MARIA KANIA-SIUDA

Sur la commutativité de la solution de l'équation de translation

I. J. Gancarzewicz a donné dans la note [2] la définition de l'objet algébrique commutatif. D'après cette définition nous allons donner la définition de la solution commutative de l'équation de translation. Dans la note [2] on peut trouver les certains théorèmes des isomorphismes des objets algébriques commutatifs sur le groupoide. Dans ce travail on a donné les certains théorèmes au sujet des solution commutatives de l'équation de translation et aussi les conditions équivalentes à la commutativité de la solution de cette équation sur les certains systèmes algébriques.

Acceptons la définition suivante:

On appelle le couple $(A, \cdot)$ le système si "$\cdot$" est opération définie dans l'ensemble A, c'est-à-dire une fonction définie sur un sous-ensemble de l'ensemble $A \times A$ et de valeur dans l'ensemble A.

L'opération "$\cdot$" est dite pleine si son domaine est l'ensemble $A \times A$ tout entier. Dans ce cas-là on dit que le couple $(A, \cdot)$ forme une structure. Ensuite si dans notre travail nous allons écrire $F(\alpha, x) = \beta$ il faut comprendre que $F(\alpha, x)$ a le sens et qu'il est égale à β. En écrivant analogiquement $a \cdot b = c$ on accepte évidemment que $a \cdot b$ a le sens et il est égale à c. Déterminons par $(A \times B, C)$ la famille de toutes les fonctions des domaines qui se trouvent dans l'ensemble $A \times B$ et des valeurs dans l'ensemble C (voir [9]).

Les certains resultats de ce travail ont été annoncés dans la note [5].

II. On acceptera d'après la note [10] les définitions suivantes:

DÉFINITION 1. *Considerons un ensemble Γ arbitraire, un système $(A, \cdot)$ et une fonction F de $(\Gamma \times A, \Gamma)$ remplissante des conditions*:

1. $\bigwedge_{\alpha \in \Gamma} \bigwedge_{x, y \in A}$ *{Si $F(\alpha, x)$ a le sens et $y \cdot x$ a le sens, alors $F(F(\alpha, x), y)$ et $F(\alpha, y \cdot x)$ ont le sens et $F(F(\alpha, x), y) = F(\alpha, y \cdot x)$}.*

2. $\bigwedge_{\alpha \in \Gamma} \bigwedge_{x, e_x \in A}$ *{Si $F(\alpha, x)$ a le sens et $x \cdot e_x = x$, alors $F(\alpha, e_x) = \alpha$} Ainsi défini triple (Γ, A, F) on nome l'objet algébrique à gauche (court: l'objet).*

Si une fonction F de $(\Gamma \times A, \Gamma)$ remplit la condition 1 de la définition 1 nous parlons qu'elle est la solution de l'équation de translation sur A. Si la fonction F de $(\Gamma \times A, \Gamma)$ remplit les conditions 1 et 2 de la définition 1 on parle que la fonction F donne l'objet sur A. En parlant des fonctions F de $(\Gamma \times A, \Gamma)$ nous accepterons seulement tels ensembles Γ qui sont les fibres de l'objet (de la solution de l'équation de translation), c'est-à-dire qu'ils remplissent la condition:

$$(1) \qquad \bigwedge_{\alpha\in\Gamma} \bigvee_{x\in A} \{F(\alpha, x) \text{ a le sens}\} .$$

DÉFINITION 2. *Nous parlons que la fonction F de $(\Gamma\times A, \Gamma)$ remplit la condition d'indentité quand elle remplit les conditions*:

1. $\bigwedge_{\alpha\in\Gamma} \bigwedge_{x, e_x\in A}$ {*Si* $F(\alpha, x)$ *a le sens et* $x\cdot e_x = x$, *alors* $F(\alpha, e_x) = \alpha$}.
2. $\bigwedge_{\alpha\in\Gamma} \bigwedge_{x, \delta_x\in A}$ {*Si* $F(\alpha, x)$ *a le sens et* $\delta_x\cdot x = x$, *alors* $F(\alpha, \delta_x) = \alpha$}.

Remarquons que si $(A, \bullet)$ est le groupoide d'Ehresmann alors une fonction F de $(\Gamma\times A, \Gamma)$ remplit la condition d'indentité si et seulement si elle remplit la condition 2 de la définition 1, puisque dans ce cas-là les ensembles des unions gauche et droites sont identiques.

Acceptons d'après [2] la suivante:

DÉFINITION 3. *La fonction F de $(\Gamma\times A, \Gamma)$ est nommée commutative quand elle remplit la condition*:

$$\bigwedge_{\alpha\in\Gamma} \bigwedge_{x, y\in A} \{\textit{Si } F(F(\alpha, x), y) \textit{ a le sens, alors } F(F(\alpha, y), x) \textit{ a le sens et } F(F(\alpha, x), y) = F(F(\alpha, y), x)\} .$$

Acceptions d'après [9] les définitions suivantes:

DÉFINITION 4. *L'ensemble de toutes les fonctions F de $(\Gamma\times A, \Gamma)$ qui sont les solutions de l'équation de translation est nommé la solution génèrale de cet équation.*

