak się wyrażają kąty w figurze za pomocą boków?"

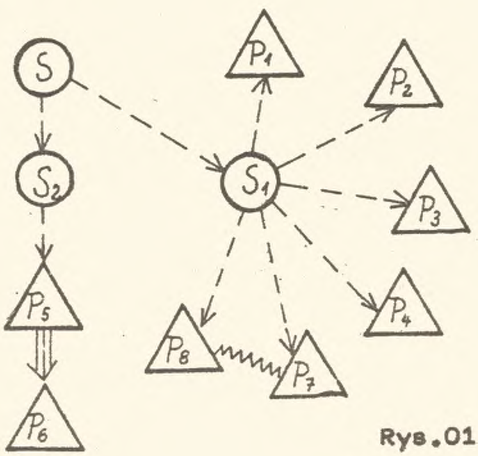
Problem P_2 sformułowano, wychodząc od problemu P_1, jeżeli P_2 pojawił się jako konsekwentne następstwo dostrzeżenia P_1, a nie można stwierdzić, czy P_2 jest szczególnym przypadkiem P_1, czy też P_2 jest ogólniejszy niż P_1.

Pozostałe określenie zawarte w tabeli 3 nie wymagają dodatkowych objaśnień.

4. Opis i analiza odpowiedzi poszczególnych uczniów

Tabela 01

	(o.p.)	(a.o.)	(p.s.)	(ntr.)
P_1		x	x	x
P_2		x	x	x
P_3			x	x
P_4		x	x	x
P_5	x	x		x
P_6	x	x	x	x
P_7		x	x	x
P_8		x	x	



Rys.01

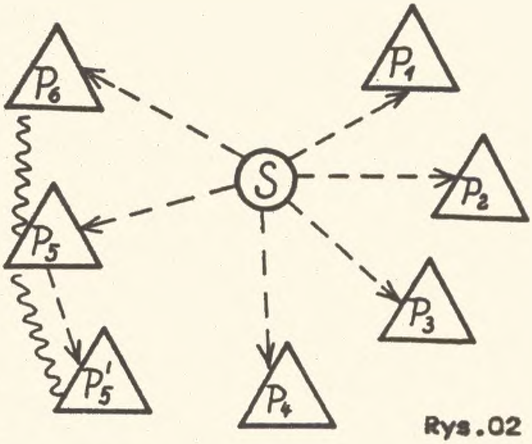
4.1. UCZEŃ A_{01} /Tab.01, Rys.01/.

1/ Prawie wszystkie sformułowane problemy są niebanalne i sprecyzowane w sposób nie budzący zastrzeżeń.

2/ Oprócz sytuacji wyjściowej S uczeń rozważa sytuację S_1 /wprowadzenie odwzorowanie/, oraz S_2 /określając co rozumie przez położenia punktów X i Y/.

Tabela 02

	(o.p.)	(a.p.)	(p.s.)	(ntr.)
P_1		x		
P_2			x	
P_3		x	x	
P_4			x	x
P_5			x	
P_5'			x	
P_6			x	



Rys.02

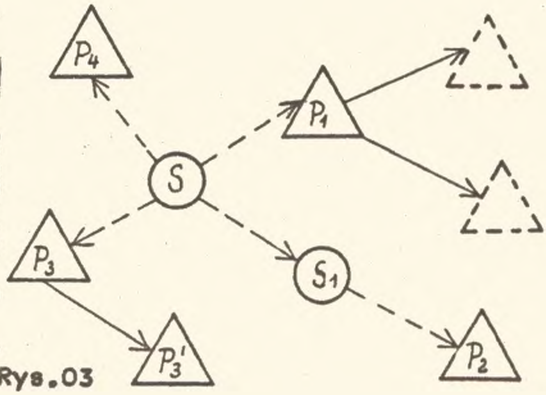
4.2. UCZEŃ A_{02} -/Tab.02. Rys.02/

1/ Wszystkie postawione problemy są banalne.

