Adam Łomnicki

KILKA UWAG O PRZYCZYNACH TRUDNOŚCI STUDENTÓW MATEMATYKI PRZY OPANOWYWANIU ALGEBRY WYŻSZEJ

(Komunikat)

1. Uwagi wstępne

W ciągu kilkunastu, czy nawet kilku ostatnich lat w programach nauczania matematyki WSP i na kierunku nauczycielskim matematyki w uniwersytetach nastąpiło znaczne wzbogacenie treści programu algebry wyższej. Algebra stała się obok analizy matematycznej najobszerniejszym i najważniejszym przedmiotem kształcenia nauczyciela matematyki. Włączone zostały do programu algebry elementy geometrii analitycznej i arytmetyki teoretycznej, które - wprawdzie w innej koncepcji - jeszcze niedawno były osobnymi przedmiotami nauczania przyszłych pedagogów. Przenikanie pojęć i metod algebry do innych dyscyplin matematyki jak i poszerzenie kursu algebry o nowe treści, z równoczesną zmianą jej ujęcia, rodzą problemy dydaktyczne, zwłaszcza w pracy ze studentami przeciętnymi. Obserwuje się dość powszechnie, że przedmiot ten stał się dla studentów jednym z najtrudniejszych. Opinia ta wynika zarówno z obserwacji przebiegu ćwiczeń z algebry jak i wyników egzaminów z tego przedmiotu, w porównaniu z przebiegiem zajęć i uzyskiwanymi wynikami na ćwiczeniach i egzaminach z innych przedmiotów matematycznych. Powstaje więc problem bliższego zbadania źródeł trudności w nauczaniu i przyswojeniu przez studentów treści i metod algebry. Wyjaśnienie tych źródeł, choćby częściowe, miałoby duże znaczenie praktyczne, bo pozwoliłoby - być może - ulepszyć dydaktykę nauczania algebry.

Artykuł stanowi komunikat z szerszych badań, poświęconych analizie rodzaju i źródeł trudności, jakie mają studenci w opanowywaniu algebry, związanych z charakterem przedmiotu i celami jego nauczania. Wykorzystuję materiały zbierane w toku prowadzenia przez kilka lat ćwiczeń z algebry, w toku wymiany doświadczeń z pracownikami mającymi zajęcia w równoległych grupach, w dyskusji z wykładowcami i egzaminatorami. Hospitowałem też dużo wykładów z algebry, prowadzonych przez różnych pracowników i na ćwiczeniach obserwowałem wykorzystanie przez studentów tych wykładów. Niniejszy komunikat traktuję jako motywację konieczności prowadzenia badań nad dydaktyką algebry abstrakcyjnej, które podjąłem.

2. Uwagi na temat struktury i celów nauczania algebry wyższej w procesie kształcenia nauczycieli

Jest truizmem, że matematyka jest przedmiotem abstrakcyjnym. Współczesna algebra - w postaci ukierunkowanej obecnym programem - jest tu doskonałym wzorem. Systematyzuje ona gromadzone w ciągu wieków osiągnięcia matematyków w postaci teorii aksjomatycznych grup, pierścieni, przestrzeni wektorowych, krat itp.; reprezentuje szczególny typ abstrakcyjności. Ogólne struktury algebry mogą być jednak upoglądowione w ich bardzo różnorodnych modelach elementarnych, utożsamianych /poprzez izoformizm/ na podstawie tych samych własności algebraicznych. Bardzo ogólne twierdzenia algebry są jednak zazwyczaj mało intuicyjne, a rozumienie dowodów i ich przeprowadzanie wymagają umiejętności formalnego zupełnie rozumowania. Nie pomaga tu, na ogół, intuicja geometryczna, której rola - na przykład - w rozumieniu i opanowaniu elementów analizy matematycznej jest ogólnie uznawana /np. w teorii funkcji jednej zmiennej pojęcia: granicy,pochodnej, ekstremum itp.; twierdzenia wiążące "znak" pochodnej z monotonicznością funkcji, twierdzenie Rolle'a i Lagrange'a itp./

Studium algebry ma na celu wprowadzić przyszłych nauczycieli w strukturalny charakter współczesnej matematyki. W ramach teorii algebraicznej mają studenci nie tylko usystematyzować i pogłębić swoje wiadomości ze szkoły średniej, np. z arytmetyki i geometrii, ale dojrzeć w nich bardzo proste konkretyzacje ogólnych struktur. Tylko wtedy proces matematyzacji i lokalnej aksjomatyzacji na niższym poziomie będą poprawnie rozumieć. Bez swobodnego operowania algebraicznymi strukturami, trudno im byłoby ukazywać uczniom to, co jest istotne w naiwnie jeszcze ujmowanych modelach tych struktur. Zajęcia z algebry mogą i powinny przy tym rozwijać - może silniej niż zajęcia z innych przedmiotów matematycznych, gdyż dają taką możliwość ze względu na opisaną ogólność i formalność prowadzenia rozumować - umiejętność czytania i konstruowania tekstu matematycznego i metod formalnego dowodzenia.