DÉFINITION 5. *On nommé les systèmes $(A_1, \bullet)$ et $(A_2, \bullet)$ isomorphes s'il existe la fonction univalente qui transforme A_1 sur A_2 et qui remplit la condition: $f(x)\cdot f(y)$ a le sens si et seulement si $x\cdot y$ a le sens et si $f(x)\cdot f(y)$ a le sens, alors $f(x)\cdot f(y) = f(x\cdot y)$.*

Prenons encore la définition suivante:

DÉFINITION 6. *Nous parlons qu'on peut transformer isomorphiquement le sytème $(A_1, \bullet)$ dans le système $(A_2, \bullet)$ s'il existe la fonction f univalente qui transforme A_1 dans A_2 et qui remplit la condition: $f(x)\cdot f(y)$ a le sens si et seulement si $x\cdot y$ a le sens et si $f(x)\cdot f(y)$ a le sens, alors $f(x)\cdot f(y) = f(x\cdot y)$.*

Rappelons le théorème qu'on démontre dans le travail [9].

THÉORÈME 1. *Si les systèmes $(A_1, \bullet)$ et $(A_2, \bullet)$ sont isomorphes, alors la fonction F_1 de $(\Gamma\times A_1, \Gamma)$ est la solution de l'équation de translation si et seulement si la fonction F_2 de $(\Gamma\times A_2, \Gamma)$ de la forme*:

$$F_2(\alpha, x') = F_1(\alpha, \varphi^{-1}(x'))$$

pour $x'\in A_2$, où φ est un isomorphisme (fixé) *du système $(A_1, \bullet)$ sur le système $(A_2, \bullet)$, est la solution de l'équation de translation.*

Le théorème analogique est vrai, si l'on peut transformer isomorphiquement le système $(A_1, \bullet)$ dans le système $(A_2, \bullet)$.

Acceptons d'après la note [6] la suivante:

Définition 7. *On nomme le système* $(H \cup \{0\}, \cdot)$ *le système avec zéro si H est le système,* $0 \notin H$ *et* $0 \cdot 0 = 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ *pour chaque x de H.*

Z. Moszner a donné dans la note [4] la solution générale de l'équation de translation quand $(A, \cdot)$ est le groupe. J. Tabor a donné cette solution dans la note [8] et dans le travail [9] dans ce cas si $(A, \cdot)$ est le groupoïde d'Ehresmann et la fonction F de $(\Gamma \times A, \Gamma)$ est définie sur l'ensemble $\Gamma \times A$ tout entier. A. Krupińska a donné cette solution dans le travail [3] si $(A, \cdot)$ est une categorie.

III. Remarquons que si $(A, \cdot)$ est structure commutative et la fonction F de $(\Gamma \times A, \Gamma)$ est la solution de l'équation de translation sur A et si elle remplit la condition:

$$\bigwedge_{\alpha \in \Gamma} \bigwedge_{x, y \in A} \{\text{Si } F(F(\alpha, x), y) \text{ a le sens, alors } F(F(\alpha, y), x) \text{ a le sens}\} .$$

alors la fonction F est commutative. La commutativitè du systeme n'est pas la condition nécessaire pour la commutativité de la fonction F. L'example suivant le montre:

Exemple 1.

Soit $\Gamma = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{s, r, p\}$ et $r \neq s$. Dans l'ensemble A on définit l'opération "$\cdot$" par la table:

$\cdot$	s	r	p
s	s	p	s
r	r	r	p
p	p	r	s

Nous définissons la fonction F de $(\Gamma \times A, \Gamma)$ de la maniere suivante:

$$\bigwedge_{(\alpha, x) \in \Gamma \times A} \{F(\alpha, x) := c\} .$$

On voit que la fonction F est la solution commutative de l'équation de translation, bien que $(A, \cdot)$ n'est pas la structure commutative.

Ils sont vrais les théorèmes suivants:

Théorème 3. *Si le système* $(A_1, \cdot)$ *se transforme isomorphiquement dans le système* $(A_2, \cdot)$, *alors la fonction* F_1 *de* $(\Gamma \times A_1, \Gamma)$ *est solution commutative de l'èquation de translation si et seulement si la fonction* F_2 *de* $(\Gamma \times A_2, \Gamma)$ *de la forme:*

$$F_2(\alpha, x') := F_1(\alpha, \varphi^{-1}(x'))$$

pour $x' \in A_2$, *où* φ *est isomorphisme (fixé) du système* $(A_1, \cdot)$ *dans le système* $(A_2, \cdot)$, *est la solution commutative de l'équation de translation.*

Théorème 4. *Si la fonction F de* $(\Gamma \times B, \Gamma)$, *où* $(B, \cdot)$ *est le groupoïde de Brandt, est la solution commutative de l'équation de translation sur B, alors la fonction F est définie sur l'ensemble* $\Gamma \times B$ *tout entier.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \Gamma$. Il existe alors $x_0 \in B$ tel que $F(\alpha, x_0)$ a le sens. Soit $x \in B$. Il existe $y \in B$ tel que $x \cdot y$ et $y \cdot x_0$ ont le sens car B est le groupoïde de

Brandt. On a alors: $F(\alpha, x_0)$ a le sens et $y \cdot x_0$ a le sens. Il en résulte que $F(F(\alpha, x_0), y)$ a le sens. Car F est la fonction commutative alors $F(F(\alpha, y), x_0)$ a le sens. Ainsi donc $F(\alpha, y)$ a le sens et $x \cdot y$ a le sens. Il résulte que $F(F(\alpha, y), x)$ a le sens et de la $F(F(\alpha, x), y)$ a le sens. Ainsi donc $F(\alpha, x)$ a le sens pour chaque $x \in B$ et $\alpha \in \Gamma$. La démonstration du théorème 4 est donc finie.