2/ W jednym przypadku /P_1/ sprecyzowanie budzi zastrzeżenia /sformułowanie nie pozwala się domyśleć, o jakie trójkąty chodzi/.

Tabela 03

	(o.p.)	(a.p.)	(p.s.)	(ntr.)
P_1	x	x		x
P_2		x	x	x
P_3		x	x	x
P_3'		x	x	x
P_4		x		x



Rys.03

4.3. UCZEŃ A_{03} - /tab.03. Rys.03/

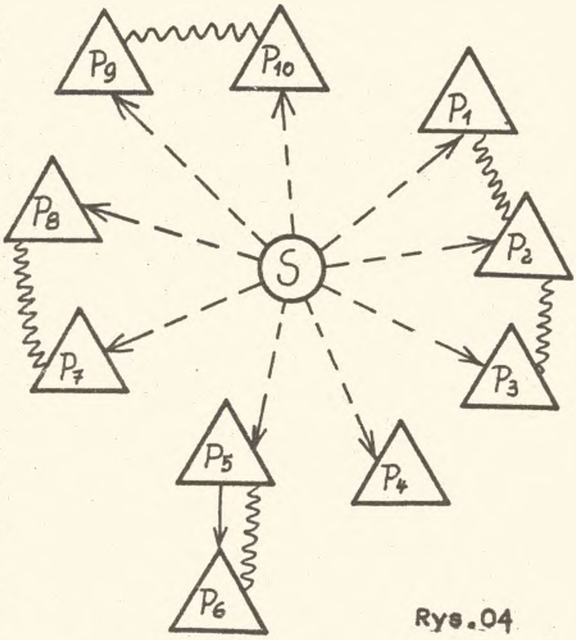
1/ Sformułowanie dwóch zagadnień /P_1 i P_4/ budzi zastrzeżenia, przy czym w przypadku P_1 jest to najprawdopodobniej usterka redakcyjna, natomiast w P_4 pewne niezrozumienie sytuacji.

2/ Wszystkie problemy są niebanalne.

3/ Uczeń rozważa tylko jedną różną od wyjściowej sytuację przez wprowadzenie układu współrzędnych.

Tabela 04

	(o.p.)	(a.o.)	(p.s.)	(ntr.)
P_1		x	x	x
P_2		x	x	x
P_3		x	x	x
P_4		x		
P_5	x	x	x	x
P_6	x	x	x	x
P_7		x	x	x
P_8		x	x	x
P_9				x
P_{10}				x



Rys.04

4.4. UCZEŃ A_{04} - /Tab.04. Rys.04/

1/ Sformułowania nie budzą zastrzeżeń /oprócz P_9 i P_{10}/.

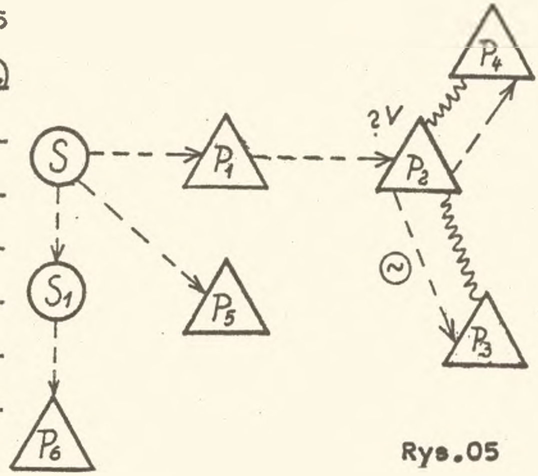
2/ Tylko zagadnienie P_4 i P_7 można uznać na tym poziomie /czwarta klasa liceum/, za banalne.

3/ Wszystkie zostły postawione w sytuacji wyjściowej S.

4/ Widać wyraźnie, że uczeń formułuje pewne grupy problemów tego samego typu.

