ZENON MOSZNER

Solution générale de l'équation de translation sur un demi-groupe

Le but de cette note est de donner une construction de la solution générale remplissant (7') de l'équation de translation

$$F(F(\alpha, x), y) = F(\alpha, x+y), \tag{1}$$

où $F\colon \Gamma \times G^+ \to \Gamma$, Γ est un ensemble arbitraire, G^+ est le demi-groupe des éléments non-négatifs d'un groupe G archimédien et complet. Le groupe G doit être abélien dans ce cas.

Nous connaissons la construction de la solution générale de (1) dans le cas si G^+ forme un groupe ([4]), un groupoïd de Brandt et de Ehresmann ([1] et [3]) et enfin un demi-groupe ou une catégorie ([2]). Mais dans ces cas derniers les paramètres de la solution doivent remplir une condition (nommée la condition de la compatibilité) qui n'est pas commode.

Nous donnerons d'après [2] pour un exemple et pour les buts suivants une construction (K) de la solution générale de l'équation (1) dans le cas si G^+ forme un demi-groupe arbitraire avec l'elément neutre.

a) Considérons une famille pour s de S des décompositions $\{W_{is}\}_{i\in J_s}$ invariantes du demi-groupe G^+, c'est-à-dire supposons que

$$\bigwedge_{s\in S} G^+ = \bigcup_{i\in J_s} W_{is}; \qquad \bigwedge_{s\in S}\bigwedge_{i\in J_s} W_{is} \neq \emptyset;$$

$$\bigwedge_{s\in S}\ \bigwedge_{\substack{i_1, i_2, \in J_s\\ i_1\neq i_2}} (W_{i_1 s}\cap W_{i_2 s} = \emptyset); \bigwedge_{s\in S}\ \bigwedge_{i_1\in J_s}\ \bigwedge_{x\in G^+}\ \bigvee_{i_2\in J_s} (W_{i_1 s}+x\subset W_{i_2 s}).$$

Supposons de plus que

$$\bigwedge_{s\in S} (\bar{\bar{J_s}} \leqslant \bar{\bar{\Gamma}}).$$

b) Soit $h_s\colon \{W_{is}\}\to\Gamma$ une injection et posons

$$\Gamma_s \stackrel{\mathrm{df}}{=} h_s(\{W_{is}\}).$$

Définissons la fonction $\bar{h}_s\colon G^+\to\Gamma_s$ de la manière suivante

$$\bar{h}_s(x) = h_s(W_{is}) \quad \text{pour } x\in W_{is}.$$

Nous supposons la condition de la compatibilité

$$(2) \qquad \bigwedge_{s_1, s_2 \in S} \bigwedge_{w \in \Gamma_{s_1} \cap \Gamma_{s_2}} \bigwedge_{x \in G^+} [\bar{h}_{s_1}(\bar{h}_{s_1}^{-1}(\{w\})+x) = \bar{h}_{s_2}(\bar{h}_{s_2}^{-1}(\{w\})+x)] .$$

Désignons

$$\Gamma^* = \bigcup_{s \in S} \Gamma_s .$$

c) Soit f: $\Gamma \xrightarrow[\text{sur}]{} \Gamma^*$ et telle que

$$\bigwedge_{w \in \Gamma} f(f(w)) = f(w) .$$

d) Soit g: $\Gamma^* \to S$ une fonction telle que

$$\bigwedge_{w \in \Gamma^*} (w \in \Gamma_{g(w)}) .$$

e) Posons

$$F(w, x) = \bar{h}_s(\bar{h}_s^{-1}(f(w))+x) \quad \text{pour} \quad (w, x) \in \Gamma \times G^+, \text{ où } s = g(f(w)) .$$

Nous démontrerons que
la condition de la compatibilité (2) *dans cette construction* (K) *est équivalente à la condition suivante*:

$$(3) \qquad \bigwedge_{s_1, s_2 \in S} [\Gamma_{s_1} \cap \Gamma_{s_2} \neq \emptyset \Rightarrow$$