THÉORÈME 5. *Si la fonction F de $(\Gamma \times A \times A \times G, \Gamma)$, où $(A \times A \times G, \bullet)$ est le groupoïd de Brandt des triples, est la solution commutative de l'équation de translation, alors*

$$\bigwedge_{\alpha \in F(\Gamma, A \times A \times G)} \bigwedge_{\mu \in A} \{F(\alpha, (\mu, \mu, e)) = \alpha\},$$

où "e" est élèment neutre du groupe G.

DÉMONSTRATION. Soit F de $(\Gamma \times A \times A \times G, \Gamma)$ la solution commutative de l'équation de translation. En vertu du théorème 4 la fonction F est définie sur l'ensemble $\Gamma \times A \times A \times G$ tout entier. Soit $\alpha \in F(\Gamma, A \times A \times G)$. Il existe alors $(\mu_0, v_0, x_0) \in A \times A \times G$ et $\beta \in \Gamma$ tel que $F(\beta, (\mu_0, v_0, x_0)) = \alpha$. Soit $\mu_1 \in A$. En profitent les définitions 2 et 3 nous avons:

$$\begin{aligned} F(\alpha, (\mu_1, \mu_1, e)) &= F(F((\beta, (\mu_0, v_0, x_0)), (\mu_1, \mu_1, e)) = \\ &= F(F(F(\beta, (\mu_1, v_0, x_0)), (\mu_0, \mu_1, e)), (\mu_1, \mu_1, e)) = \\ &= F(F(F(\beta, (\mu_1, v_0, x_0)), (\mu_1, \mu_1, e)), (\mu_0, \mu_1, e)) = \\ &= F(F(\beta, (\mu_0, v_0, x_1)), (\mu_0, \mu_0, e)) = F(\beta, (\mu_0, v_0, x_1)) = \alpha . \end{aligned}$$

La démonstration du théorème 5 est finie.

Des théorèmes 3 et 5 on reçoit le suivant:

COLLORAIRE 1. Si la fonction F de $(\Gamma \times B, \Gamma)$, où $(B, \bullet)$ est groupoïde de Brandt, est la solution commutative de l'équation de translation sur B, alors:

$$\bigwedge_{\alpha \in F(\Gamma \times B)} \bigwedge_{e \in B_0} \{F(\alpha, e) = \alpha\},$$

où B_0 c'est l'ensemble des unités de $(B, \bullet)$.

IV. On démonstrera les théorèmes suivants:

THÉORÈME 6. *Soit $S = S_1 \times S_2$, où le système $(S_1, \bullet)$ remplit la condition*

$$\bigvee_{e \in S_1} \bigwedge_{a \in S_1} \bigvee_{a_1 \in S_1} \bigvee_{a_2 \in S_1} \{e \cdot e = e \text{ et } a = a_1 \cdot a_2 = a_1 \cdot e \cdot a_2\}, \tag{2}$$

et le système $(S_2, \bullet)$ remplit la condition:

$$\bigvee_{\bar{e} \in S_2} \bigwedge_{x \in S_2} \{x \cdot \bar{e} = \bar{e} \cdot x = x\}. \tag{3}$$

On définit dans l'ensemble S l'opération "$\bullet$" dans la manière suivant: Si $(a, x) \in S$ et $(b, y) \in S$, alors $(a, x) \cdot (b, y)$ a le sens si et seulement si $a \cdot b$ a le sens et $x \cdot y$ a le sens. Si $(a, x) \cdot (b, y)$ a le sens, alors

$$(a, x) \cdot (b, y) = (a \cdot b, x \cdot y).$$

La fonction F de $(\Gamma \times S, \Gamma)$, où Γ est un ensemble arbitraire, remplit la condition:

$$(4) \qquad \bigwedge_{(a,x)\in S} \{\textit{Si } F(\alpha,(a,x)) \textit{ a le sens, alors } F\big(F(F(\alpha,(a_2,\bar{e})),(e,x)),(a_1,\bar{e})\big) \textit{ a le sens}\},$$

où e, $\bar{e}$, a_1, a_2, sont défini par les condition (2) *et* (3). *Sous ces suppositions pour que la fonction F de $(\Gamma \times S, \Gamma)$ soit la solution commutative de l'équation de translation sur S il faut et il suffit qu'ils existent des fonctions F_1 de $(\Gamma \times S_1, \Gamma)$ et F_2 de $(\Gamma \times S_2, \Gamma)$ étant les solutions commutatives de l'équation de translation convenablement sur S_1 et S_2 telles que*:

$$(5a) \qquad \bigwedge_{\alpha\in\Gamma}\ \bigwedge_{(a,x)\in S} \{F_1(F_2(\alpha,x),a) \textit{ a le sens si et seulement si } F_2(F_1(\alpha,a),x) \textit{ a le sens}\},$$

$$(5b) \qquad \textit{si } F_1(F_2(\alpha,x),a) \textit{ a le sens, alors } F_1(F_2(\alpha,x),a) = F_2(F_1(\alpha,a),x).$$

$$(6a) \qquad \bigwedge_{\alpha\in\Gamma}\ \bigwedge_{(a,x)\in S} \{F(\alpha,(a,x)) \textit{ a le sens si et seulement si } F_1(F_2(a,x),a) \textit{ a le sens}\},$$

$$(6b) \qquad \textit{si } F(\alpha,(a,x)) \textit{ a le sens, alors } F(\alpha,(a,x)) = F_1(F_2(\alpha,x),a).$$