Tabela 05

	(o.p.)	(a.o.)	(p.s.)	(ntr.)
P_1		x	x	x
P_2		x	x	x
P_3		x	x	x
P_4		x	x	x
P_5		x	x	x
P_6		x	x	x



Rys.05

4.5. UCZEŃ A_{05} -/Tab.05, Rys.05/

1/ Sprecyzowanie problemów P_1 i P_5 budzi zastrzeżenia /w P_1 nie jest określony sposób ruchu punktów, co jest istotne; a w P_5 nie wyjaśniono co to jest miejsce geometryczne par /X,Y/ punktów/.

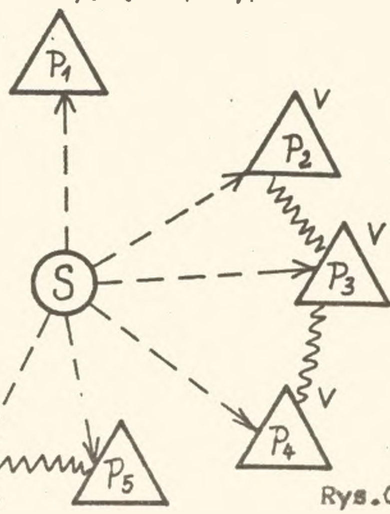
2/ Wszystkie zagadnienia są niebanalne.

3/ Postawienie problemu P_1 pobudza ucznia do sformułowania następnych /przedłużanie problemu/.

4/ Uczeń stawia pytania dotyczące istnienia oraz formułuje bądź pewne hipotetyczne problemy,bądź przypuszczalne rozwiązania /szkic rysunkowy/.

Tabela 06

	(o.p.)	(a.o.)	(p.s.)	(ntr.)
P_1		x	x	x
P_2			x	x
P_3			x	x
P_4			x	x
P_5		x		x
P_6		x	x	x



Rys.06

4.6. UCZEŃ A_{06} - Tab.06, Rys.06/

1/ Poza jednym przypadkiem /P_1/ sprecyzowanie problemów nie jest zadowalające, przy czym w P_5 i P_6 uczeń - najprawdopodobniej - nie uświadamia sobie istoty problemu.

2/ Wszystkie zagadnienia dostrzeżone przez ucznia są niebanalne.

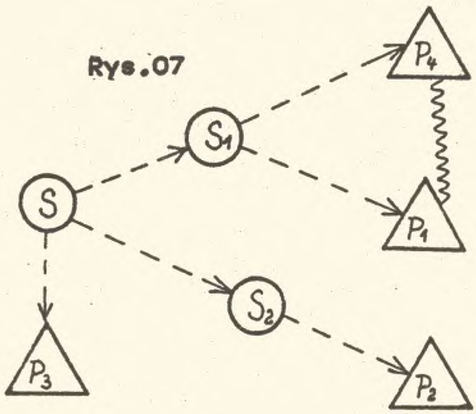
3/ Uczeń formułuje problemy dotyczące istnienia.

4/ Wszystkie zagadnienia uczeń stawia w sytuacji wyjściowej S.

Tabela 07

	(o.p.)	(a.o.)	(p.s.)	(ntr.)
P_1		x	x	x
P_2		x		x
P_3		x	x	x
P_4		x	x	x

Rys.07



1/ Wszystkie problemy są niebanalne.

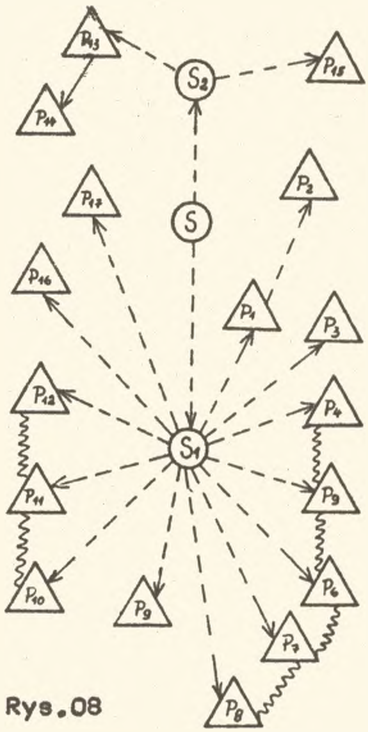
2/ Oprócz sytuacji S uczeń wyróżnia dwie inne S_1 i S_2, określając różne ruchy punktów.