3. Rodzaje trudności

Takie rozumienie algebry, jako teorii szczególnie abstrakcyjnej, o znacznej ilości nieintuicyjnych twierdzeń i dowodów, oraz cele nauczania tego przedmiotu, rzucają światło na rodzaje trudności, jakie może napotkać przeciętny student w uczeniu się tego przedmiotu.
Trudności te, przede wszystkim dotyczą następujących elementów matematycznej aktywności:

a/ Rozumienia i zapamiętania bardzo abstrakcyjnych i licznych pojęć.

b/ Rozumienia i zapamiętania nieintuicyjnych twierdzeń i dowodów.

c/ Swobodnego operowania wieloma modelami rozważanych struktur; wyszukiwania, rozpoznawania i konstruowania takich modeli.

d/ Odkrywania twierdzeń i przeprowadzania dowodów.

e/ Dostrzegania struktur algebraicznych w sytuacjach nowych /np. w analizie/.

f/ Dostrzegania związków między poszczególnymi działami algebry.

g/ Dostrzegania związków między algebrą wyższą, a matematyką nauczaną w szkołach niższych szczebli.

4. Przyczyny trudności

Główne źródła tych trudności można, na podstawie wstępnych obserwacji, podzielić na trzy grupy.

4.1. ŹRÓDŁA TKWIĄCE W STRUKTURZE ALGEBRY

a/ Abstrakcyjność pojęć.

b/ Nieintuicyjność twierdzeń i dowodów.

c/ Duża ilość i nagromadzenie w czasie pojęć.
Fakt ten mogłoby potwierdzić obliczenie średniej ilości definicji przypadających na jedną godzinę wykładu na kilku przedmiotach matematycznych /badania w toku/.

d/ W związku z tym ogromna ilość terminów, często o bliskim znaczeniu /np. różne morfizmy/.

e/ W porównaniu z innymi przedmiotami "krótkie życie" poszczególnych pojęć, co wiąże się z poprzednio wymienioną cechą wykładu algebry. Bezpośrednio po wprowadzeniu nowego pojęcia mamy bowiem niewiele czasu na jego przyswojenie przez stosowanie. I tak np. o ideałach mówi się tylko przez kilka godzin, podobnie o dzielnikach normalnych, kratach, algebrze Boole'a, filtrach itp. Umysł ludzki w ogóle i umysł przeciętnego studenta w szczególności, wymaga czasu na "ułeżenie się" nowego pojęcia. Między innymi jest to warunkiem możliwości odwoływania się do tych pojęć w innych działach matematyki.

4.2. SŁABE PRZYGOTOWANIE ABSOLWENTÓW LICEÓW W ZAKRESIE PROGRAMÓW SZKOŁY ŚREDNIEJ DO STUDIOWANIA MATEMATYKI /istotnie wpływające na wyniki nauczania algebry, ze względu na jej charakter/. Oto skutki:

a/ znikoma znajomość modeli poszczególnych struktur, modeli, opracowanych w ramach matematyki elementarnej bez uwzględnienia ich bardzo istotnego znaczenia dla myślenia strukturalnego,

b/ nieumiejętność rozpoznawania i konstruowania modeli potrzebnych do konkretyzacji rozważanych struktur,

c/ nieumiejętność przeprowadzania algorytmicznych obliczeń /np. prostych rachunków/,

d/ nieumiejętność przeprowadzania prostych - nie wymagających szczególnej pomysłowości, ale formalnych - rozumowań,

e/ słaba umiejętność czytania, interpretowania i konstruowania tekstu matematycznego o formalnym charakterze. Właśnie tam, gdzie brak jest silnego podłoża intuicyjnego, problemy logicznej struktury tekstu twierdzenia, definicji, dowodu odgrywają ogromną rolę /kwantyfikatory, negacje zdań, itp./.