Démonstration de la nécessité de la condition. Supposons que la fonction F de $(\Gamma \times S, \Gamma)$ soit une solution commutative de l'équation de translation sur S. Remarquons qu'on peut transformer isomorphiquement les systèmes $(S_1, \cdot)$ et $(S_2, \cdot)$ dans le système $(S, \cdot)$. Ces isomorphismes donnet les fonctions φ, ψ définies de la manière suivante:

$$(7) \qquad \varphi(a) := (a, \bar{e}) \text{ où } a \in S_1 \text{ et } \bar{e} \in S_2 \text{ est défini par (3) et}$$

$$(8) \qquad \psi(x) := (e, x) \text{ où } x \in S_2 \text{ et } e \in S_1 \text{ est défini par (2)}.$$

La fonction F_1 de $(\Gamma \times S_1, \Gamma)$ définie de la manière suivante:

$$(9) \qquad F_1(\alpha, a) := F(\alpha, (a, \bar{e}))$$

pour $\alpha \in \Gamma$ et $a \in S_1$, est en vertu du théorème 3, la solution commutative de l'équation de translation sur S. Analogiquement la fonction F_2 de $(\Gamma \times S_2, \Gamma)$ est définie à la manière suivante:

$$(10) \qquad F_2(\alpha, x) := F(\alpha, (e, x)) \text{ pour } \alpha \in \Gamma \text{ et } x \in S_2.$$

Supposons que $F_1(F_2(\alpha, x), a)$ ait le sens. Alors en vertu des conditions (9) et (10) on reçoit que $F\big(F(\alpha,(a,\bar{e})),(e,x)\big)$ a le sens et $F\big(F(\alpha,(e,x)),(a,\bar{e})\big) = F_1(F_2(\alpha,x),a)$. Puisque la fonction F est commutative donc $F\big(F(\alpha,(a,\bar{e})),(e,x)\big)$ a le sens et $F\big(F(\alpha,(a,\bar{e})),(e,x)\big) = F\big(F(\alpha(e,x)),(a,\bar{e})\big)$. D'ici en vertu des conditions (9) et (10) on a $F_2(F_1(\alpha,a),x)$ a le sens et $F_1(F_2(\alpha,x),a) = F_2(F_1(\alpha,a),x)$.

Supposons que $F_2(F_1(\alpha,a),x)$ ait le sens. Analogiquement comme ci-dessous on montrera que $F_1(F_2(\alpha,x),a)$ a le sens et $F_2(F_1(\alpha,a),x) = F_1(F_2(\alpha,x),a)$. On reçoit la condition (5a) et l'égalite (5b).

Supposons que $F(\alpha, (a, x))$ ait le sens. En vertu de la condition (4) on reçoit que $F\big(F(F(\alpha, (a_2, \bar{e})), (e, x)), (a_1, \bar{e})\big)$ a le sens. Car la fonction F est la solution commutative de l'équation de translation on a: $F\big(F(F(\alpha, (e, x)), (a_2, \bar{e})), (a_1, \bar{e})\big)$ a le sens et

$$F\big(F(F(\alpha, (a_2, \bar{e})), (e, x)), (a_1, \bar{e})\big) = F(\alpha, (a, x)) = F\big(F(F(\alpha, (e, x)), (a_1, \bar{e})), (a_2, \bar{e}\big) .$$

Ainsi $F(F(\alpha, (e, x)), (a, \bar{e}))$ a le sens et

$$F\big(F(F(\alpha, (e, x)), (a_2, \bar{e})), (a_1, \bar{e})\big) = F(F(\alpha, (e, x)), (a, \bar{e})) .$$

D'ici en vertu des condition (9) et (10) on reçoit que $F_1(F_2(\alpha, x), a)$ a le sens et $F(\alpha, (a, x)) = F(F(\alpha, (e, x)), (a, \bar{e})) = F_1(F_2(\alpha, x), a)$.

Soit $F_1(F_2(\alpha, x), a)$ a le sens. En vertu des conditions (9) et (10) on a que $F(F(\alpha, (e, x)), (a, \bar{e}))$ a le sens et $F_1(F_2(\alpha, x), a) = F(F(\alpha(e, x)), (a, \bar{e}))$. D'ici en vertu le preuve que la fonction F est la solution commutative de l'équation de translation on a:

$$F(F(\alpha, (e, x)), (a, \bar{e})) = F\big(F(F(\alpha, (e, x)), (a_1, \bar{e})), (a_2, \bar{e})\big) =$$
$$= F\big(F(F(\alpha, (a_1, \bar{e})), (e, x)), (a_2, \bar{e})\big) = F(\alpha, (a, x)) .$$

On reçoit la condition (6). Donc la condition annoncée dans le théorème 6 est nécessaire.