$\Rightarrow \bigvee_{\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in G^+} \{\bar{h}_{s_1}$ est une bijection de $[0, \bar{u}_1|$*) à $\Gamma_{s_1} \setminus \Gamma_{s_2}$ et $\bar{h}_{s_2}$ est une bijection de $[0, \bar{u}_2|$ à $\Gamma_{s_2} \setminus \Gamma_{s_1}$ et $\bar{h}_{s_1}(u) = \bar{h}_{s_2}(u+\bar{u}_2-\bar{u}_1)$ pour

$$u \text{ de } G^+ \setminus [0, \bar{u}_1|\}] .$$

Démonstration. Supposons qu'il a lieu la condition (3). Nous allons de démontrer que les fonctions $\bar{h}_{s_1}$ et $\bar{h}_{s_2}$ remplissent la condition (2). Si $\Gamma_{s_1} \cap \Gamma_{s_2} = \emptyset$ cette condition est remplie d'une facon évidente. Supposons donc que $\Gamma_{s_1} \cap \Gamma_{s_2} \neq \emptyset$ et soit $w \in \Gamma_{s_1} \cap \Gamma_{s_2}$. Il existe donc un u de $G^+ \setminus [0, u_1|$ pour lequel $\bar{h}_{s_1}(u) = w$. De là $\bar{h}_{s_2}(u+\bar{u}_2-\bar{u}_1) = w$. Il en résulte que

$$u+\bar{u}_2-\bar{u}_1 \in \bar{h}_{s_2}^{-1}(w) ,$$

d'où

$$u+\bar{u}_2-\bar{u}_1+x \in \bar{h}_{s_2}^{-1}(w)+x$$

pour chaque x de G^+. De là

$$\bar{h}_{s_2}[\bar{h}_{s_2}^{-1}(w)+x] = \bar{h}_{s_2}(u+\bar{u}_2-\bar{u}_1+x) = \bar{h}_{s_1}(u+x) = \bar{h}_{s_1}[\bar{h}_{s_1}^{-1}(w)+x) ,$$

c.q.f.d.

---

*) $[0, b|$ désigne l'intervalle droitement fermé ou non.

Supposons à présent qu'il a lieu la condition (2) et soit $\Gamma_{s_1} \cap \Gamma_{s_2} \neq \emptyset$ et $x_0 \in E \overset{\mathrm{df}}{=} \bar{h}_{s_1}^{-1}(\Gamma_{s_1} \cap \Gamma_{s_2})$.

De là $\bar{h}_{s_1}(x_0) \in \Gamma_{s_1} \cap \Gamma_{s_2}$. Il existe donc $\bar{x}$ tel que $\bar{h}_{s_1}(x_0) = \bar{h}_{s_2}(\bar{x})$. Désignons par $a = \bar{x} - x_0$ de G.
Si

$$w = \bar{h}_{s_1}(x_0) = \bar{h}_{s_2}(\bar{x}) = \bar{h}_{s_2}(x_0 + a)$$

nous avons d'après la condition de la compatibilité (2)

$$\bar{h}_{s_1}(x_0 + x) = \bar{h}_{s_2}(x_0 + a + x)$$

et de là

(4) $$\bar{h}_{s_1}(u) = \bar{h}_{s_2}(u + a)$$

pour $u \geqslant x_0$.

D'après b) dans la construction (K) la fonction h_{s_i} $(i = 1, 2)$ est une injection sur une décomposition invariante $\{W_{is_i}\}$ de G^+. Cette décomposition invariante de G^+ doit être [5] de la forme suivante:

i) il existe un élément u_i de G^+ tel que les points de l'intervalle $[0, u_i|$ (droitement fermé ou non pour $i = 1$ et pour $i = 2$) forment les composantes de cette décomposition (cet intervalle peut être aussi vide),

ii) les autres composantes de la décomposition considerée ces sont les restrictions à l'ensemble $G^+ \setminus [0, u_i|$ des classes d'équivalence du groupe G par rapport à un sous-groupe G_i^*.