4.3. ŹRÓDŁA TKWIĄCE W PROCESIE DYDAKTYCZNYM. Są one szczególnie istotne w przypadku nauczania przedmiotu o takim charakterze, jak algebra abstrakcyjna.

4.3.1. Brak pomocy naukowych

a/ Nie ma podręcznika algebry, w którym zawarty byłby cały materiał, określony programem. Studentom I roku zaleca się podręcznik A. Białynickiego-Biruli "Algebra liniowa z geometrią, który daje możliwość poszerzania w grupach zdolniejszych słuchaczy obowiązującego materiału. Studenta II i III roku często nie można odesłać do literatury, ponieważ brak jest dostatecznej ilości /nawet w czytelniach/ podręczników, takich, jak np.:

A.G. Kurosza "Algebra ogólna",

A. Mostowskiego "Algebra wyższa", cz.III,

T.Traczyka "Wstęp do teorii algebr Boole'a",

J.Browkina "Wybrane zagadnienia algebry".

b/ Brak zbiorów zadań

Dostępny zbiór J.Łosia i L.Jeśmanowicza "Zbiór zadań z algebry" nie odpowiada obecnemu programowi. Z konieczności prowadzący ćwiczenia muszą korzystać z zadań umieszczonych w różnych podręcznikach - dostosowywać je do aktualnie omawianych problemów, czasem przez modyfikację treści, prawie zawsze zmieniając sformułowanie, dostosowując do przyjętej na wykładzie symboliki. Należy sobie zdać sprawę i z tego, że zadania przygotowywane - na ogół - osobno przez każdego z prowadzących ćwiczenia nie są na tak wysokim poziomie /ze względu na wartości dydaktyczne, a nie trudności merytoryczne/, jaki zapewniłaby grupa pracowników, zajmująca się specjalnie tym zagadnieniem.

4.3.2. Niewłaściwa dydaktyka

a/ Niewłaściwe - gdy chodzi o prowadzenie ćwiczeń - jest to, że:

- Zadania są dyktowane na ćwiczeniach lub wywieszane na tablicach ogłoszeń - studenci tracą czas na notowanie tematów. Nie wykorzystuje się specjalnie opracowanych i powielonych zestawów problemów, bo takich zestawów nie ma.
- Na ćwiczeniach realizowane są wszystkie lub prawie wszystkie hasła programu. Lepiej byłoby pewne partie materiału zlecić studentowi do samodzielnego opanowania ze

specjalnie opracowanych materiałów, a wolny czas na ćwiczeniach poświęcić na spokojne, głębsze przyglądnięcie się, innym zagadnieniom. Mniej cieszyć się, że student sprawnie rozwiązuje problem przy tablicy i możemy szybko przejść do nowego materiału, zaś więcej czasu poświęcić na samodzielną pracę studenta.

- Nie wykorzystuje się innych ćwiczeń, np. z logiki matematycznej do kształcenia potrzebnych na algebrze sprawności. Nie obserwuje się przenikania treści i używania terminologii i pojęć algebry na zajęciach z innych przedmiotów matematycznych. Brak korelacji i integracji w całym matematycznym kształceniu.
- Za mało dba się o łączenie jednych partii algebry z innymi. Należy uczyć dostrzegania analogii między pojęciami i twierdzeniami, występującymi w różnych działach algebry, w szczególności poprzez właściwy dobór zadań. Niech to "wiązanie" materiału zilustruje przykład: można pojęcie liniowej niezależności wektorów wiązać nie tylko z pojęciami generowania, bazy i wymiaru, ale i z rozwiązywaniem układów równań, z intuicjami geometrycznymi, wyniesionymi ze szkoły średniej, z elementami kombinatoryki /licząc na przykład ilość baz w przestrzeni Z_2^3 /, z pojęciami wyznacznika i rzędu macierzy, z pojęciami sumy prostej i sumy kompleksowej podprzestrzeni itp.

b/ Niewłaściwe, gdy chodzi o wykład, moim zdaniem jest to, że:

- Student I roku opanowuje np. elementy struktur algebraicznych w zasadzie na podstawie tylko wykładu. Nie ma odpowiedniego podręcznika, zawierającego ten materiał. Wynika stąd konieczność takiego prowadzenia zajęć, by niemal wszystko, co będzie potrzebne do egzaminu, zostało wyłożone. By student mógł korzystać z wykładu, trzeba każde nowo wprowadzone pojęcie zilustrować przykładami /na "tak" i na "nie"/. Często trzeba to robić na wykładzie, by zagwarantować sobie możliwość wprowadzenia na tej samej godzinie nowych pojęć, które się ściśle wiążę z dopiero co wprowadzonymi. Nie można studenta odesłać do takiej pracy, w której pewne fragmenty byłyby drobiazgowo rozpisane, a więc z licznymi przykładami, uwagami, ilustracjami itp., bo takich prac nie ma.