D é m o n s t r a t i o n de la suffisance de la condition. Supposons que la fonction F de $(\Gamma \times S, \Gamma)$ soit définie par la condition (6). Démontrerons que la fonction F de $(\Gamma \times S, \Gamma)$ est la solution commutative de l'équation de translation sur S. Supposons que $F(\alpha, (a, x))$ ait le sens et que $(b, y) \cdot (a, x)$ ait le sens. En profitant de la condition (6) de la définition "$\cdot$" de S et de la supposition que les fonctions F_1 de $(\Gamma \times S_1, \Gamma)$ et F_2 de $(\Gamma \times S_2, \Gamma)$ soient les solutions commutatives de l'équation de translation qui remplissent la condition (5) on reçoit les relations mentionnées ci-dessous:

$F_2(F_1(\alpha, a), x)$ et $F_1(F_2(\alpha, x), a)$ a le sens et $b \cdot a$ et $y \cdot x$ ont le sens,

donc:

$F_1(F_1(\alpha, a), b)$ a le sens et $F_1(\alpha, b \cdot a)$ a le sens et $F_2(\alpha, y \cdot x)$ a le sens et $F_2(F_2(\alpha, x), y)$ a le sens,

ainsi:

$F_2(F_2(F_1(\alpha, a), x), y)$ a le sens et $F_2(F_1(\alpha, a), y \cdot x)$ a le sens et $F_1(F_1(F_2(\alpha, x), a), b)$ et $F_1(F_2(\alpha, x), b \cdot a)$ ont le sens,

donc:

$F_2(F_1(\alpha, b \cdot a), x)$ a le sens et $F_1(F_2(\alpha, y \cdot x), a)$ a le sens, ainsi:

$F_2(F_2(F_1(\alpha, b\cdot a), x), y)$ et $F_2(F_1(\alpha, b\cdot a), y\cdot x)$ ont le sens,

on a donc:

$F_2(F_1(F_2(F_1(\alpha, a), x), b), y)$ et $F_2(F_1(\alpha, b\cdot a), y\cdot x)$ ont le sens.

On reçoit donc la condition:

— si $F(\alpha, (a, x))$ a le sens et $(b, y)\cdot(a, x)$ a le sens, alors $F(F(\alpha,(a, x)), (b\cdot y))$ et $F(\alpha, (b, y)\cdot(a, x))$ ont le sens.

En profitant des conclusions mentionnées ci-dessus et des égalitées (5b) et (6b) on compte:

$$F(F(\alpha, (a, x)), b, y)) = F_2(F_1(F_2(F_1(\alpha, a), x), b), y) =$$
$$= F_2(F_2(F_1(F_1(\alpha, a), b), x), y) = F_2(F_1(\alpha, b\cdot a), y\cdot x) =$$
$$= F(\alpha, (b\cdot a, y\cdot x)) = F(\alpha, (b, y)\cdot(a, x)) .$$

Nous avons démontre que la fonction F de $(\Gamma \times S, \Gamma)$ définie par la condition (6) est la solution de l'équation de translation sur S. Supposons que $F(F(\alpha, (a, x)), (b, y))$ ait le sens pour $(a, x) \in S$ et $(b, y) \in S$ et $\alpha \in \Gamma$. En profitant de la condition (6) on reçoit que:

$F_2(F_1(F_2(F_1(\alpha, a), x), b), y)$ a le sens. On reçoit de la condition (5a) que $F_2(F_2(F_1(F_1(\alpha, a), b), x), y)$ a le sens. Donc de la condition (5a) on a que $F_2(F_1(F_2(F_1(\alpha, b), y), a), x)$ a le sens. Donc on a de la condition (6) que $F(F(\alpha, (b, y)), (a, x))$ a le sens.

En profitant des conclusions mentionnées ci-dessus et la supposition que les fonctions F_1 et F_2 sont commutatives et de l'égalite (5b) et (6b) on compte:

$$F(F(\alpha, (a, x)), (b, y)) = F_2(F_1(F_2(F_1(\alpha, a), x), b), y)$$
$$= F_2(F_2(F_1(F_1(\alpha, a), b), x), y) = F_2(F_2(F_1(F_1(\alpha, b), a), y), x)$$
$$= F_2(F_1(F_2(F_1(\alpha, b), y), a), x) = F(F(\alpha, (b, y)), (a, x)) .$$

La condition suffisante du théorème 6 est donc démontrée.

Analogiquement on peut démontrer le suivant:

THÉORÈME 6a. *Soit $S = S_1 \times S_2$, où le système $(S_1, \cdot)$ remplit la condition $\bigwedge_{e\in S_1} \bigwedge_{a\in S_1} \{a\cdot e = e\cdot a = a\}$. et le système $(S_2, \cdot)$ remplit la condition* (3).
On définit dans l'ensemble S l'opération "$\cdot$" comme dans le théorème 6.