Nous devons avoir $G_1^* = G_2^*$. En effet dans le cas contraire il doit exister un élément u_0 de $G_1^* \cap G^+$ pour lequel $u_0 \notin G_2$ (ou inversement $u_0 \in G_1^*$ et $u_0 \notin G_1^*$ — dans ce cas le raisonnement est analogue). Soit k un entier tel que $ku_0 \geqslant x_0$. De là $(k+1)\ u_0 \geqslant x_0$ et puisque $ku_0 \in G_1^*$ et $(k+1)\ u_0 \in G_1^*$ donc:

$$\bar{h}_{s_1}(ku_0) = \bar{h}_{s_1}\big((k+1)u_0\big)\,.$$

Nous avons de là d'après (4)

$$\bar{h}_{s_2}(ku_0 + a) = \bar{h}_{s_2}\big((k+1)u_0 + a\big)\,.$$

Il en résulte que

$$(k+1)u_0 + a - (ku_0 + a) = u_0 \in G_2^*\,,$$

ce qui est impossible.

Si $G_1^* = G_2^* = \{0\}$ nous avons: $[0, u_1| = [0, u_2| = \emptyset$ et les fonctions $\bar{h}_{s_1}$ et $\bar{h}_{s_2}$ ce sont les injections. Dans ce cas l'élément a dans (4) ne dépend pas du choix de x_0 de E. En effet pour $\bar{x}_0$ de E il existe, d'après le raisonnement plus haut, un $\bar{a}$ tel que $\bar{h}_{s_1}(u) = \bar{h}_{s_2}(u + \bar{a})$ pour $u \geqslant \bar{x}_0$. De là $\bar{h}_{s_2}(u + \bar{a}) = \bar{h}_{s_2}(u + a)$ pour $u \geqslant \max(x_0, \bar{x}_0)$. Puisque $\bar{h}_{s_2}$ est une injection nous avons de là $a = \bar{a}$. Il en résulte que (4) a lieu pour $u > \bar{u} = \inf E$ et aussi pour $u = \bar{u}$ si $\bar{u} \in E$.

Si $G_1^* = G_2^* \neq \{0\}$ dans ce cas (4) a lieu pour chaque u de $G^+ \setminus [0, u_1|$. En effet il existe un élément $b \in G^+$ et tel que: $u+b \geqslant x_0$ et $b \in G_1^*$. De là

$$\bar{h}_{s_1}(u) = \bar{h}_{s_1}(u+b) = \bar{h}_{s_2}(u+b+a) = \bar{h}_{s_2}(u+a+b) = \bar{h}_{s_2}(u+a) .$$

Considérons $\bar{u}_1 = \inf E$. D'après les considération plus haut nous avons: $\bar{u}_1 \leqslant u_1$. Si $\bar{u}_1 = u_1 \notin [0, u_1|$ nous avons (4) pour $u \geqslant \bar{u}_1$. Si $\bar{u}_1 = u_1 \in [0, u_1|$ et $\bar{u}_1 \in E$ en raisonnant comme pour avoir (4) nous concluons qu'il existe un élément $\bar{a}$ de G^+ pour lequel

$$\bar{h}_{s_1}(u) = \bar{h}_{s_2}(u+a) \quad \text{pour} \quad u \geqslant \bar{u}_1 .$$

Si enfin $\bar{u}_1 < u_1$ en raisonnant comme pour avoir (4) nous recevons que pour chaque x_0 de E et tel que $\bar{u}_1 \leqslant x_0 < u_1$ il existe $a(x_0)$ tel que

$$\bar{h}_{s_1}(u) = \bar{h}_{s_2}(u+a(x_0)) \tag{5}$$

pour $u \geqslant x_0$. Élément $a(x_0)$ ne dépend pas du choix de x_0 de E et tel que $\bar{u}_1 \leqslant x_0 < u_1$. En effet pour $\bar{x}_0$ de E et tel que $\bar{u}_1 \leqslant \bar{x}_0 < u_1$ nous avons:

$$\bar{h}_{s_1}(u) = \bar{h}_{s_2}(u+a(\bar{x}_0)) \tag{6}$$

pour $u \geqslant \bar{x}_0$. Mais la fonction $\bar{h}_{s_1}$ est une injection pour $u < u_1$, donc d'après (5) et (6) $\bar{h}_{s_2}(u+a(x_0))$ et $\bar{h}_{s_2}(u+a(\bar{x}_0))$ sont aussi des injections pour $\max(x_0, \bar{x}_0) \leqslant u < u_1$. De plus d'après (5) et (6) nous avons

$$\bar{h}_{s_2}(u+a(x_0)) = \bar{h}_{s_2}(u+a(\bar{x}_0))$$

et de là $a(x_0) = a(\bar{x}_0)$.