- Studenta II i III roku nie można odesłać do literatury, ponieważ brak jest dostatecznej ilości /nawet w czytelniach/ odpowiednich podręczników. Trzeba większość materiału podawać na wykładzie, gdy być może cenniejsza byłaby dyskusja. Studenta III roku, rozwiniętego matematycznie, stać na przygotowanie się do wykładu konwersacyjnego. Na wykładach poprzedzonych samodzielną pracą studenta, można by było nawet dokładnie przeprowadzać całe dowody twierdzeń /np. wyświetlanych grafoskopem/ bez straty czasu, który obecnie poświęca student na notowanie w zeszycie. Student za dużo czasu traci na wykładzie na notowanie, za mało myśli.

5. Przykłady ilustrujące pewne źródła trudności

Liczne badania przekonały nas, że wielu absolwentów szkoły średniej w niskim stopniu opanowuje program matematyki elementarnej. Brak wiadomości, którego skutkiem jest znikoma znajomość modeli poszczególnych struktur, nieumiejętność rozpoznawania i konstruowania takich modeli, zobrazują następujące przykłady z praktyki ćwiczeń.

Pierwsze ćwiczenia poświęcone były przyswojeniu pojęcia działania wewnętrznego. Studenci nie umieli rozstrzygnąć,czy składanie jest działaniem odpowiednio w zbiorach: translacji płaszczyzny, jednokładności płaszczyzny, symetrii osiowych płaszczyzny itp. Po wskazaniu im braku tych elementarnych wiadomości z geometrii na następnych ćwiczeniach przeprowadzono sprawdzian, w którym jednym z zadań było: Odpowiedzieć "tak" lub "nie", czy składanie jest działaniem w zbiorze:

a/ symetrii osiowych płaszczyzny π ....
b/ symetrii środkowych płaszczyzny π ....
c/ jednokładności płaszczyzny π ....
d/ translacji płaszczyzny π ....

Procentowe wyniki, jakie uzyskali studenci 22 osobowej grupy przedstawia tabela:

Zadanie	Poprawna odpowiedź	Błędna odpowiedź	Brak odpowiedzi
a	85	10	5
b	50	45	5
c	45	45	10
d	90	5	5

Zwróćmy uwagę na znaczną ilość złych odpowiedzi w zadaniu "c". Przyczyna leży w tym, że studenci powtarzając materiał dotyczący przekształceń płaszczyzny nie zapamiętali, że złożenie jednokładności jest jednokładnością tylko w tym przypadku, gdy mają one wspólny środek. Typowe jest dla studenta opuszczanie założeń, co wykazują i inne badania. Na kolejnych ćwiczeniach przypomniano definicję izometrii własnej figury i badano, czy składanie jest działaniem w zbiorze izometrii własnych trójkąta równobocznego. Wielkie kłopoty mieli studenci z wypełnianiem tabelki składania w tym skończonym zbiorze. Nie pamiętali, co jest złożeniem 2 symetrii osiowych o osiach przecinających się, a gdy już przypomnieli sobie, że obrót, nie wiedzieli o jaki kąt i jak ten kąt znaleźć. Najbliższy po tych zajęciach sprawdzian zawierał między innymi zadanie:

"Udowodnić, że zbiór izometrii własnych prostokąta, nie będącego kwadratem, ze składaniem tworzy grupę".

Studenci uzyskali następujące /procentowo/ wyniki:

Poprawna odpowiedź	Błędna odpowiedź	Brak odpowiedzi
50	40	10

Wśród nielicznych "dobrych" odpowiedzi żadna nie zawierała dowodu, że rozważane przekształcenia wyczerpują cały zbiór izometrii własnych prostokąta, nie będącego kwadratem. W dyskusji studenci uznali, że to było widoczne, jednak na propozycję uzasadnienia, nie wiedzieli, jak rozpocząć dowód. Studenci znali formalne definicje działania i grupy. Braki w wiadomościach elementarnych utrudniły im w dużym stopniu konkretyzację tego pojęcia przez stosowanie definicji w sytuacjach właśnie elementarnych. Ćwiczenia w stosowaniu definicji zamieniają się w istocie rzeczy w borykanie się studentów z elementarnymi własnościami prostych modeli tych pojęć.