La fonction F de $(\Gamma \times S, \Gamma)$ définie sur $\Gamma \times S$ tout entier est la solution de l'équation de translation si et seulement s'ils existent les fonctions F_1 de $(\Gamma \times S_1, \Gamma)$

définie sur $\Gamma \times S_1$ *tout entier et* F_2 *de* $(\Gamma \times S_2, \Gamma)$ *définie sur* $\Gamma \times S_2$ *tout entier, étant les solutions de l'équation de translation convenablement sur* S_1 *et* S_2 *telles que*:

$$F_1(F_2(\alpha, x), a) = F_2(F_1(\alpha, a), x), \tag{11}$$

$$F(\alpha, (a, x)) = F_2(F_1(\alpha, a), x). \tag{12}$$

THÉORÈME 7. *Soit F de* $(\Gamma \times G, \Gamma)$, *où* $(G, \bullet)$ *est le groupe, la solution de l'équation de translation sur G. Pour la fonction F soit commutative il faut et il suffit que le groupe quotient* G/J *soit abélien, où* $J = \{x \in G\colon \bigwedge_{\alpha \in \Gamma} F(\alpha, x) = F(\alpha, e)\}$ *et "e" est l'unité dans G.*

La démonstration de ce théorème on peut trouver dans la note [1].

Rappelons conformement à [9] les théorèmes suivants:

THÉORÈME 8. *Soit la fonction F de* $(\Gamma \times A \times A, \Gamma)$ *définie sur* $\Gamma \times A \times A$. *La solution générale F de l'èquation de translation sur le groupoïde des paires* $(A \times A, \bullet)$ *sous la supposition que la condition d'indentité soit remplie, a la forme suivante*:

$$F(\alpha, (\mu, v)) := h_\mu^{-1}(h_v(\alpha))$$

pour $\alpha \in \Gamma$, $\mu \in A$, $v \in A$, *où* h_v *pour chaque v de A est bijection de l'ensemble* Γ *sur l'ensemble* Γ.

THÉORÈME 9. *Le système* $(E, \bullet)$ *est le groupoïde d'Ehresmann si et seulement s'il existe une décomposition U de l'ensemble E sur les ensemble séparables et tels que*: $R \subset \bigcup_{M \in U} M \times M$ (*R est le domaine de l'operation "•"*) *et chaque l'ensemble A de la famille U avec l'opération "•" rétrécie à l'ensemble A est le groupoïde de Brandt.*

THÉORÈME 10. *La solution générale de l'équation de translation sur E, où* $(E, \bullet)$ *est le groupoïde d'Ehresmann, est la famille de la fonction reçue de la facon suivante*:

1. *Considerons la décomposition du groupoïde E sur les séparables groupoïdes de Brandt* $E = \bigcup_{s \in S} B_S$.
2. *Pour chaque* $s \in S$ *on choisis un ensemble* $\Gamma_S \subset \Gamma$ *tel que* $\bigcup_{s \in S} \Gamma_S = \Gamma$.
3. *Pour chaque* $s \in S$ *tel que* $\Gamma_S \neq \emptyset$ *on prend une fonction* F_S *de* $(\Gamma_S \times B_S, \Gamma_S)$ *remplissante l'équation de translation sur* B_S.
4. *La fonction* $F(\alpha, x)$ *est définie de la manière suivante*:

$$F(\alpha, x) := F_S(\alpha, x) \text{ pour } (\alpha, x) \in \Gamma_S \times B_S .$$

Démontrerons à présent le suivant:

THÉORÈME 11. *Si* $(\Gamma, A \times A, F)$ *est l'objet, où* $(A \times A, \bullet)$ *est le groupoïde des paires, alors pour que* $(\Gamma, A \times A, F)$ *soit l'objet commutatif il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies*:

(13) *La fonction F est définie sur l'ensemble* $\Gamma \times A \times A$.

$$\bigwedge_{\alpha \in \Gamma} \bigwedge_{\mu, v \in A} \{h_\mu(h_v(\alpha)) = h_\mu(h_v(\alpha))\} \tag{14}$$

où h_ν est une bijection de l'ensemble Γ sur l'ensemble Γ utilisée dans la construction de la fonction F dans le théorème 8.

Démonstration. Si $(\Gamma, A\times A, F)$ est l'objet commutatif alors la condition (13) est remplie d'après le théorème 4. D'après le théorème 8 la fonction F à la forme:

$$F\big(\alpha, (\mu, v)\big) = h_\mu^{-1}\big(h_\nu(\alpha)\big) \text{ pour } \alpha \in \Gamma,\ \mu \in A,\ v \in A. \tag{15}$$

On peut définir la fonction h_ν d'après (15) à la manière suivante:

$$h_\nu(\alpha) := F\big(\alpha, (\mu_0, v)\big) \tag{16}$$

pour $\alpha \in \Gamma$, $v \in A$, où μ_0 est un élèment fixé de l'ensemble A. D'ici:

$$\bigwedge_{\alpha\in\Gamma} \{h_{\mu_0}(\alpha) = \alpha\}. \tag{17}$$

En profitant des condition (15), (16), (13) et d'après la supposition que $(\Gamma, A\times A, F)$ est l'objet commutatif on a:

$$h_\mu\big(h_\nu(\alpha)\big) = F\big(F(\alpha,(\mu_0, v)), (\mu_0, \mu)\big) = F\big(F(\alpha, (\mu_0, \mu)), (\mu_0, v)\big) = h_\nu\big(h_\mu(\alpha)\big).$$

La condition (14) est donc remplie.