Il en résulte que aussi dans ce cas nous avons (4) pour $u > \bar{u}_1$ et pour $u = \bar{u}_1$ si $\bar{u}_1 \in E$.

Cette relation a donc lieu dans tous les cas. Nous avons donc la conclusion (C) suivante:

$$- \text{ si } \Gamma_{s_1} \cap \Gamma_{s_2} \neq \emptyset \text{ alors } \bar{h}_{s_1}(u) = \bar{h}_{s_2}(u+a)$$

pour un a de G et $u \in G^+ \setminus [0, \bar{u}_1|$, où $\bar{u}_1 \in G^+$. De plus $\bar{h}_{s_1}$ est une bijection de $[0, \bar{u}_1|$ sur $\Gamma_{s_1} \setminus \Gamma_{s_2}$.

En changeant s_1 avec s_2 et en désignant $\bar{u}_2 = \inf \bar{h}_{s_2}^{-1}(\Gamma_{s_1} \cap \Gamma_{s_2})$ nous avons d'après la conclusion (C) que h_{s_2} est une bijection de $[0, \bar{u}_2|$ sur $\Gamma_{s_2} \setminus \Gamma_{s_1}$. Il en résulte d'après la conclusion (C) que si u varie dans $G^+ \setminus [0, \bar{u}_1|$ tout entier, $u+a$ doit varier sur $G^+ \setminus [0, \bar{u}_2|$ tout entier et de là $a = \bar{u}_2 - \bar{u}_1$.

La démonstration est donc terminée.

Remarque 1. Il se pose le problème de déterminer les certaines fonctions h_s, remplissantes (3), par les autres. Les fonctions $\bar{h}_s(x) = x - s$ pour s et x de R^+ montrent qu'on peut se passer qu'on ne peut pas exprimer toutes les fonctions de la famille remplissante (3) par un nombre fini d'elles.

On sait d'après [2] que la famille $\{\Gamma_s\}_{s\in S}$ c'est la famille $\{F(\alpha, G^+)\}_{\alpha\in\Gamma}$. Remarquons que cette dernière famille est égale à la famille $\{F(\alpha, G^+)\}_{\alpha\in F(\Gamma, G^+)}$, puisque $F(\alpha, x) = F(F(\alpha, 0), x)$. Nous allons démontrer que

$$(7) \qquad \bigwedge_{s_1, s_2\in S} [\Gamma_{s_1} \cap \Gamma_{s_2} \neq \emptyset \Rightarrow \Gamma_{s_1} \subset \Gamma_{s_2} \text{ ou } \Gamma_{s_2} \subset \Gamma_{s_1}]$$

est equivalent au fait que la relation $\bar{\varrho}$ sur $F(\Gamma, G^+)$ suivante

$$\alpha_1 \bar{\varrho} \alpha_2 \Leftrightarrow \bigvee_{x\in G^+} (\alpha_2 = F(\alpha_1, x) \text{ ou } \alpha_1 = F(\alpha_2, x))$$

est une relation d'équivalence. En effet pour β de $F(\Gamma, G^+)$ on a $\beta = F(\alpha, x)$ et de là