Brak umiejętności przeprowadzania algorytmicznych obliczeń zilustrują poniższe zadania.

Zadanie 1. "Zbadać, czy jest łączne działanie $\square$, określone w zbiorze R następująco: $x \square y = x + 1 + y$."

Studenci potrafią przypomnieć definicję łączności działania, ale nie umieją zastosować definicji do tego działania. Polecenie: oblicz $3 \square 5$, $5 \square z$, $3 \square x$, $x \square /y-1/$ pomaga im oderwać się od symboli "x" i "y", występujących w definicji i zrozumieć algorytm obliczania $x \square y$. To jednak nie powinno być żadnym problemem dla absolwenta szkoły średniej, który podobnie musiał rozumować przy obliczaniu np. funkcji złożonej z 2 danych funkcji. Dodatkowej ilustracji dostarcza zadanie 2.

"Czy:

a/ działanie $*$ jest rozdzielne względem działania $\oplus$?

b/ działanie $\oplus$ jest rozdzielne względem działania $*$?

c/ działanie $\oplus$ jest łączne?,

gdy działania te określone są następująco:

$$* : R \times R \ni /x,y/ \longmapsto x,y \in R$$

$$\oplus : R \times R \ni /x,y/ \longmapsto 1 \in R."$$

Procentowe wyniki, uzyskane w 22 osobowej grupie, przedstawia tabela:

Zadanie	Poprawna odpowiedź	Błędna odpowiedź	Brak odpowiedzi
a	40	55	5
b	40	45	15
c	70	25	5

Brak umiejętności przeprowadzania dowodów nie wymagających zastosowania szczególnego pomysłu jest spowodowany znikomą znajomością u absolwentów szkół średnich metod przeprowadzania rozumowań. Dla ilustracji posłużę się następującym zadaniem: "Wykazać, że jeżeli działanie $*$ określone w zbiorze A jest łączne i przemienne, to jest spełniony warunek:

$$\bigwedge_{a,b,c,d \in A} /a*b/*/c*d/ = /a*c/*/b*d/."$$

Wyniki procentowe, jakie uzyskali studenci 22 osobowej grupy, przedstawia tabela:

Poprawna odpowiedź	Błędna odpowiedź	Brak odpowiedzi
10	40	50

Podobnie słabe wyniki uzyskali studenci tej samej grupy, rozwiązując zadanie 3:

"Udowodnić, że dla działania

$$* : R \times R \ni /x,y/ \longmapsto y \in R$$

nie istnieje w R element pochłaniający."

Oto procentowe wyniki:

Poprawna odpowiedź	Błędna odpowiedź	Brak odpowiedzi
40	45	15

Wielkie trudności sprawia studentom I roku ocena wartości logicznej zdań z kilkoma kwantyfikatorami. Nagminnie uznają, że zwroty "dla każdego istnieje" i "istnieje dla każdego" są równoznaczne. Wynikają stąd kłopoty z odpowiedzią czy dane działanie posiada element neutralny/np. "średnia arytmetyczna"/.

Studenci nie rozumieją, co to znaczy, że własność W jest spełniona dla każdego x ze zbioru A, nie rozumieją więc nawet zwrotu "dla każdego". Dla potwierdzenia tej tezy przeprowadziłem następujące postępowanie:

- Na ćwiczeniach studenci sprawdzali, czy dane struktury są pierścieniami, szukali w zbiorze poznanych w szkole struktur pierścieni.
- Przypomnieli definicję podpierścienia.
- W wymienionych na ćwiczeniach przykładach pierścieni wskazywali studenci pary: pierścień i podpierścień tego pierścienia. Nie przypomniano znanych warunków równoważnych z tym, by podzbiór elementów pierścienia był podpierścieniem.
- Najbliższy sprawdzian zawierał zadanie:

"Wykazać, że $\left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : a,b \in R \right\}$

jest podpierścieniem pierścienia $/M^2/R/, +, ./$."