Supposons que $(\Gamma, A\times A, F)$ soit l'objet et les condition (13) et (14) soient remplies. La famille des bijections h_v de l'ensemble utilisés dans la construction de la fonction F (voir le théorème 8) forme le groupe des transformations. Cela résulte directement des condition (16) et (17). On a alors (14) les relations suivantes:

$$\bigwedge_{\alpha\in\Gamma} \bigwedge_{\mu,\nu\in A} \{h_\mu^{-1}\big(h_\nu(\alpha)\big) = h_\nu\big(h_\mu^{-1}(\alpha)\big)\}, \tag{18}$$

$$\bigwedge_{\alpha\in\Gamma} \bigwedge_{\mu,\nu\in A} \{h_\mu^{-1}\big(h_\nu^{-1}(\alpha)\big) = h_\nu^{-1}\big(h_\mu^{-1}(\alpha)\big)\}. \tag{19}$$

Des conditions (13), (14), (15), (18) et (19) on a:

$$\begin{aligned} F\big(F(\alpha, (\mu, v)), (\mu_1, v_1)\big) &= h_{\mu_1}^{-1}\big(h_{\nu_1}(h_\mu^{-1}(h_\nu(\alpha)))\big) = \\ &= h_{\mu_1}^{-1}\big(h_\mu^{-1}(h_{\nu_1}(h_\nu(\alpha)))\big) = h_\mu^{-1}\big(h_\nu(h_{\mu_1}^{-1}(h_{\nu_1}(\alpha)))\big) = \\ &= F\big(F(\alpha, (\mu_1, v_1)), (\mu, v)\big). \end{aligned}$$

Donc $(\Gamma, A\times A, F)$ est l'objet commutatif. La démonstration du théorème est finie.

On reçoit directement des théorèmes 4 et 6 le suivant:

Théorème 12. *La fonction F de $(\Gamma\times A\times A\times G, \Gamma)$, où $(A\times A\times G, \bullet)$ est le groupoïde de Brandt des triples, est la solution commutative de l'équation de translation si et seulement s'ils existent les fonctions F_1 de $(\Gamma\times A\times A, \Gamma)$ et F_2 de $(\Gamma\times G, \Gamma)$ qui sont les solutions commutatives de l'équation de translation convenablement sur $A\times A$ et sur G et telles que*:

$$\bigwedge_{\alpha\in\Gamma} \bigwedge_{x\in G} \bigwedge_{\mu,\nu\in A} \{F_1\big(F_1(\alpha, x)\big), (\mu, v)\} = F_2\big(F_1(\alpha, (\mu, v)), x\big) \text{ et}$$
$$F\big(\alpha, (\mu, v, x)\big) = F_1\big(F_2(\alpha, x), (\mu, v)\big).$$

On reçoit du théorème 3 le suivant:

THÉORÈME 13. *La fonction F de $(\Gamma\times B, \Gamma)$, où $(B, \cdot)$ est le groupoïde de Brandt, est la solution commutative de l'équation de translation sur B si et seulement si la fonction $\overset{*}{F}$ de $(\Gamma\times A\times A\times G, \Gamma)$ de la forme:*

$$\overset{*}{F}(\alpha, (\mu, v, x)) = F(\alpha, \varphi^{-1}((\mu, v, x)))$$

pour $\alpha\in\Gamma$, $v\in A$, $\mu\in A$ et $x\in G$, où $(A\times A\times G, \cdot)$ est le groupoïde de Brandt des triples isomorphe au groupoïde $(B, \cdot)$, et φ est un isomorphisme des groupoïdes $(B, \cdot)$ et $(A\times A\times G, \cdot)$, est la solution commutative de l'équation de translation.

En profitant des théorèmes 9 et 10 on reçoit tout suite le suivant:

THÉORÈME 14. *Soit F de $(\Gamma\times E, \Gamma)$, où $(E, \cdot)$ est le groupoïde d'Ehresmann, une solution de l'équation de translation sur E. Pour que la fonction F soit commutative il faut et il suffit qu'elle remplisse la condition:*

$\bigwedge_{\alpha\in\Gamma}\bigwedge_{x,y\in E}\bigwedge_{s,k\in S}$ {*Si* $F_s(F_k(\alpha, x), y)$ *a le sens, alors* $F_k(F_s(\alpha, y), x)$ *a le sens et* $F_s(F_k(\alpha, x), y) = F_k(F_s(\alpha, y), x)$}, *où les fonction F_s sont définies dans théorème* 10.

V. Dans la note [6] on peut trouver les certains réflexions des solution de l'équation de translation sur le système avec zéro. Nous ne parlerons que des solutions commutatives de l'équation de translation sur les système avec zéro. Soit $(H\cup\{0\}, \cdot)$ le système avec zéro. De la définition 1 et 3 on reçoit le suivant:

THÉORÈME 15. *Si la fonction F de $(\Gamma\times\{H\cup\{0\}\}, \Gamma)$ est la solution commutative de l'équation de translation, alors la fonction $F_{|\Gamma\times H}$ de $(\Gamma\times H, \Gamma)$ est la solution commutative de translation sur H.*

On démontrera le suivant:

THÉORÈME 16. *Si la fonction de $(\Gamma\times\{H\cup\{0\}\}, \Gamma)$ est la solution commutative de l'équation de translation sur $H\cup\{0\}$, alors:*

$$\bigwedge_{x\in H\cup\{0\}}\bigwedge_{\alpha\in\Gamma}\{F(\alpha, x) \text{ a le sens}\}. \tag{20}$$