$$\beta = F(\alpha, x) = F(F(\alpha, x), 0) = F(\beta, 0)$$

d'où $\beta\bar{\varrho}\beta$. La relation $\bar{\varrho}$ est évidemment symétrique. Supposons que $\alpha\bar{\varrho}\beta$ et $\beta\bar{\varrho}\gamma$. Si $\beta = F(\alpha, x)$ et $\gamma = F(\beta, y)$ donc $\gamma = F(F(\alpha, x), y) = F(\alpha, x+y)$, alors $\alpha\bar{\varrho}\gamma$. Si $\alpha = F(\beta, x)$ et $\gamma = F(\beta, y)$ donc si $x \leqslant y$ il existe z tel que $x+z = y$ et de là $\gamma = F(\beta, x+z) = F(F(\beta, x), z) = F(\alpha, z)$ alors $\alpha\bar{\varrho}\gamma$. Si $y \leqslant x$ il existe u tel que $y+u = x$ et de là $\alpha = F(\beta, y+u) = F(F(\beta, y), u) = F(\gamma, u)$, alors $\gamma\bar{\varrho}\alpha$, d'où $\alpha\bar{\varrho}\gamma$. Si $\beta = F(\alpha, x)$ et $\beta = F(\gamma, y)$ donc $F(\alpha, G^+)\cap F(\gamma, G^+) \neq \emptyset$, alors d'après (7) $\alpha \in F(\alpha, G^+)\subset F(\gamma, G^+)$ ou $\gamma \in F(\gamma, G^+)\subset F(\alpha, G^+)$, d'où $\alpha\bar{\varrho}\gamma$.
Dans les autres cas le raisonnement est analogue.
Soit $\bar{\varrho}$ transitive. Pour démontrer (7) il suffit de montrer que

$$(7') \qquad \bigwedge_{\alpha_1, \alpha_2\in F(\Gamma, G^+)} [F(\alpha_1, G^+) \cap F(\alpha_2, G^+) \neq \emptyset \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F(\alpha_1, G^+) \subset F(\alpha_2, G^+) \text{ ou } F(\alpha_2, G_2) \subset F(\alpha_1, G^+)] .$$

Supposons donc que $F(\alpha_1, G^+) \cap F(\alpha_2, G^+) \neq \emptyset$. Il en résulte qu'il existent u_1 et u_2 de G^+ tels que $F(\alpha_1, u_1) = F(\alpha_2, u_2)$. On a $\alpha_1\bar{\varrho}F(\alpha_1, u_1)\bar{\varrho}F(\alpha_2, u_2)\bar{\varrho}\alpha_2$, donc $\alpha_1\bar{\varrho}\alpha_2$. De là il existe un $\bar{u}$ tel que $\alpha_1 = F(\alpha_2, \bar{u})$ ou $\alpha_2 = F(\alpha_1, \bar{u})$. Dans le cas premier on a $F(\alpha_1, G^+)\subset F(\alpha_2, G^+)$. En effet si $\alpha \in F(\alpha_1, G^+)$, donc

$$\alpha = F(\alpha_1, u) = F(F(\alpha_2, \bar{u}), u) = F(\alpha_2, \bar{u}+u) \in F(\alpha_2, G^+) .$$

Nous démontrons analogiquement que $F(\alpha_2, G^+)\subset F(\alpha_1, G^+)$ dans le cas deuxième. La démonstration de (7) est donc terminée.

Considérons à présent la relation ϱ suivante:

$$s_1 \varrho s_2 \Leftrightarrow \Gamma_{s_1} \cap \Gamma_{s_2} \neq \emptyset .$$

Cette relation est évidemment reflexive et symétrique. Elle est aussi transitive d'après (3).

Supposons que

$$\bigwedge_{C\in S/\varrho} \bigwedge_{s_1, s_2\in C} [\Gamma_{s_1} \subset \Gamma_{s_2} \text{ ou } \Gamma_{s_2} \subset \Gamma_{s_1}] .$$

Fixons C et un s_0 de C.
Posons

$$C_{s_0} := \{s \in C\colon \Gamma_{s_0} \subset \Gamma_s\} .$$

En prenant $s_1 = s_0$ et $s_2 = s$ de C_{s_0} dans (3) nous avons $\Gamma_{s_1} \setminus \Gamma_{s_2} = \Gamma_{s_0} \setminus \Gamma_s = \emptyset$ et de là $\bar{u}_1 = 0$ dans (3) et il existe un $\bar{u}_2 := u_s$ tel que

(8) $$\bar{h}_{s_0}(u) = \bar{h}_s(u+u_s) \quad \text{pour} \quad u>0$$

et $\bar{h}_s$ est une bijection de $[0, u_s|$ sur $\Gamma_s \setminus \Gamma_{s_0}$. Il en résulte que u_s est uniquement déterminé.