Tylko cztery osoby na 22 piszące rozwiązały w pełni poprawnie to zadanie, 13 osób zapomniało o konieczności sprawdzenia wewnętrzności działań "+" i "." w danym zbiorze, sprawdzało natomiast - z definicji - warunki łączności "+", rozdzielności "." względem "+", zamiast stwierdzić /!/, że skoro "+" jest działaniem łącznym w $M^2/R/$, to restrykcja "+" do dowolnego, niepustego podzbioru $M^2/R/$ też jest w tym zbiorze działaniem łącznym.

6. Uwagi końcowe

Badania w zakresie dydaktyki algebry wyższej są zarówno trudne, jak i bardzo potrzebne, z powodu braku tradycji w nauczaniu algebry tak szeroko rozbudowanej. W komunikacie przedstawiłem w istocie rzeczy tylko motywację konieczności prowadzenia tych badań, które podjąłem i które powinny objąć zarówno analizę teoretyczną samego przedmiotu z punktu widzenia jego studiowania, jak i empiryczne badanie rzeczywiście występujących w procesie uczenia się tego przedmiotu, przez przeciętnych studentów, trudności. Kształcąc kadry nauczycieli musimy liczyć się z tym, że rekrutacja na studia nauczycielskie nie dostarczy tylko bardzo zdolnych kandydatów do tego zawodu. Dydaktyka matematyki w szkole wyższej na tych kierunkach musi uwzględniać tę sytuację. Studium algebry w nowoczesnym ujęciu traktować należy jako nieodzowny element wprowadzenia nauczyciela w współczesną matematykę struktur. Aby wypracować odpowiednią dydaktykę, której celem jest nie tylko wyposażenie nauczyciela w pewien zakres wiedzy, ale - może przede wszystkim - w rozumienie metody, trzeba znać trudności przeciętnego studenta i dotrzeć do ich przyczyn.

Adam Łomnicki

QUELQUES REMARQUES AU SUJET DES CAUSES DE DIFFICULTÉS QU'ÉPROUVENT LES ÉTUDIANTS DE MATHÉMATIQUES À MAÎTRISER L'ALGÈBRE SUPÉRIEURE

Résumé

L'article communique une partie des résultétas d'une recherche plus vaste concernant les difficultés des étudiants à maitriser l'algèbre supérieure, difficultés liées à la nature du sujet et aux finalites de son enseignement

Avant souligné le rôle croissant de l'enseignement de l'algèbre su-périeure en tant qu'élément indispensable à la préparation de l'enseignant à l'étude des mathématiques modernes, on a formulé certaines remarques au sujet de la structure et des buts de l'enseignement de cette matière. On a ensuite énuméré 7 groupes de difficultés éprouvées par les étudiants et indiqué leurs sources en les divisant en trois types: - difficultés résultant de la structure de l'algebre elle-même; - celles résultant du processus d'enseignement (inefficacité didactique, manque d'auxiliaires techniques); - enfin, la préparation insufisante des bacheliers à l'étude des mathématiques.

La partie suivante du communiqué contient des exemples illustrant certaines des sources de difficultés.

En conclusion, on indique le sens où se poursuivent les recherches et leur valeur dans l'élaboration d'une didactique adéquate de l'algèbre supérieure.

Traduit par JADWIGA DĄBROWSKA

Адам Ломницки

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О ПРИЧИНАХ ТРУДНОСТЕЙ У СТУДЕНТОВ МАТЕМАТИКИ ПРИ ОВЛАДЕНИИ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРОЙ /фрагмент исследований/

РЕЗЮМЕ

Статья является сообщением о более широких исследованиях, посвящённых анализу рода и источников трудностей, какие возникают у студентов изучающих алгебру, связанных с характером предмета и целью обучения ему

Во вступлении подчёркивается растущая роль обучения высшей алгебре, как необходимого элемента введения учителя в современную математику. Сформулировались некоторые замечания по теме структуры и целей обучения этому предмету. Выделились семь групп трудностей, какие возникают у студентов, затем указывалось на источники этих трудностей, разделяя источники существующие в структуре алгебры, в дидактическом процессе /отсутствие научных пособий, неправильная дидактика/ и в недостаточном подготовлении выпусников средних школ к изучению математики. В следующей части сообщения некоторые источники трудностей поясняются примерами. Конечные замечания являются информцией, как вести следующие исследования, ценность которых для обработки соответствующей дидактики высшей алгебры должна быть изображением обсуждаемой статьи.

Перевёл ЭДВАРД ШЕНДЗЕЛЁЖ