Démonstration. Soit F de $(\Gamma\times\{H\cup\{0\}\}, \Gamma)$ la solution commutative de l'équation de translation et soit $\alpha\in\Gamma$. De la condition (1) on a qu'il existe $x\in H$ tel que $F(\alpha, x)$ a le sens ou $F(\alpha, 0)$ a le sens. Si $F(\alpha, 0)$ a le sens, en vertu de la définition 1 et 7 on reçoit que $F(F(\alpha, 0), y)$ a le sens, pour chaque $y\in H\cup\{0\}$. Puisque la fonction F est commutative on a que $F(F(\alpha, y), 0)$ a le sens pour chaque $y\in H\cup\{0\}$. Donc:

$$\bigwedge_{\alpha\in\Gamma}\bigwedge_{y\in H\cup\{0\}}\{\text{Si } F(\alpha, 0) \text{ a le sens, alors } F(\alpha, y) \text{ a le sens}\}. \tag{21}$$

Si $F(\alpha, x)$ a le sens pour certein x de H, on reçoit de la définition 1 et 7 que $F(F(\alpha, x), 0)$ a le sens. Comme la fonction F est commutative on reçoit que $F(F(\alpha, 0), x)$ a le sens. De la $F(\alpha, 0)$ a le sens, donc d'après (21) la démonstration du théorème est finie.

THÉORÈME 17. *Pour que la fonction F de $(\Gamma\times\{H\cup\{0\}\}, \Gamma)$ soit la solution commutative de l'équation de translation il faut et il suffit que F soit la solution de* *l'équation de translation sur $H \cup \{0\}$ et que la fonction $F_{|\Gamma \times H}$ de $(\Gamma \times H, \Gamma)$ soit commutative et remplissant la condition:*

$$\bigwedge_{\alpha \in \Gamma} \bigwedge_{x \in H} \{F(\alpha, x) \text{ a le sens}\}. \tag{22}$$

Démonstration. Soit F de $(\Gamma \times \{H \cup \{0\}\}, \Gamma)$ la solution commutative de l'équation de translation. Alors en vertu des théorèms 15 et 16 on reçoit que la fonction $F_{|\Gamma \times H}$ de $(\Gamma \times H, \Gamma)$ est commutative et condition (22) est remplie. Soit t de $(\Gamma \times \{H \cup \{0\}\}, \Gamma)$ une solution de l'équation de translation sur $H \cup \{0\}$ ei soit $F_{|\Gamma \times H}$ de $(\Gamma \times H, \Gamma)$ la fonction commutative et remplissante (22). Soit auss $\alpha \in \Gamma$ et $x \in H$. D'après la condition (22) nous reçevons que $F(\alpha, x)$ a le sens et de plus $0 \cdot x = 0$. De la $F(\alpha, 0 \cdot x)$ a le sens. Il en résulte que:

$$\bigwedge_{\alpha \in \Gamma} \bigwedge_{x \in H \cup \{0\}} \{F(\alpha, x) \text{ a le sens}\}. \tag{23}$$

De la condition (23) et de la supposition que la fonction $F_{|\Gamma \times H}$ est commutative on a:

$$\bigwedge_{\alpha \in \Gamma} \bigwedge_{x \in H} \bigwedge_{y \in H} \{F(F(\alpha, x), y) = F(F(\alpha, y), x)\}. \tag{24}$$

Soit $\alpha \in \Gamma$ et $x \in H$. Donc on reçoit:

$$F(F(\alpha, x), 0) = F(\alpha, 0 \cdot x) = F(\alpha, 0) \quad \text{et} \tag{25}$$

$$F(F(\alpha, 0), x) = F(\alpha, x \cdot 0) = F(\alpha, 0). \tag{26}$$

Des condition (23), (24), (25), (26) on reçoit que la fonction F de $(\Gamma \times \{H \cup \{0\}\}, \Gamma)$ est commutative. La démonstration du théorème est donc finie.

Travaux cités

[1] E. Barcz, M. Kania, Z. Moszner: *Sur les automates commutatifs*, Zesz.Nauk. UJ. Prace Mat. 19 (1977), 195-201.

[2] J. Gancarzewicz: *On commutative algebraic objet over a groupoide*. Zesz. Nauk. UJ. Prace Mat. z. 12 (1968), 19–25.

[3] A. Krupińska: *Ogólne rozwiązanie równania translacji na kategorii*. Rocznik Nauk.-Dydak. WSP Rzeszów, z. 2/18, (1972), 13–108.

[4] Z. Moszner: *Solution générale de l'équation de translation et ses applications*. Aeq. Math. 1 (1968), 291–293.

[5] Z. Moszner: *Sur les objets algébriques commutatifs*. Aeq. Math. 11 (1974), 296–298.

[6] Z. Moszner, J. Tabor: *L'équation de translation sur la structure avec zéro*. Ann. Pol. Math. 31 (1975), 255–264.

[7] Z. Opial: *Algebra wyższa*. PWN, Warszawa (1970).

[8] J. Tabor: *The translation équation and algebraic object*. Ann. Pol. Math. 27 (1973), 119–229.

[9] J. Tabor: *Struktura ogólnego rozwiązania równania translacji na grupoidzie Ehresmanna oraz rozkłady niezmiennicze tego grupoidu*. Rocznik Nauk.-Dydak. WSP w Krakowie. Prace Mat. 41 (1970), 107–153.

[10] A. Zajtz: *Algebraic objects*. Zesz. Nauk. UJ. Prace Mat., 12 (1968), 67–79.