Tabela 08

	(o.p.)	(a.o.)	(p.s.)	(ntr.)
P_1	x	x	x	x
P_2	x	x	x	x
P_3	x	x	x	x
P_4		x	x	x
P_5		x	x	x
P_6		x	x	x

c.d. Tabeli 08

	(o.p.)	(a.o.)	(p.s.)	(tr.)
P_7		x	x	x
P_8		x	x	x
P_9			x	x
P_{10}	x	x	x	x
P_{11}	x	x	x	x
P_{12}		x	x	x
P_{13}		x	x	x
P_{14}		x	x	x
P_{15}		x	x	x
P_{16}		x	x	x
P_{17}	x	x	x	x



Rys.08

4.8. UCZEŃ A_{08} - /Tab.08, Rys.08/

1/ Występują grupy problemów szczegółowych, tworząc pewne "klasy" problemów tego samego typu.

2/ Wszystkie dostrzeżone zagadnienia są niebanalne i sprecyzowane bez zastrzeżeń.

5. Wnioski uzyskane z analizy

5.1. 1^o Uczeń A_{02} wyraźnie odróżnia się od pozostałych - prawie wszystkie sformułowane przez niego problemy są trywialne.

2^o Pozostali uczniowie najczęściej dostrzegają problemy niebanalne.

3^o Na ogół formułowane zagadnienia szczegółowe tworzą pewne grupy, wiążąc ze sobą problemy tego samego typu.

4° Zagadnienie istnienia /np.figur, przekształceń, pól/ jest problemem tylko dla pewnych uczniów.

5° Najwięcej zastrzeżeń u niektórych uczniów budzi sprecyzowanie problemów. Wydaje się jednak, że brak ten wynika z tego, że nawet uczniowie bardzo zdolni rzadko mają okazję do precyzowania własnych problemów, a precyzji wypowiedzi trzeba się po prostu uczyć.

6° Uczniowie zdolni poza problemami, które ze względu na częstość ich występowania /problemy grupy V, tab.1/ moglibyśmy uznać za mniej oryginalne, potrafią dostrzegać i formułować zagadnienia bardziej oryginalne.

5.2. HIPOTEZA ROBOCZA

Matematyczne uzdolnienia uczniów przejawiają się między innymi w dostrzeganiu przez nich w sytuacji otwartej problemów niebanalnych, w których występują abstrakcyjne obiekty matematyczne, jak zbiory, relacje funkcje, odwzorowania. Zdolność dostrzegania tego rodzaju problemów w otwartych sytuacjach matematycznych można uważać za jedno z kryteriów matematycznych uzdolnień uczniów.

Literatura cytowana

[1] КРУТЕЦКИЙ В.А.: Психология математических способностей школьников. Москва "Просвещение" 1968.

[2] SAWYER W.W.: Prelude to Mathematics, /tłum.rosyjskie/. Москва "Просвещение" 1962.

[3] GUILFORD J.P.: La créativité. Recherches américaines présentées par Alain Beaudot.Bordas 1973. DUNOD.

Maciej Klakla

LA PERCEPTION DES PROBLÈMES
ET LES APTITUDES DES ÉLÈVES POUR LES MATHÉMATIQUES
(FRAGMENT DES RECHERCHES EN COURS)

Résumé

L'article contient un compte-rendu partiel de recherches plus vastes sur la reconnaissance d'aptitudes créatives en mathematiques chez des eleves ages de 15 a 18 ans

L'analyse de l'activité mathématique permet d'en déceler les divers composants: tels que: généralisation, spécification, le don d'apercevoir et les analogies ou les problèmes, raisonnement suivant une certaine convention, etc.