Désignons par t_s la fonction d'idéntité sur $u> -u_s$ ($t_s(u) \equiv u$ pour $u> -u_s$) et posons

(9) $$\bar{h} := \bigcup_{s \in C_{s_0}} \bar{h}_s \circ (t_s + u_s),$$

où $\circ$ désigne la superposition des fonctions.

Nous allons démontrer que $\bar{h}$ c'est une fonction. Supposons donc que $(u_0, y_1) \in \bar{h}$ et $(u_0, y_2) \in \bar{h}$. Il en résulte qu'ils existent des s_1, s_2 de C_{s_0} tels que $(u_0, y_1) \in \bar{h}_{s_1} \circ (t_{s_1} + u_{s_1})$ et $(u_0, y_2) \in \bar{h}_{s_2} \circ (t_{s_2} + u_{s_2})$, c'est-à-dire $y_1 = \bar{h}_{s_1}(u_0 + u_{s_1})$ et $y_2 = \bar{h}_{s_2}(u_0 + u_{s_2})$. On peut supposer que $\Gamma_{s_1} \subset \Gamma_{s_2}$ et de là d'après (3) il existe un $\bar{u}$ tel que

(10) $$\bar{h}_{s_1}(u) = \bar{h}_{s_2}(u+\bar{u}) \quad \text{pour} \quad u>0\,.$$

De là et d'après (8)

$$\bar{h}_{s_0}(u) = \bar{h}_{s_1}(u+u_{s_1}) = \bar{h}_{s_2}(u+u_{s_1}+\bar{u}) \text{ et } \bar{h}_{s_0}(u) = \bar{h}_{s_2}(u+u_{s_2})$$

pour $u>0$. Puisque u_s dans (8) est uniquement déterminé nous avons $u_{s_1} + \bar{u} = u_{s_2}$. Posons $u = u_0 + u_{s_1}$ dans (10). On a

$$y_1 = \bar{h}_{s_1}(u_0+u_{s_1}) = \bar{h}_{s_2}(u_0+u_{s_1}+\bar{u}) = \bar{h}_{s_2}(u_0+u_{s_2}) = y_2\,,$$

c.q.f.d.

La fonction $\bar{h}$ est définie sur l'ensemble

(11) $$|\inf_{s \in C_{s_0}} \{-u_s\}, 0) \cup G^+$$

(cet intervalle est gauchement fermé s'il existe $\min_{s \in C_{s_0}} \{-u_s\}$, dans le cas contraire il est gauchement ouvert; on peut se passer aussi qu'il est égal à G tout entier). $\bigcup_{s \in C_{s_0}} \Gamma_s = \bigcup_{s \in C} \Gamma_s$ c'est l'ensemble des valeurs de la fonction $\bar{h}$.

Il résulte d'après (9) que $\bar{h}_s(u+u_s) = \bar{h}(u)$ pour $u> -u_s$, donc $\bar{h}_s(u) = \bar{h}(u-u_s)$ pour $u>0$ et $s \in C_{s_0}$. Nous avons d'après (3) que pour $s \in C \setminus C_{s_0}$ il existe v_s tel que

$$h_s(u) = h_{s_0}(u+v_s) = \bar{h}(u+v_s-u_{s_0}) \quad \text{pour} \quad u>0\,.$$

Il existe donc pour chaque s de C un w_s tel que

$$h_s(u) = \bar{h}(u+w_s) \quad \text{pour} \quad u>0\,.$$

Il en résulte d'après e) dans la construction (K) que

$$F(w, x) = \bar{h}_s(\bar{h}_s^{-1}(f(w))+x) = \bar{h}(\bar{h}_s^{-1}(f(w))+x+w_s) =$$
$$= \bar{h}(\bar{h}^{-1}(f(w))-w_s+x+w_s) = \bar{h}(\bar{h}^{-1}(f(w))+x)$$

pour $(w,x)\in\Gamma\times G^+$ et $g(f(w))=s\in C$, c'est-à-dire pour $f(w)\in\bigcup_{s\in C}\Gamma_s$. On peut donc remplacer toutes les fonctions $\bar{h}_s$ pour $s\in C$ dans la formule e) (K) par une fonction $\bar{h}$ donnée par (9), on peut donc omettre la condition de la compatibilité.