Les recherches ont pour but de:

a/ déterminer certains facteurs caractérisant l'activité mathématiques gue l'on pourrait formuler de manière convenant à notre évaluation et à nos observations futures.

b/ vérifier la présence de ces facteurs dans l'activité mathématique d'élèves considérés à l'école comme doués pour les mathématiques.

c/ formuler - d'après les facteurs distinques - des critères certains de l'aptitude mathématique chez les élèves.

On adopte comme point de départ de nos recherches le fait que les élèves considérés par leurs professeurs de mathématiques comme particulièrement doués dans ce domaine, - le sont en réalité - sauf peut- être quelques rares exceptions.

Les facteurs décelés au cours de la recherche doivent d'après l'intention de l'auteur, repondre aux conditions suivantes:

1^{0} se manifester effectivement de manière non banale dans le travail créatif en mathématiques.

2^{0} être suffisamment concrets pour permettre que, à partir d'eux, on formule des critères d'aptitude en mathématiques, applicables en pratique.

Dans le fragment de recherches présenté ici, on traite de la question de perception des problèmes dans une situation ouverte en mathématiques.

Au cours de l'analyse des résultats on a cherché à caractériser les propositions faites par les élèves, en premier lieu, selon les 4 catégories suivantes:

- l'ouverture des problèmes, - le degré d'abstraction des objets y représentés (naturellement, tenant compte du monde mathématique de l'élève), - le degré de précision du problème et sa trivialité. En résultat de cette analyse on a formulé l'hypothèse de travail suivante:

- L'aptitude mathématique des élèves se manifeste entre autres par la perception de problèmes non banals en situation ouverte, problèmes où apparaissant des objets mathématiques abstraits tels que : ensembles, relations, fonctions, aplications. Ce genre de capacité peut être considéré comme l'un des critères desl'aptitude mathématique de l'élève.

Traduit par JADWIGA DĄBROWSKA

Мацей Клякля

УМЕНИЕ ЗАМЕЧАТЬ ПРОБЛЕМЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СПОСОБНОСТИ У УЧЕНИКОВ /фрагмент исследований/

РЕЗЮМЕ

В статье находится фрагмент отчёта из более широких исследований в выявлении математических способностей творческого характера у учеников в возрасте от пятнадцати до восемнадцати лет

Анализируя математическую активность можно различить ряд разнообразных её факторов, как например: обобщение, спецификация, умение замечать аналогии и структуры, мышление по определённой конвенции или замечание проблем, итп.

Целью исследований являются:

а/ попытка выяснить некоторые характерные факторы математической активности, которые можно бы показать в форме доступной нашему наблюдению и оценке;

б/ попытка проверки проявления тех же факторов в математической активности учеников, признанных по мнению школы способными;

в/ попытка сформулировать - на основании выделенных факторов - некоторых критерии математических способностей у учеников.

В исследованиях принят принцип, что ученики, признанные своими учителями как особенно способные к математике, таки-ми истинно и являются, иногда с маленьким исключением.

Факторы, выделенные в работе, по замыслу автора должны исполнять два условия:

1/ Должны существенно выступать серьёзным образом в творческой математической работе.

2/ Должны являться настолько конкретными, чтобы опираясь на них можно было сформулировать критерии математических способностей, возможные для применения в практике.

В приведённом здесь фрагменте работы я обсуждаю часть вступительных исследований, касающихся одного из многих факторов творческой математической активности, а именно умение замечать проблемы в математической раскрытой ситуации. В анализе результатов исследований характеризовались предложения учеников прежде всего четырьмя критериями: раскрытие проблем, абстрактность объектов выступающих в них / конечно, учитывая математический мир ученика/, уточнение и серьёзность проблемы. В результате проведённого анализа была сформулирована следующая рабочая гипотеза: Математические способности учеников проявляются, между прочим в том, что ученики замечают в раскрытой ситуации серьёзные проблемы, в которых выступают абстрактные математические объекты как: множества, функции, соотношения, отображения. Способность замечать того рода проблемы в раскрытых математических ситуациях можно считать одним из критериев математических способностей у ученика.

Перевёл ЭДВАРД ШЕНДЗЕЛЁЖ