Remarquons encore que la fonction $\bar{h}$ est une injection sur l'intervalle $|\inf_{s\in C_{s_0}}\{-u_s\},\bar{u}|$ pour un $\bar{u}$ de G^+ ou sur son domaine tout entier et dans le cas premier sur $G^+\setminus|\inf_{s\in C_{s_0}}\{-u_s\},\bar{u}|=:E^*$ elle est stable sur les restrictions à l'ensemble E^* des classes d'équivalence du groupe G par rapport au sous-groupe G_1^* (considéré dans ii) — nous supposons que $s_1\in C$).

Remarquons aussi que

$$\bigwedge_{C_1,C_2\in S/\varrho}\left(C_1\neq C_2\Rightarrow\left(\bigcup_{s\in C_1}\Gamma_s\right)\cap\left(\bigcup_{s\in C_2}\Gamma_s\right)=\emptyset\right).$$

Il en résulte d'après nos considérations qu'on peut modifier la construction (K) à la construction (K_1):

1) Soit f: $\Gamma\to\Gamma$ une fonction telle que

$$\bigwedge_{\alpha\in\Gamma}f(f(\alpha))=f(\alpha).$$

2) Décomposons $f(\Gamma)=\bigcup_{k\in K}\Gamma_k$ aux ensembles Γ_k non-vides, disjoints et tels que pour chaque k de K il existe une décomposition invariante $\{W_{ik}\}_{i\in J_k}$ d'un intervalle Δ_k de G, pour lequel $G^+\subset\Delta_k$ et $\bar{\bar{J}}_k=\bar{\bar{\Gamma}}_k$.

3) Soit h : $\{W_{ik}\}_{i\in J_k}\to\Gamma_k$ une bijection et définissons $\bar{h}_k$: $\Delta_k\to\Gamma_k$ de la manière suivante

$$\bar{h}_k(x)=h_k(W_{ik})\qquad\text{pour}\qquad x\in W_{ik}.$$

4) Posons

$$F(\alpha,x)=\bar{h}_k(\bar{h}_k^{-1}(f(\alpha))+x)\qquad\text{pour}\qquad f(\alpha)\in\Gamma_k.$$

Nous avons donc le théorème suivant:

— la construction (K_1) donne toutes les solutions de (1) remplissants (7') sur $\Gamma\times G^+$.

Dans la démonstration qu'on peut recevoir chaque solution de (1) par la construction (K_1) la role de Γ_k jouent des ensembles $\bigcup_{s\in C}\Gamma_s$ et la role de h_k jouent des fonctions $\bar{h}$ (dépendantes évidemment de C de S/ϱ). On peut aussi vérifier facilement que chaque fonction F donnée par le construction (K_1) remplit (1).

Remarque 2. La supposition que G est complet n'est pas essentielle dans nos raisonnements. En effet chaque groupe G archmédien peut être prolongé au groupe $\tilde{G}$ complet et il suffit de consiérer les éléments $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ dans (3) et les éléments $\inf_{s\in C}\{-u_s\}$ pour $C\in S/\varrho$ dans (11) comme les éléments de $\tilde{G}$.

Travaux cités

[1] A. Krupińska: *Ogólne rozwiązanie równania translacji na grupoidzie Brandta.* Rocznik Nauk.-Dydak. WSP w Krakowie, Prace Mat. VI, 41 (1970), p. 31–44.

[2] A. Krupińska: *Rozwiązanie równania translacji na kategorii.* Zesz. Nauk. WSP w Rzeszowie, 2/18 (1972), p. 13–106.

[3] J. Tabor: *Struktura ogólnego rozwiązania równania translacji na grupoidzie Ehresmanna oraz rozkłady niezmiennicze tego grupoidu.* Rocznik Nauk.-Dydak. WSP w Krakowie, Prace Mat. VI 41 (1971), p. 107–153.

[4] Z. Moszner: *Structure de l'automate plein, réduit et inversible.* Aequationes Math. 9 (1973), p. 46–59.

[5] Z. Moszner, *Décompositions invariantes du demi-groupe des éléments non-negatifs du groupe archimédien*, sous presse dans Tensor.